

Pfade, Phasen, Fluktuationen

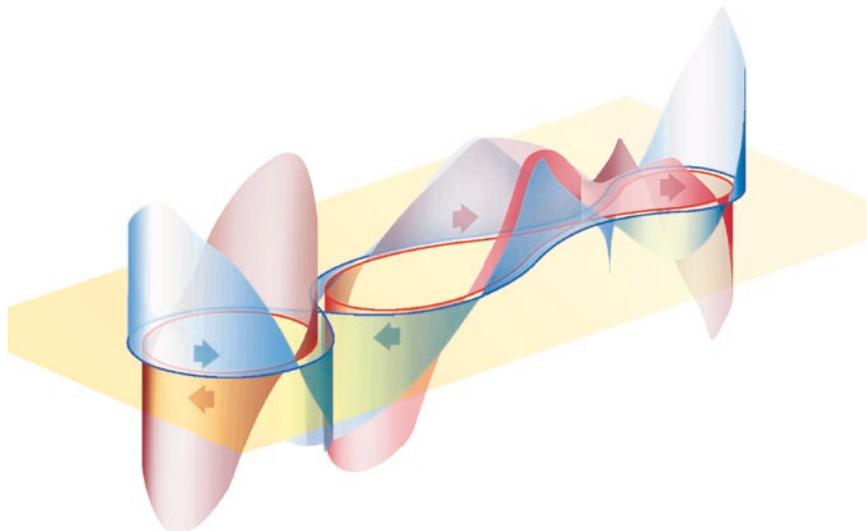
Korrelationen zwischen chaotischen Bahnen liefern den Schlüssel zum Verständnis universeller Quantenfluktuationen.

Fritz Haake und Klaus Richter

Warum weisen die Spektren von Quantensystemen universelle Fluktuationen auf, wenn chaotische Dynamik das korrespondierende klassische System regiert? Eine überraschende Einsicht in klassisches Hamiltonsches Chaos ermöglicht es, diese Grundfrage der Quantenchaos-Forschung zu beantworten: Chaotische Bahnen verhalten sich nicht individuell, sondern treten gebündelt auf. Derartige Korrelationen erklären nicht nur die Statistik von Energieniveaus, sondern auch interferenzbedingte mesoskopische Fluktuationen wie im Ladungstransport durch Nanostrukturen und in normal-/supraleitenden Hybridstrukturen.

Während die Quantenmechanik zweifellos den Schlüssel zur mikroskopischen Welt der Elementarteilchen, Atome und Moleküle liefert, erklärt die klassische Mechanik zumeist adäquat Vorgänge in der makroskopischen Welt. Diese beiden Theoriegebäude erscheinen, auch im Physikstudium, weitgehend getrennt. Häufig treten aber gerade an Schnittstellen zwischen Disziplinen interessante Phänomene zutage, deren Verständnis neuartige Konzepte verlangt. So lassen sich in der klassischen Mechanik zwei Klassen dynamischer Systeme klar unterscheiden: die *reguläre* Bewegung integrierbarer Systeme, z. B. die rosettenartigen Bahnen des sphärischen Pendels, und die *chaotische* Bewegung nichtintegrierbarer Systeme, wie die chaotischen Trajektorien eines Doppelpendels. Offenbaren sich nun beim Übergang von der Makro- zur Mikrowelt noch Spuren der jeweiligen klassischen Dynamik im dazu korrespondierenden Quantensystem? Wie äußert sich dabei die Balance zwischen klassischem Chaos und den stärkeren Ordnungsprinzipien der Quantenmechanik, in der die Unschärferelation die Auflösung beliebig feinskaliger „Phasenraumstrukturen“ verbietet? Dieser Frage widmet sich der häufig etwas salopp mit „Quantenchaos“ umschriebene Bereich der Theoretischen Physik, den Experimente, etwa aus der mesoskopischen Physik, gezielt flankieren.

Henri Poincaré hatte schon 1899 erkannt, dass chaotische Bewegung, die in ergodischer Weise den klassischen Konfigurations- oder Phasenraum gleichmäßig ausfüllt und häufig fälschlicherweise mit „zufällig“ gleichgesetzt wird, durchaus auch Strukturprinzipien unterliegt: In den „Methodes nouvelles de la mecanique classique“ schreibt er, dass sich beliebig



In dieser Phasenraumdarstellung ist die blaue Trajektorie bis auf die Kreuzungsbereiche nahezu identisch mit den beiden roten Trajektorien (in der gelb unterlegten xy -Ebene des Konfigurations-

raums). Die vertikale Koordinate gibt die Impulskomponente in x -Richtung an. Solche korrelierten klassischen periodischen Bahnen spielen eine besondere Rolle im „Quantenchaos“.

lange Stücke einer Trajektorie beliebig genau durch Stücke einer periodischen Bahn approximieren lassen.¹⁾ Zuweilen interpretiert man heutzutage, Poincaré habe periodische Bahnen als „Skelett“ der chaotischen Dynamik erkannt, an welchem sich die größere Menge der nichtperiodischen Bahnen entlang windet. Entwicklungen der letzten zehn Jahre zeigen, wie dieses „Skelett“ aufgebaut ist. Demnach unterliegt die chaotische Dynamik noch weiteren Ordnungsprinzipien: Die periodischen Bahnen treten nicht als voneinander unabhängige Einzelentitäten auf, sondern in Paaren, allgemeiner gesagt: in dicht gepackten Büscheln. Diese

1) „Etant données [...] une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite que l'on veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut.“

KOMPAKT

- Gemäß einer Vermutung von Bohigas, Giannoni und Schmit weisen die Spektren von Quantensystemen universelle Züge auf, ähneln sich also alle – vom Kern über das Atom bis hin zur Nanostruktur –, sofern ihr korrespondierendes klassisches Pendant chaotisch ist.
- Moderne semiklassische Pfadintegral-Methoden erlauben es, quantenmechanische Eigenschaften mesoskopischer Systeme quantitativ zu berechnen und vorherzusagen. Insbesondere eröffnen sie Einblicke in den Zusammenhang zwischen klassischer und Quantenphysik, welcher der Bohigas-Vermutung zugrunde liegt.
- Den Schlüssel dazu liefern subtile Korrelationen zwischen chaotischen klassischen Bahnen, deren Bedeutung erst in der letzten Dekade sichtbar wurde.

Prof. Dr. Fritz Haake, Fachbereich Physik, Universität Duisburg-Essen, Lotharstr. 1, 47048 Duisburg; Prof. Dr. Klaus Richter, Institut für theoretische Physik, Universität Regensburg, Universitätsstr. 31, 93053 Regensburg

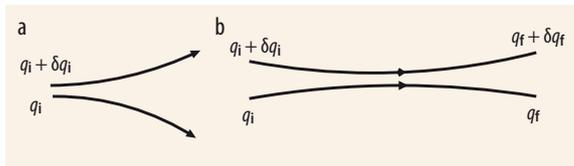


Abb. 1 Chaotische Dynamik: a) exponentielles Auseinanderstreben von Bahnen im Anfangswertproblem; b) „exponentielle Konvergenz“ von den Rändern nach „innen“ im entsprechenden Randwertproblem.

versteckte Eigenschaft periodischer Bahnen in chaotischen Systemen spielt eine zentrale Rolle für die spektralen Eigenschaften der dazu korrespondierenden Quantensysteme.

Bahnenbüschel

Nach der landläufigen Definition von Chaos laufen zwei anfänglich eng benachbarte Bahnen exponentiell auseinander gemäß $e^{\lambda t}$, mit dem Lyapunov-Exponenten λ als Rate (**Abb. 1a**). Demnach ist chaotische klassische Bewegung extrem störanfällig. Aber Vorsicht! Diese Aussage stimmt nur für das „Newtonsche“ Anfangswertproblem, bei dem die Position q_i und der Impuls p_i zum Anfangszeitpunkt t_i gegeben sind. Das „Hamiltonsche“ Randwertproblem mit den gegebenen Anfangs- und Endpositionen (q_i, q_f) hingegen ist bei chaotischer Dynamik extrem stabil, sowohl gegenüber äußeren Störungen als auch Verschiebungen der Randpunkte (**Abb. 1b** und **Infokasten** „Anfangs- und Randwertproblem“). Letztere Tatsache ist weithin unbekannt, aber äquivalent zur Störanfälligkeit des Anfangswertproblems.

Wegen der exponentiellen Stabilität des Randwertproblems treten chaotische periodische Bahnen im Allgemeinen in Büscheln auf. Dies versteht man am besten am einfachsten Beispiel zweier Bahnen, etwa ein Paar periodischer Trajektorien im Hyperbelbillard (**Abb. 2**), benannt nach der hyperbelförmigen rechten Berandung. Billards – gewissermaßen Idealisierungen von Kugeln auf dem Billardtisch – sind charakterisiert durch freie Bewegung eines Teilchens im Innern, gepaart mit Reflexionen am Rand. Je nach Berandung ist die Dynamik integrabel wie im Rechteckbillard, chaotisch wie im Hyperbelbillard oder „gemischt“. Billards fungieren als Modellsysteme für das Quantenchaos,

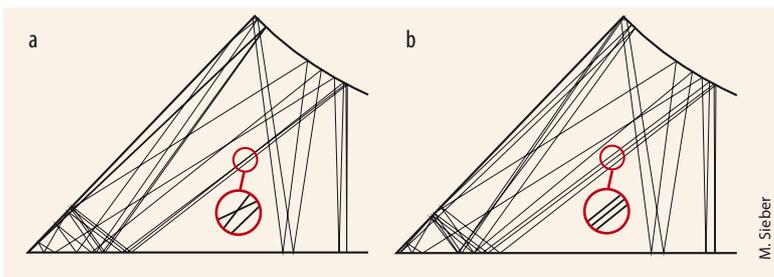


Abb. 2 Diese zwei periodischen Bahnen im „Hyperbel-Billard“ sind fast identisch und unterscheiden sich nur darin, dass

die linke Bahn (a) eine Selbstkreuzung aufweist (roter Kreis), während die rechte diese Kreuzung „vermeidet“ (b).

aber auch als durchaus realistische Modelle für Elektronen in flächigen Nanostrukturen.

Da der Konfigurationsraum im Billard-Inneren beschränkt ist, weist jede (lange) periodische Trajektorie zwangsläufig viele Selbstkreuzungen auf, darunter auch solche mit kleinem Winkel zwischen den sich kreuzenden Segmenten (**Abb. 2**) [1]. Aus der im Konfigurationsraum gekreuzten Bahn lässt sich die zugehörige Partnerbahn eindeutig konstruieren (**Infokasten** „Bahnen-Dubletts“). Außerhalb der Selbstbegegnungen lassen sich die Bahnstücke, Links genannt, fast nicht unterscheiden; im obigen Sinne der exponentiellen Stabilität des Randwertproblems sind sie sich „exponentiell“ nahe. In grober, aber hilfreicher Vereinfachung kann man die Links beider Bahnen als gleich ansehen und die beiden Möglichkeiten zu ihrer Zusammenschaltung als verschiedene Weichenstellungen.

Dieser Sprachgebrauch ist hilfreich, um den allgemeinen Mechanismus zu formulieren, nach dem sich Bahnenbüschel durch enge Selbstbegegnungen einer Bahn erzeugen lassen [2]. Jede lange periodische Bahn weist, wie gesagt, notwendigerweise viele enge Selbstbegegnungen im Konfigurationsraum auf. Dabei können sich wie im obigen Beispiel zwei, aber auch drei, vier oder l Bahnstücke vorübergehend nahekomen und dann ein Stück weit nahezu parallel verlaufen; man spricht dann von einer l -Begegnung. Dann gibt es auch genau l Links außerhalb der Begegnung, die sich nun auf $l!$ verschiedene Weisen durch die l Begegnungsstücke zusammenschalten lassen. Damit hat man ein Büschel von $l!$ verschiedenen Bahnen schematisch konstruiert. Die exponentielle Stabilität des Randwertproblems sichert die Existenz all dieser Bahnen, wenn eine davon gegeben ist.

Insofern eine lange periodische Bahn viele enge Selbstbegegnungen hat, von denen jede eine von $l!$ möglichen Weichenstellungen realisiert, ist sie Mitglied eines Büschels mit einer Bahn-Gesamtzahl, die durch das Produkt aller Faktoren $l!$ gegeben ist. Ein Beispiel ist ein Büschel von $72 = (3!)^2 \cdot 2!$ Bahnen, das aus zwei Drei-Begegnungen und einer Zwei-Begegnung „erzeugt“ wurde (**Abb. 3**). Die Abbildung vermittelt bewusst den Eindruck, es handle sich um eine einzige Bahn; nur in den Einschüben erscheinen die jeweils $l!$ unterschiedlichen Weichenschaltungen aufgelöst. In der Tat ist ein Bahnenbüschel umso dichter gepackt, je schmaler die involvierten Selbstbegegnungen sind.

Sucht man durch Umschalten in einer Selbstbegegnung eine Partnerbahn zu konstruieren, so kann es vorkommen, dass sich nicht *eine* neue periodische Bahn ergibt, sondern zwei oder mehr kürzere, deren Gesamtheit – auch *Pseudobahn* genannt – der ursprünglichen Bahn insgesamt überall nahe kommt (**Abb.** auf S. 35 und **Abb. 4**).

Je länger die beteiligten Bahnen sind, desto mehr enge Begegnungen weisen sie auf mit anderen Bahnen, was zur Vorstellung führt, dass im Limes langer Zeiten die Bahnenbüschel ganze Netze bilden, die den klassischen Phasenraum feinmaschig durchweben – ganz im Sinne der Poincaréschen „Vorstellung“.

Spektrale Statistik und Universalität

Büschel und Netze periodischer Bahnen spielen eine besondere Rolle für die Frage, wie sich im semiklassischen Grenzfall (bzw. Strahlenlimes) Signaturen von Chaos für Quanten- und Wellenphänomene bemerkbar machen [3]. Die periodischen Bahnen eines Büschels sind nämlich dadurch ausgezeichnet, dass sie sich nur minimal in ihren Längen (Abb. 2 und Abb. 3) und klassischen Wirkungen $S = \oint \mathbf{p} \, d\mathbf{q}$ unterscheiden. Da die Wirkungen aber mit Phasen im korrespondierenden Wellenbild verknüpft sind, liefern die Büschel durch konstruktive Interferenz die dominanten Beiträge für eine Vielzahl von Quanten- und Wellenphänomenen, wie wir nachfolgend zeigen. Dazu gehören unter anderem universelle Fluktuationen in Energiespektren oder in Frequenzspektren von Resonatoren, der Transport von Elektronen durch mesoskopische Leiter, bei denen Streuung an ungeordneten Störstellen oder Reflexion an Rändern für Chaos sorgen, bis hin zum Verhalten von Elektronen und Löchern in normal-/supraleitenden mesoskopischen Hybridssystemen.

Wenden wir uns zunächst den Energiespektren zu. Im uns interessierenden Übergangsbereich zwischen Mikro- und Makrowelt bzw. klassischer und Quantenmechanik entfalten semiklassische Techniken wie die WKB-Näherung ihre volle Wirkung.²⁾ Dieser Bereich ist gekennzeichnet durch hohe Anregungsenergien oder -impulse p , was sich in hohen Quantenzahlen k bzw. kleinen Wellenlängen $\lambda = h/p$ widerspiegelt (h ist das Plancksche Wirkungsquantum). Für integrable Dynamiken, im einfachsten Fall für eindimensionale Bewegung, ergeben sich diskrete Energieniveaus aus semiklassischen Quantisierungsbedingungen der Form $S(E) = \oint \mathbf{p} \, d\mathbf{q} = kh$ für die energieabhängige klassische Wirkung $S(E)$.³⁾ Martin Gutzwiller verallgemeinerte dies auf multidimensionale, klassisch chaotische Systeme. Die Dichte diskreter Energieniveaus lässt sich demnach semiklassisch als unendliche Summe von Beiträgen periodischer Bahnen darstellen [4]:

$$\rho(E) = \sum_n \delta(E - E_n) \sim \bar{\rho}(E) + \text{Re} \sum_p A_p e^{iS_p/h}. \quad (1)$$

Hierbei sind S_p die Wirkung und A_p eine die Stabilitätseigenschaften und die Maslov-Phase widerspiegelnde

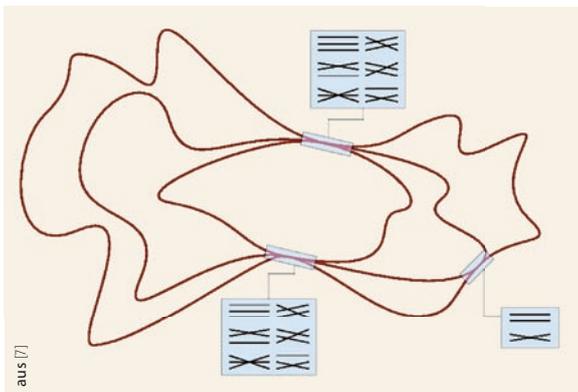


Abb. 3 Wegen der insgesamt 72 unterschiedlichen „Weichenstellungen“ besteht dieses Bahnenbüschel aus ebenso vielen praktisch gleich langen Einzelbahnen.

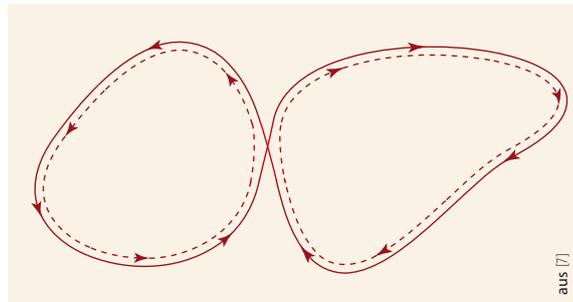


Abb. 4 Beispiel einer „Pseudobahn“, hier gegeben durch die beiden (gestrichelten) sich fast berührenden periodischen Bahnen.

Amplitude der p -ten Bahn, beides rein klassische Größen. Der erste Term, $\bar{\rho}(E)$, ist die mittlere Zustandsdichte, nach Hermann Weyl gegeben durch die Zahl der Planck-Zellen, d. h. Würfel mit Kantenlängen h , in der „Energieschale“, also dem Unterraum des Phasenraums des Systems mit fixierter Energie. Der zweite, oszillatorische Term weist schon auf die Schlüsselrolle periodischer Bahnen hin: Im Idealfall ergeben sich aus der Summe über alle Beiträge der (unendlich vielen) periodischen Bahnen Näherungswerte für die Energieniveaus E_n .

Die Spektren sind im semiklassischen Übergangsbereich durch eine große Zahl sehr dicht liegender, scheinbar erratisch verteilter Anregungsniveaus gekennzeichnet, die sich nicht regulären Sequenzen und Quantenzahlen zuordnen lassen. Stattdessen weisen die Energieniveaus bemerkenswerte statistische Eigenschaften auf: Gemäß einer Vermutung von Bohigas, Giannoni und Schmit verhalten sich die Spektren von Quantensystemen genau dann universell – d. h. im Rahmen gewisser Symmetrieklassen vollkommen unabhängig vom spezifischen physikalischen System – wenn die korrespondierende klassische Dynamik vollständig chaotisch ist [5]. Normiert man die Abstände zwischen Energieniveaus auf den jeweiligen (systemspezifischen) mittleren Niveauabstand, lassen sich beispielsweise die Anregungsspektren von Atomkernen (mit Skalen im MeV-Bereich) mit denen von Halbleiter-Quantenpunkten (im meV-Bereich) direkt vergleichen und die gemeinsamen universellen Eigenschaften nachweisen.

2) Gregor Wentzel, Hendrik Anthony Kramers und Leon Brillouin fanden 1926 unabhängig voneinander eine semiklassische Näherung für die Lösung der eindimensionalen, stationären Schrödingergleichung.

3) Das bekannteste Beispiel ist die Bohr-Sommerfeld-Quantisierung für die Kepler-Bahnen, welche die Energieniveaus des Wasserstoffatoms liefert.

ANFANGS- UND RANDWERTPROBLEM

Zur Verdeutlichung des Zusammenhangs zwischen der Stabilität des Randwertproblems und der Störanfälligkeit des Anfangswertproblems zeigt Abb. 1b schematisch eine Lösung der Bewegungsgleichungen zwischen den Punkten q_i und q_f im Konfigurationsraum, der in diesem Artikel einfachheitshalber als zweidimensional angenommen wird. Die Zeitspanne $t_f - t_i$ wird als groß gegenüber der „Lyapunov-Zeit“ $1/\lambda$ angenommen: $t_f - t_i \gg 1/\lambda$. Kleine Verschiebungen $\delta q_i, \delta q_f$ der Randpunkte ergeben dann eine neue Lösung, die von beiden Randpunkten exponentiell mit der Rate λ auf die ursprüngliche Lösung zuläuft. Lange Bahnstücke zu leicht verschiedenen Randwerten kommen sich daher aufgrund dieser Stabilität extrem (exponentiell) nahe.

Spektrale Fluktuationen lassen sich quantitativ mithilfe von Korrelationsfunktionen der Niveaudichte wie der Zwei-Punkt-Funktion charakterisieren:

$$R(e) = \frac{1}{\bar{\rho}^2} \overline{\Delta\rho\left(E + \frac{e}{2\pi\bar{\rho}}\right) \Delta\rho\left(E - \frac{e}{2\pi\bar{\rho}}\right)}, \quad \Delta\rho = \rho - \bar{\rho} \quad (2)$$

Dabei bedeutet der Überstrich eine Mittelung über die Zentralenergie E . Die Funktion $R(e)$ ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, zwei Energieniveaus im (normierten) Abstand e im Spektrum zu finden. Anhand von $R(e)$ lässt sich exemplarisch die semiklassische Erklärung der Bohigas-Giannoni-Schmit-Vermutung und die sie beinhaltende Aussage zur Universalität illustrieren. Dieser Korrelator und Varianten davon sind experimentell zugänglich, beispielsweise über Photoabsorptionsspektren hoch angeregter Atome oder Leitwertfluktuationen mesoskopischer Halbleiterstrukturen.

Seit langem gibt es theoretische Vorhersagen für $R(e)$, die auf der Zufallsmatrixtheorie (Random Matrix Theory, RMT) basieren. Ausgehend von der Annahme, die Matrixelemente des Hamilton-Operators eines komplexen (z. B. wechselwirkenden oder nichtintegrierbaren) Quantensystems seien zufallsverteilt – d. h. gewissermaßen unter Annahme von Universalität –, lässt sich $R(e)$ durch Mittelung über ein geeignetes Ensemble ausgewürfelter Hamiltonscher Matrizen bzw. ihrer Energieeigenwerte ableiten, ohne die Schrödinger-Gleichung für ein konkretes quantenmechanisches System wirklich lösen zu müssen. Insofern erklärt die RMT, deren Vorhersagen numerisch und experimentell vielfach bestätigt wurden, nicht die Universalität spektraler Fluktuationen, sondern benutzt sie vielmehr.

Universelles Verhalten gilt jeweils innerhalb gewisser Symmetrieklassen, von denen zehn verschiedene bekannt sind, aber nur zwei hier Erwähnung finden sollen. Die erste, genannt die „unitäre“, besitzt keinerlei Symmetrien. Für die zweite, die „orthogonale“, herrscht als einzige Symmetrie Zeitumkehrinvarianz. Für Dynamiken aus diesen Symmetrieklassen sagt die Zufallsmatrixtheorie im Limes großer Matrizen die folgenden, numerisch und experimentell bestätigten Zwei-Punkt-Korrelatoren voraus [3]:

$$R(e) = \begin{cases} -\left(\frac{\sin e}{e}\right)^2 \equiv -s(e)^2 & \text{unitär,} \\ -s(e)^2 + s'(e)\left(\frac{1}{\pi} \text{Si}(e) - \frac{1}{2} \text{sgn}(e)\right) & \text{orthogonal,} \end{cases} \quad (3)$$

worin $\text{Si}(e) = \int_0^e de' s(e')$. Bemerkenswert dabei ist das Verhalten für kleine Energieabstände ($e \rightarrow 0$). Von $R(0) = -1$ entfernen sie sich proportional zu e^2 bzw. e im unitären bzw. orthogonalen Fall. Diese Potenzen sind proportional zur Wahrscheinlichkeit, im (dimensionslosen) Abstand e zu einem Niveau das Nächste zu finden. Der Korrelator ist die Summe aus einem oszillatorischen und einem monoton abstandsabhängigen Teil. Im unitären Fall, $R = -(1 - \cos 2e)/2e^2$, fallen beide Teile wie $1/e^2$ ab. Im orthogonalen Fall lassen sich sowohl der monotone als auch die Amplitude des oszillatorischen Teils als unendliche Reihen in $1/e$ angeben.

Es ist gelungen, die vorstehenden Korrelatoren und ihre Universalitätseigenschaften semiklassisch ohne jedes Ensemblemittel für voll chaotische Dynamiken zu gewinnen [6, 7]. Im Korrelator (2) führt die Gutzwiller-Darstellung der Niveaudichte (1) zu einer Doppelsumme über periodische Bahnen, $\text{Re} \sum_{pp'} A_p A_{p'} e^{i(S_p - S_{p'})/\hbar}$. Fast alle hier enthaltenen Bahnpaare $\{p, p'\}$ sind unkorreliert und interferieren destruktiv. Nach der erwähnten Energiemittelung können nichtverschwindende Beiträge nur auf zweierlei Weise entstehen: (a) für die „diagonalen“ Terme ($p=p'$ und, im orthogonalen Fall, wenn die Bahn p' die Zeitumgekehrte von p ist) und (b) wenn das Paar $\{p, p'\}$ einem so eng gepackten Büschel entstammt, dass die Wirkungsdifferenz von der Ordnung der Planckschen Konstanten ist, $S_p - S_{p'} = \mathcal{O}(\hbar)$.

In einer Pionierarbeit hatte Michael Berry 1985 erkannt, dass der Diagonalbeitrag proportional zu $1/e^2$ ist und für beide Symmetrieklassen den führenden Beitrag der $1/e$ -Entwicklung des monotonen Anteils im Korrelator $R(e)$ korrekt wiedergibt [8]. Erst 16 Jahre später gelang es, den ersten „nichtdiagonalen“ Beitrag (aller Paare von „Achterbahnen“, in der Literatur meist Sieber-Richter-Paare genannt, gemäß Abb. i) zu finden und den Grundmechanismus aufzudecken, wie Korrelationen in klassisch-chaotischer Dynamik universelle

BAHNEN-DUBLETTS

Von den beiden Bahnen des Dubletts in Abb. i hat eine im Konfigurationsraum eine Kreuzung unter einem kleinen Winkel ϵ . Die Bahnschleifen auf den beiden Seiten davon lassen sich als Lösungen je eines Randwertproblems verstehen, wobei Anfangs- und Endpunkte übereinstimmend im Kreuzungspunkt liegen. Um zu verstehen, dass dann eine Partnerbahn existieren muss, welche die Selbstkreuzung knapp vermeidet, aber ansonsten praktisch identisch aussieht, denkt man sich eine Hilfslinie durch den Kreuzungspunkt. Dann wählt man auf dieser Linie oberhalb und unterhalb der Kreuzung nahegelegene Hilfspunkte P_1 und P_2 und stellt mit ihnen als Randpunkten nach rechts und links das Randwertproblem neu. Es gibt je eine Lösung, beide fügen sich in den Randpunkten im Allgemeinen mit unstetiger Tangente aneinander. Durch Verschieben von P_1 und P_2 findet man ein Lösungspaar mit stetigen Tangenten; die zugehörigen Schleifen bilden dann zusammen eine weitere periodische

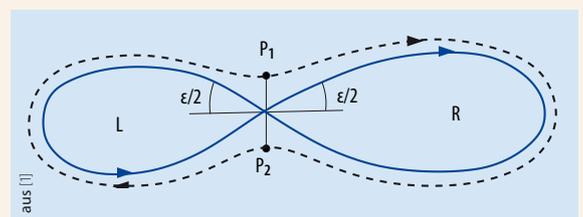


Abb. i Das einfachste Beispiel eines aus zwei chaotischen periodischen Partnerbahnen bestehenden „Büschels“.

Bahn, die eine knapp vermiedene Kreuzung aufweist. Beide haben um die (vermiedene) Kreuzung herum eine „Selbstbegegnung“, in der zwei Bahnstücke nahe beieinander liegen. Die beiden außerhalb der Selbstbegegnungen liegenden schleifenartigen Verbindungsstücke L und R, Links genannt, lassen sich für die beiden Bahnen fast nicht unterscheiden.

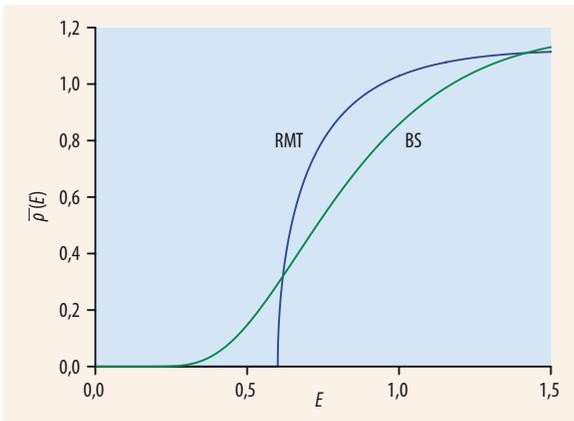


Abb. 5 In einem chaotischen Andreev-Billard sagt die Zufallsmatrixtheorie (RMT) im Gegensatz zur Bohr-Sommerfeld-Näherung (BS) voraus, dass die Zustandsdichte zwischen Fermi-Energie (bei $E=0$) und $E \approx 0,6$ eV (in skalierten Einheiten) vollständig unterdrückt ist.

spektrale Eigenschaften bedingen [1]. Dieser Beitrag lieferte das nächste Glied der obigen Entwicklung ($\propto (1/e)^3$). Die Herleitung muss übrigens nicht für ein spezifisches System erfolgen. Vielmehr gilt sie für jede generische chaotische Dynamik. Benutzt werden nämlich die statistischen Eigenschaften der unendlich vielen, langen periodischen Bahnen und ihrer Partner, die allen solchen Systemen gemein sind.

Fast ein weiteres Jahrzehnt später war das Phänomen der Bahnenbüschel erst tief genug verstanden, um die vollen asymptotischen $1/e$ -Entwicklungen in $R(e)$ als komplett zufallsmatrixtreu zu erkennen. Zunächst gelang es Stefan Heusler et al. und Sebastian Müller et al. nach Klassifizierung aller Bahnpaare, die in engen Selbstbegegnungen verschieden verschaltet sind und konstruktiv interferierende Beiträge liefern, für den monotonen Teil von $R(e)$. Dabei bestimmt die Zahl verschiedener l -Begegnungen sowie ihr Grad l die Ordnung, mit der sie zu $R(e)$ beitragen. Paare aus dem Büschel der **Abb. 3** tragen beispielsweise zum Term siebter Ordnung in der $1/e$ -Entwicklung bei.

Besonders störrisch widersetzte sich der oszillatorische Teil von $R(e)$ der semiklassischen Erklärung. Ein in feldtheoretischem Kontext schon länger gängiger Umweg führte schließlich zum Ziel. Dabei wird die Zweipunktfunktion nicht direkt, sondern zuerst eine erzeugende Funktion semiklassisch berechnet, aus der $R(e)$ anschließend durch Differentiationen folgt. Die Erzeugende lässt sich semiklassisch als unendliches Produkt von Beiträgen periodischer Bahnen schreiben. Letzteres weist eine Ähnlichkeit zu Eulers Darstellung der Riemannschen Zetafunktion als Produkt über Primzahlen auf, und diese Analogie führt auf eine Eigenschaft der Erzeugenden, die als „Riemann-Siegel lookalike“ bekannt ist. Als praktischer Nutzen ergab sich überraschenderweise, dass – zunächst auf der Ebene der Erzeugenden – der monotone Teil den oszillatorischen Anteil von $R(e)$ eindeutig festlegt.

Nach 25-jähriger Suche gilt die semiklassische Begründung der Universalität spektraler Fluktuationen für voll chaotische Dynamiken als physikalisch größ-

tenteils vollendet. Freilich bleibt aus mathematischer Sicht einiges von Berufeneren abzusichern.

Mesoskopische Andreev-Billards

Die semiklassische Theorie erklärt nicht nur die spektralen Korrelationen, sondern erlaubt auch, direkt messbare spektrale Größen zu berechnen: So spielten Bahnenbüschel auch eine Schlüsselrolle bei der vor kurzem gelungenen Lösung eines seit 15 Jahren bestehendem Problems aus dem Bereich der mesoskopischen Supraleitung, nämlich der Frage nach der Anregungslücke in der Zustandsdichte einer normalleitenden Halbleiter-Nanostruktur, die mit einem Supraleiter in Berührung steht [9].

Eine Modifikation der Niveaudichte des Normalleiters knapp oberhalb der Fermi-Energie ist seit langem als Proximity-Effekt aus der Supraleitung bekannt [10]. Mikrometer-große Strukturen auf der Basis zweidimensionaler, hochbeweglicher Elektronengase lassen sich in guter Näherung durch ballistische Kavitäten beschreiben, d. h. Quantenbillards, für die die oben erwähnten semiklassischen Näherungen gut erfüllt sind und die typischerweise klassisch chaotische Dynamik aufweisen.

Rechnungen auf der Grundlage der Zufallsmatrixtheorie sagten nicht nur eine Reduktion der Zustandsdichte des Normalleiters vorher, sondern eine „harte Lücke“, also die vollständige Unterdrückung der quantenmechanischen Niveaudichte, wie die RMT-Kurve in **Abb. 5** zeigt. Allerdings nur dann, wenn die korrespondierende klassische Dynamik chaotisch ist: eine Quantensignatur von Chaos in Reinstform [11].

Ein semiklassischer Zugang zum Proximity-Effekt beruht auf dem Phänomen der Andreev-Reflexion: Im Gegensatz zum normalen Abprallen eines Teilchens an der Berandung einer Nanostruktur (**Abb. 6a**) wird ein Elektron mit Energien nahe der Fermi-Energie, das auf die Grenze zwischen Normal- und Supraleiter trifft, als Loch mit entgegengesetzter Geschwindigkeit „Andreev-reflektiert“ (**Abb. 6b**) – unter Absorption eines Cooper-Paares im Supraleiter. Eine Nanostruktur mit supraleitendem Kontakt heißt daher auch Andreev-Billard. Wie **Abb. 7a** zeigt, durchläuft das Andreev-reflektierte Loch im normalleitenden Billardbereich den ursprünglichen Elektronenpfad in entgegengesetzter Richtung, trifft nach mehrfachen normalen Reflexionen erneut auf den

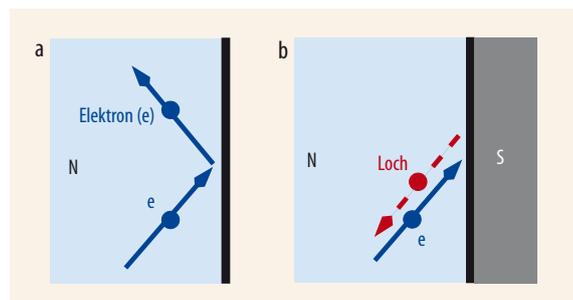


Abb. 6 Normale Reflexion eines Elektrons (a) und Andreev-Reflexion (b) am Rand eines Supraleiters (S): ein Elektron im Normalleiter (N) wird dabei als Loch retro-reflektiert.

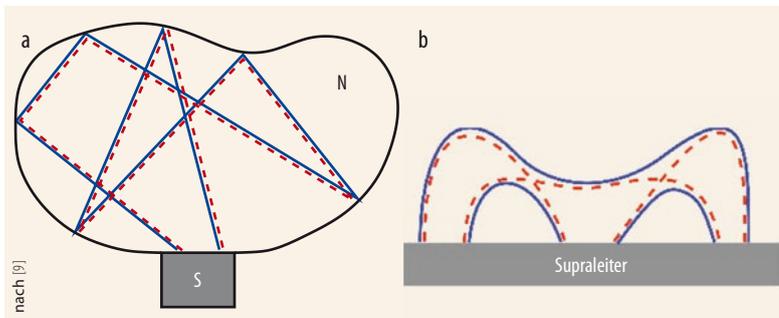


Abb. 7 In einem Andreev-Billard mit Normalleiter (N) und Supraleiter (S) sind die Trajektorien Andreev-reflektierter Elektronen (blau) und Löchern (rot) periodisch (a). Innerhalb von Büscheln können Elektronen und Löcher von der Bahn eines Typs auf eine des anderen Typs „überlaufen“ (b).

Supraleiter und wandelt sich wieder in ein Andreev-reflektiertes Elektron um. Beliebige Trajektorien, die den Supraleiter treffen, sind daher per se periodisch. Wie schon im Zusammenhang mit Gleichung (1) erläutert, basieren semiklassische Näherungen der Zustandsdichte auf periodischen Bahnen. Für jeden Andreev-reflektierten, periodischen Pfad führt das auf eine Quantisierungsbedingung à la Bohr-Sommerfeld [11]. Summiert man alle Beiträge dieser periodischen Bahnen unter Annahme chaotischer Dynamik im Andreev-Billard, so ergibt sich die mit BS bezeichnete Linie in **Abb. 6**. Diese zeigt zwar eine exponentiell unterdrückte Zustandsdichte, jedoch keine echte Anregungslücke wie von der Zufallmatrixtheorie postuliert. Das warf die prinzipielle Frage auf, ob die Existenz der Anregungslücke ein rein quantenmechanischer Effekt ist, der beispielsweise auf Diffraktion beruht, oder sich doch auch durch eine semiklassische Theorie erklären lässt, die auf klassischen Pfaden plus Interferenz beruht.

Das ist in der Tat möglich, und zwar wieder mithilfe von Bahnenbüscheln. Da, wie oben diskutiert, Bahnen eines Büschels in engen Begegnungen verschieden verschaltet sind, kann ein Loch an diesen Begegnungsbereichen von einer zur nächsten periodischen Andreev-Bahn „überlaufen“. Das lässt sich am Beispiel einer Elektron-Loch-Trajektorie aufgrund von vier aufeinanderfolgenden Andreev-Reflexionen illustrieren (**Abb. 7b**). Die systematische semiklassische Berechnung aller Beiträge, die auf derartige Bahn-Multipletts zurückgehen (für beliebige Ordnung in der Zahl der Begegnungsbereiche), ergibt für die Niveaudichte eines Andreev-Billards exakt die in **Abb. 5** dargestellte Zufallmatrix-Vorhersage. Sie erklärt darüber hinaus mikroskopisch die Anregungslücke als Folge interferierender Quasiteilchenpfade. Das Ergebnis der Zufallsmatrizen ist dabei im Übrigen nur ein Grenzfall [9].

Nach dem Durchbruch im Bereich der Dynamik korrelierter Bahnen liefert die heutige semiklassische Theorie also nicht nur ein anschauliches Verständnis für Quanteninterferenzphänomene, sondern erlaubt ebenfalls quantitative Vorhersagen für eine Vielzahl von Observablen in mesoskopischen Quantensystemen. Dazu gehören neben den vorgestellten spektralen Charakteristika die Erklärung von Quantentransporteffekten in ballistischen mesoskopischen Leitern mithilfe von Bahnenbüscheln [9, 12–14], wie beispielsweise

der schwachen Lokalisierung, universeller Leitwertfluktuationen und höherer Momente der Leitwertverteilungen, die „full counting statistics“ [15]. Darüber hinaus erstrecken sich die semiklassischen Methoden und Resultate auch auf verschiedenste Phänomene, die der Zufallmatrixtheorie nicht zugänglich sind. Dazu gehören systemspezifische Abweichungen vom universellen Verhalten für die Vielzahl physikalischer Systeme, die nicht oder nicht vollständig chaotisch sind, und zuweilen sogar auch für nominell chaotische Systeme, wie ein Beispiel aus dem mesoskopischen Spin-Transport jüngst zeigte [16].

Literatur

- [1] M. Sieber und K. Richter, *Physica Scripta* **T90**, 128 (2001)
- [2] A. Altland, P. Braun, F. Haake, S. Heusler, G. Knieper und S. Müller, arXiv:0906.4930; und in: Janke und A. Pelster (Hrsg.), *Path Integrals New Trends and Perspectives: Proc. 9th Int. Conf. (Dresden)*, World Scientific, Singapur (2008)
- [3] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*, Springer, Berlin (2010)
- [4] M.C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer, New York (1990)
- [5] O. Bohigas, M.J. Giannoni und C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1 (1984)
- [6] S. Heusler, S. Müller, A. Altland, P. Braun und F. Haake, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 044103 (2007)
- [7] S. Müller, S. Heusler, A. Altland, P. Braun und F. Haake, *New Journal of Physics* **11**, 103025 (2009)
- [8] M. Berry, *Proc. R. Soc. A* **400**, 229 (1985)
- [9] J. Kuipers, D. Waltner, C. Petitjean, G. Berkolaiko und K. Richter, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 027001 (2010)
- [10] C. W. J. Beenakker, *Lect. Notes Phys.* **667**, 131 (2005)
- [11] J. A. Melsen, P. W. Brouwer, K. M. Frahm und C. W. J. Beenakker, *Europhys. Lett.* **35**, 7 (1996)
- [12] K. Richter und M. Sieber, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 206801 (2002)
- [13] P. W. Brouwer und S. Rahav, *Phys. Rev. B* **74**, 075322 (2006)
- [14] S. Heusler, S. Müller, P. Braun und F. Haake, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 066804 (2006)
- [15] D. Waltner, J. Kuipers und K. Richter, arXiv: 1007.1595 und *Phys. Rev. B*, in Druck
- [16] I. Adagideli, Ph. Jacquod, M. Scheid, M. Duckheim, D. Loss und K. Richter, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 246807 (2010)

DIE AUTOREN

Fritz Haake (FV Quantenoptik / Photonik und FV Theoretische u. Mathematische Grundl. der Physik) studierte Physik in Stuttgart, Berlin und Paris, promovierte zur Lasertheorie bei Wolfgang Weidlich in Stuttgart und ging als Postdoc zu Roy Glauber an die Harvard University. Nach der Habilitation in Stuttgart wurde er an die damalige Universität-Gesamthochschule Essen berufen. Ursprünglich der Quantenoptik verhaftet, erweiterten sich seine Interessen zur statistischen Physik und zu Quantensignaturen von Chaos.



Klaus Richter (FV Tiefe Temperaturen und FV Dynamik und Statistische Physik, dessen Leitung er 2006 bis 2009 innehatte) studierte in Kiel und Freiburg Physik und promovierte dort in Theoretischer Atomphysik. Anschließend befasste er sich in Orsay und Augsburg sowie als Leiter einer Nachwuchsgruppe am MPI für Physik komplexer Systeme in Dresden mit mesoskopischer Physik und Quantenchaos. Seit 2001 hat er an der Universität Regensburg einen Lehrstuhl im Bereich der Theorie der kondensierten Materie inne und leitet dort die Arbeitsgruppe „Complex Quantum Systems“.

