

Neue Dimensionen für Schwarze Löcher

Schwarze Ringe und Schwarze Strings – exotische Objekte in mehr als drei räumlichen Dimensionen.

Burkhard Kleihaus, Jutta Kunz und Francisco Navarro-Lérida

Schwarze Löcher gehören zu den spektakulärsten Vorhersagen von Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie. Für ihre Existenz spricht eine Vielzahl astronomischer Beobachtungen. Ansätze zu einer Theorie der Quantengravitation wie die Stringtheorie erfordern zusätzliche Raumdimensionen neben den üblichen drei. Doch welche Konsequenzen hätte dies für Schwarze Löcher? Rechnungen zeigen, dass wir dann auf eine Vielfalt von „Schwarzen Objekten“ stoßen könnten.

Wenn massereiche Sterne ihren Kernbrennstoff aufgebraucht haben, beenden sie ihre strahlende Laufbahn mit einer gigantischen Supernova-Explosion. Überschreitet die Masse in der Zentralregion eine Obergrenze, versinkt der Stern schließlich im absoluten Dunkel und wird zu einem Schwarzen Loch. Ein berühmtes Beispiel für ein solches stellares Schwarzes Loch mit ca. zehn Sonnenmassen befindet sich 8000 Lichtjahre von uns entfernt. Es handelt sich um den dunklen Partner im Röntgendoppelsternsystem Cygnus X-1 im Sternbild Schwan. Noch viel gewaltigere Schwarze Löcher mit Millionen bis Milliarden Sonnenmassen existieren in den Zentren von Galaxien, so auch im Zentrum unserer Milchstraße (Abb. 1).

Schwarze Löcher sind nicht nur für die Astronomie und Astrophysik von großem Interesse. Vielmehr bieten sie uns auch ein einzigartiges Labor für Gedankenexperimente. Mit einem solchen gelang es z. B. Jacob Bekenstein zu zeigen, dass Schwarze Löcher Entropie besitzen müssen, wenn in ihrer Gegenwart nicht der 2. Hauptsatz verletzt sein soll. Daraufhin entdeckte Stephen Hawking, dass Schwarze Löcher genauso wie schwarze Körper Energie in Form Planckscher Strahlung aussenden. Diese Überlegungen führten schließlich zu den Gesetzen der Mechanik Schwarzer Löcher, die vollkommen analog zu den Hauptsätzen der Thermodynamik sind.

Um die fundamentalen Prinzipien verstehen zu können, die der Thermodynamik Schwarzer Löcher zugrunde liegen, benötigen wir aber eine Quantentheorie der Gravitation. Diese ist auch notwendig, um zu verstehen, was bei Schwarzen Löchern oder beim Urknall am Punkt passiert, an dem die physikalischen Größen unendlich werden (Singularität). Eine vielversprechende Kandidatin für eine Theorie der Quantengravitation, die zugleich alle fundamentalen Wech-

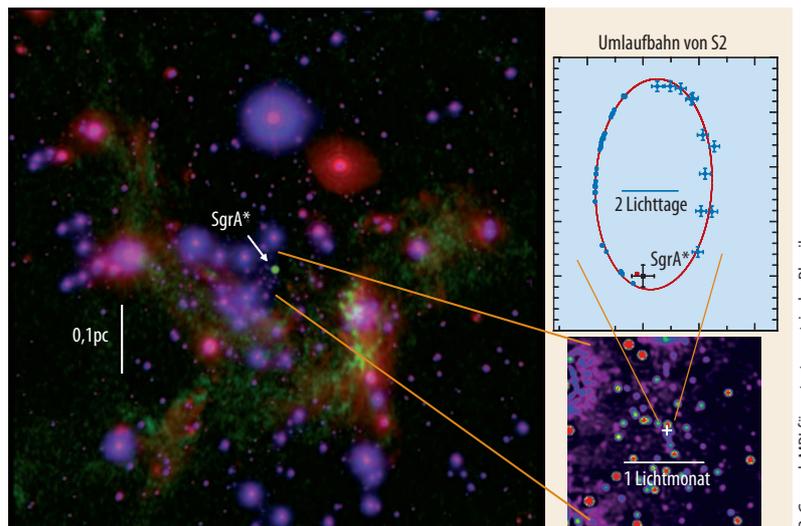


Abb. 1 Aus den beobachteten hochelliptischen Kepler-Bahnen des Sterns S2 um die Radioquelle Sagittarius A* lässt sich schließen, dass sich im Zentrum unserer Milchstraße ein supermassives Schwarzes Loch mit einer Masse von ca. 3,7 Millionen Sonnenmassen befindet [1].

selwirkungen vereinigt, ist derzeit die Stringtheorie. Für ihre mathematische Konsistenz sind jedoch höhere Dimensionen unerlässlich. Doch bislang ließen sich diese nicht beobachten. Auch dafür muss die Stringtheorie eine Erklärung finden.

Die Idee höherer Dimensionen ist nicht neu. Anfang der 1920er-Jahre, also schon kurz nach Einsteins Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART), führten Theodor Kaluza und Oskar Klein eine fünfte Dimension ein, um die Einsteinsche Theorie der Gravitation mit der Maxwellschen Elektrodynamik zu vereinigen. Dabei gingen sie davon aus, dass die

KOMPAKT

- Theoretische Ansätze für eine Quantentheorie der Gravitation (wie z. B. die Stringtheorie) erfordern mehr als drei räumliche Dimensionen.
- Zusätzliche Dimensionen, sowohl kompakte als auch ausgedehnte, haben fundamentale Konsequenzen für die Eigenschaften Schwarzer Löcher.
- Insbesondere können die Ereignishorizonte andere Topologien aufweisen, sodass z. B. auch „Schwarze Ringe“ und „Schwarze Strings“ existieren könnten.
- Es gibt Hinweise auf Übergänge zwischen „Schwarzen Objekten“ mit unterschiedlichen Horizonttopologien, sogar nackte Singularitäten könnten auftreten.

Priv. Doz. Dr. Burkhard Kleihaus,
Prof. Dr. Jutta Kunz,
Institut für Physik,
Universität Oldenburg,
Postfach 2503,
26111 Oldenburg;
Dr. Francisco Navarro-Lérida,
Dept. de Física, Atómica,
Molecular y Nuclear,
Universidad Complutense de Madrid,
28040 Madrid,
Spanien

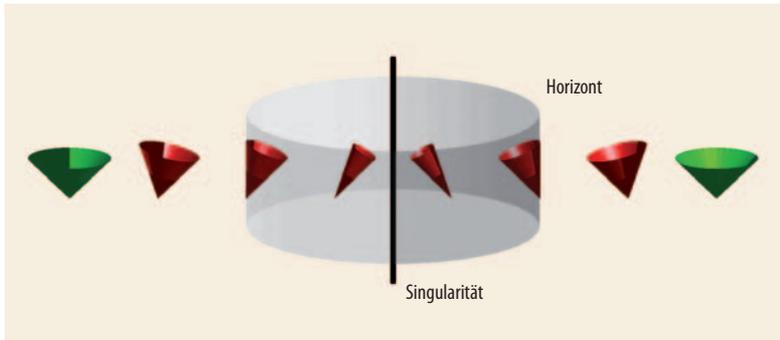


Abb. 2 In einer gekrümmten Raumzeit manifestieren sich die Metrikfunktionen in der Form und Lage der Lichtkegel, die entsprechend deformiert und gekippt sind. Am Ereignishorizont ist die Öffnung

des Lichtkegels nur noch auf das Innere des Schwarzen Lochs gerichtet. In der Grafik ist die Zeit in vertikaler Richtung aufgetragen und eine räumliche Dimension unterdrückt.

Zusatzdimension nur eine geringe Ausdehnung hat, und damit vor einer Beobachtung verborgen bleibt.

Zusätzliche Dimensionen, ob nun extrem klein oder ausgedehnt, haben jedoch fundamentale Konsequenzen für die Eigenschaften Schwarzer Löcher. Diese könnten dann als noch exotischere „Schwarze Objekte“ existieren, zwischen denen auch Übergänge denkbar wären. Um dies zu verstehen, gilt es die Einstein-Gleichungen der ART in mehr als vier Dimensionen zu lösen. Doch dafür möchten wir zunächst die Lösungen für die uns bekannte Raumzeit vorstellen.

Schwarze Löcher in vier Dimensionen

In der ART stellen sog. Metrikfunktionen das Gravitationsfeld dar und ergeben sich als Lösung von Einsteins Feldgleichungen. Bei Anwesenheit von gravitierenden Massen verändern sich die Abstandsverhältnisse zwischen Punkten und Ereignissen.

Die einfachste Lösung der Einstein-Gleichungen ergibt sich bei statischen und kugelsymmetrischen Massen (Schwarzschild-Lösung). Bei Berücksichtigung der Rotation hängt die Lösung neben der Masse auch vom Drehimpuls ab (Kerr-Lösung). Die unzähligen massiven Schwarzen Löcher, die das Universum bevölkern, lassen sich also durch eine einzige exakte Lösung der Einstein-Gleichungen beschreiben, die nur von zwei Parametern abhängt. Diese bestimmen dann eindeutig die gesamte Struktur der Raumzeit des jeweiligen Schwarzen Lochs.

Die Metrik des flachen Minkowski-Raums der Speziellen Relativitätstheorie wird in kartesischen Koordinaten durch das Linienelement

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1)$$

beschrieben (c ist die Lichtgeschwindigkeit). Transformiert man nun auf Kugelkoordinaten, so lautet die Metrik

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2)$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

wobei $d\Omega^2$ das Linienelement auf der Einheitskugel

bezeichnet. Die Metrik gibt an, wie groß der Abstand zwischen zwei Punkten oder wie lang die Zeit zwischen zwei Ereignissen ist. Stehen nun in (1) vor den Koordinatendifferentialen Funktionen bzw. in (2) andere Funktionen als die angegebenen, handelt es sich im Allgemeinen um eine gekrümmte Raumzeit.

Schwarzschild-Lösung

Die Schwarzschild-Metrik beschreibt die äußeren Gravitationsfelder nichtrotierender kugelsymmetrischer Körper und auch die Raumzeit eines kugelsymmetrischen Schwarzen Lochs der Masse M .¹⁾ Die Schwarzschild-Metrik hängt nicht von der Zeitkoordinate t ab und ist bezüglich der räumlichen Koordinaten kugelsymmetrisch. Explizit lässt sich ihr Linienelement wie folgt darstellen

$$ds^2 = -N(r) c^2 dt^2 + N^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3)$$

$$N(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r},$$

wobei G die Newtonsche Gravitationskonstante ist. Für große Abstände vom Stern geht die Metrikfunktion $N(r)$ gegen eins, und die Schwarzschild-Metrik geht in die Metrik des flachen Minkowski-Raums (2) über. Die Lösung ist daher asymptotisch flach. Die Schwarzschild-Metrik beschreibt exakt die relativistischen Effekte im Sonnensystem wie die Rotverschiebung, die Lichtablenkung an der Sonne, die Periheldrehung des Merkur und die gravitative Laufzeitverzögerung.

Die Schwarzschild-Metrik ist zwar eine sehr einfache Lösung der Einstein-Gleichungen, sie beschreibt aber trotzdem ein so interessantes Objekt wie ein Schwarzes Loch. Die Metrikfunktion $N(r)$ besitzt nämlich eine Nullstelle bei $r = R = 2GM/c^2$. Daher scheinen hier, am Schwarzschild-Radius, die Uhren stehen zu bleiben. Der Schwarzschild-Radius gibt gerade den Ereignishorizont des Schwarzen Lochs an. Teilchen und Licht, die einmal diesen Horizont überschritten haben, können nicht mehr nach außen entkommen. Dies lässt sich anhand von Lichtkegeln veranschaulichen (Abb. 2).

Obwohl der Horizont für Teilchen und Licht eine Einbahnstraße darstellt und auch die Metrikfunktion $N(r)^{-1}$ am Horizont unendlich wird, bleibt die Krümmung und damit die Relativbeschleunigung zweier

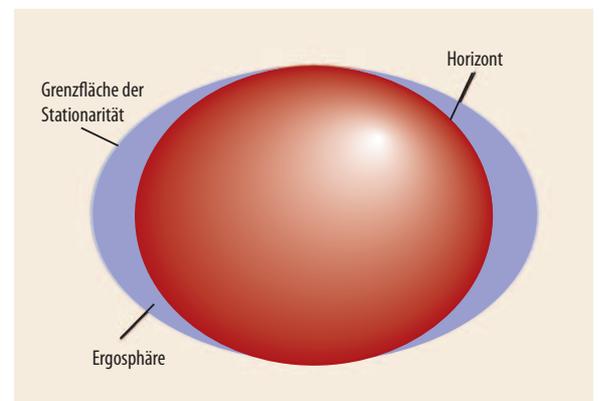


Abb. 3 Darstellung einer Kerr-Lösung mit der Grenzfläche der Stationarität, der Ergosphäre und dem Ereignishorizont.

1) Näherungsweise gilt sie auch für die Sonne oder die Erde.

frei fallender Teilchen hier endlich. Ein Astronaut, der in ein supermassives Schwarzes Loch flöge, würde nichts besonderes beim Überschreiten des Horizonts spüren. Der einzige Punkt der Raumzeit, an dem die Krümmung unendlich wird, ist – wie beim Coulomb-Potential einer Punktladung – der Ursprung. Nur dort hat die Schwarzschild-Lösung eine physikalische Singularität.

Kerr-Lösung

Die Kerr-Lösung beschreibt ein rotierendes Schwarzes Loch. Aufgrund der Rotation ist die Raumzeit nur noch stationär und axialsymmetrisch. Die Rotation äußert sich in einem Nichtdiagonalterm der Metrik, wie er auch in rotierenden Bezugssystemen sowie im Außenraum einer rotierenden Quelle auftritt. In großer Entfernung findet man nämlich für die Metrik

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \dots \right) c^2 dt^2 - \frac{4GJ}{c^3 r^3} (x dy - y dx) c dt + \dots, \tag{4}$$

deren Nichtdiagonalterm den Drehimpuls J enthält.

Topologisch gesehen sind der Ereignishorizont einer Kerr-Lösung und eine Kugeloberfläche gleich. Das bedeutet, dass beide sich z. B. durch Strecken oder Drehen ineinander umformen lassen, ohne dass sie dabei zerreißen. Die Kerr-Lösung hat so gesehen dieselben mathematischen Eigenschaften wie eine Kugeloberfläche, geometrisch ist ihr Umfang am Äquator jedoch größer als am Pol. Der Horizont zeigt damit ein ähnliches Verhalten wie ein rotierender deformierbarer Körper, den die auf ihn wirkenden Zentrifugalkräfte abplatteln (Abb. 3).

Der Horizont rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω . Doch das Schwarze Loch führt bei der Rotation auch den umgebenden Raum mit sich („frame dragging“). Ein Beobachter, der stationär in Bezug auf einen Fixpunkt im Unendlichen bleiben möchte, muss sich daher entgegen der Rotationsrichtung des Schwarzen Lochs bewegen. Dieser Mitföhreffekt der rotierenden Raumzeit²⁾ verstärkt sich in der Nähe des Schwarzen Lochs immer weiter, bis er auf der Grenzfläche der Stationarität so groß ist, dass sich ein Beobachter mit Lichtgeschwindigkeit in Gegenrichtung bewegen müsste, um relativ zu einem Fixpunkt im Unendlichen in Ruhe zu bleiben. Diese Grenzfläche der Stationarität ist auch in Abb. 3 dargestellt. Der Bereich zwischen der Grenzfläche der Stationarität und dem Ereignishorizont wird Ergosphäre genannt. Ein Beobachter innerhalb der Ergosphäre ist gezwungen, sich in der Bewegungsrichtung des Schwarzen Lochs mitzubewegen.

Eine Kerr-Lösung ist eindeutig durch ihre Masse M und ihren Drehimpuls J bestimmt. Masse und Drehimpuls können aber nicht beliebig sein, denn bei fester Masse gibt es eine obere Grenze für den Drehimpuls, den ein Schwarzes Loch haben kann, und zwar gilt (in geometrischen Einheiten mit $G = c = 1$)

$$\frac{|J|}{M^2} \leq 1. \tag{5}$$

Ein Schwarzes Loch, für das der Drehimpuls genau den maximalen Wert annimmt, heißt daher auch extremales Schwarzes Loch. Wäre der Drehimpuls größer als dieser Maximalwert, gäbe es keinen Horizont mehr, der die Singularität verbergen würde, und man hätte eine nackte Singularität vorliegen. Ein extremales Schwarzes Loch ist auch aus thermodynamischer Sicht extremal, seine Temperatur (vgl. Infokasten) entspricht nämlich gerade der am absoluten Nullpunkt.

2) Ein solcher Effekt ließ sich auch im Gravitationsfeld der Erde durch die Satelliten-Mission Gravity Probe B nachweisen.

Von Löchern zu Ringen

Betrachten wir zunächst Schwarze Löcher in höherdimensionalen Raumzeiten ($n > 4$), deren zusätzliche räumliche Dimensionen sich nicht von den bekannten drei unterscheiden. Alle $n - 1$ räumlichen Dimensionen sind dann unendlich ausgedehnt. Die Verallgemeinerung der Schwarzschild-Metrik auf n Dimensionen ist vergleichsweise einfach und wurde schon 1963 von Frank Tangherlini hergeleitet, also im selben Jahr, in dem Roy Kerr die Lösung für rotierende Schwarze Löcher in vier Dimensionen fand. Die n -dimensionale Schwarzschild-Metrik besitzt das Linienelement

$$ds_n^2 = - N(r)dt^2 + N^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega_{n-2}^2, \tag{6}$$

$$N(r) = 1 - \left(\frac{R}{r}\right)^{n-3},$$

wobei $d\Omega_{n-2}^2$ die Metrik auf der $n-2$ -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet und R den Horizontradius. Für $n = 4$ ergibt sich wieder die Schwarzschild-Metrik in Gl. (3).

Myers-Perry-Lösungen

Die n -dimensionale Verallgemeinerung der rotierenden Kerr-Lösung, 1986 von Robert Myers und Malcolm Perry konstruiert, ist schon viel interessanter

SCHWARZE LÖCHER UND THERMODYNAMIK

Schwarze Löcher lassen sich eindeutig durch die physikalischen Größen Masse M , Drehimpuls J und Ladung Q charakterisieren. Weitere Größen sind die Horizontoberfläche A , die Horizontwinkelgeschwindigkeit Ω , das elektrische Potential am Horizont Φ und die Oberflächengravitation am Horizont κ , welche die Stärke der Gravitationsbeschleunigung am Horizont angibt. Die Gesetze der Schwarzen Löcher lauten dann (in geometrischen Einheiten $G = c = 1$):

- Die Oberflächengravitation am Horizont ist konstant.
- Die Energie bleibt erhalten $dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ + \Phi dQ$.
- Die Horizontoberfläche kann nur anwachsen: $dA \geq 0$.
- $\kappa = 0$ lässt sich nicht erreichen.

Vergleicht man diese Gesetze mit den Hauptsätzen der Thermodynamik, sieht man, dass die Oberflächengravi-

tation die Rolle der Temperatur übernimmt und die Horizontoberfläche die der Entropie. Tatsächlich identifizierte Stephen Hawking [2]

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad S = \frac{A}{4}.$$

Aus dem 1. Gesetz ergibt sich dann analog zur Euler-Gleichung der Thermodynamik die Massenformel für Schwarze Löcher

$$M = \frac{\kappa}{4\pi} A + 2\Omega J + \Phi Q.$$

Die Analogie zur Thermodynamik ist nicht bloß rein formal: So konnte Hawking zeigen, wie Quantenprozesse in der Nähe des Horizonts eines Schwarzen Lochs dazu führen, dass dieses wie ein schwarzer Körper strahlt (Hawking-Strahlung), und zwar genau mit der oben angegebenen Temperatur. Durch dieses Ergebnis hat die obige formale Analogie eine physikalische Interpretation erhalten.

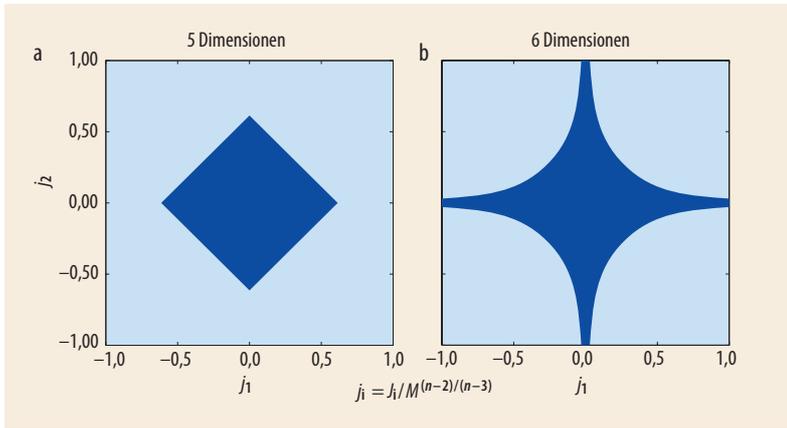


Abb. 4 Die skalierten Drehimpulse j_1 und j_2 der Myers-Perry-Lösungen für Schwarze Löcher in mehr als vier Dimensionen: Nicht-extremale Schwarze Löcher befinden sich in den dunkelblauen Bereichen, außerhalb liegen hingegen die Lösungen mit nackten Singularitäten.

[3]. Hier müssen wir nämlich zunächst bedenken, dass Schwarze Löcher in höheren Dimensionen mehr als nur einen Drehimpuls besitzen können. Um das zu verstehen, betrachten wir zunächst eine Raumzeit mit fünf Dimensionen (5D). Dort bilden die vier räumlichen Koordinaten zwei orthogonale Ebenen, in denen jeweils unabhängig voneinander rotiert werden kann. Rotierende Schwarze Löcher in 5D können folglich zwei unabhängige Drehimpulse, J_1 und J_2 , besitzen.³⁾ Geht man zu mehr als fünf Dimensionen über, so kommt mit jeder orthogonalen neuen Ebene ein weiterer unabhängiger Drehimpuls hinzu.

Die beiden Drehimpulse der Myers-Perry-Lösung in 5D können (analog zur Kerr-Lösung) relativ zu ihrer Masse nicht beliebig wachsen. In mehr als fünf Dimensionen gibt es aber nicht mehr generell eine Obergrenze für die Drehimpulse der Schwarzen Löcher. In 6D kann in einem Schwarzen Loch z. B. bei fester Masse einer der beiden Drehimpulse beliebig groß werden, wenn der andere dafür verschwindet (Abb. 4).

Die fehlende obere Schranke hat nun wesentliche Konsequenzen für diese Schwarzen Löcher. Wenn der einzige Drehimpuls immer weiter wächst, wird der Horizont immer stärker abgeplattet und nimmt schließlich die Form eines höherdimensionalen „Pfannkuchens“ an, der sich immer mehr in der Rotationsebene ausbreitet, während er sich in den anderen Dimensionen zusammenzieht. Dabei wird dieser „membranartige“ Horizont instabil, wie Myers zusammen mit Roberto Emparan vor einigen Jahren dargelegt hat [4]. Aufgrund dieser Instabilität können Verformungen des Horizonts entstehen und damit Schwarze Löcher mit eingedelltem oder welligem Horizont. Hierauf werden wir am Ende zurückkommen.

Schwarze Ringe

Der Horizont aller 4-dimensionalen Schwarzen Löcher ist topologisch gesehen eine Kugeloberfläche, S^2 , auch wenn er geometrisch gesehen deformiert ist, wie z. B. bei der Kerr-Lösung. Dies garantiert ein Theorem von Hawking [2]. Einen torusförmigen Horizont wie in Abb. 5 kann es in vier Dimensionen daher nicht geben.

³⁾ In n Dimensionen besitzen sie $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ unabhängige Drehimpulse, wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Gaußklammer bezeichnet, also die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich $(n-1)/2$ ist.

Der Horizont der Myers-Perry-Lösungen in n Dimensionen entspricht topologisch ebenfalls der Oberfläche einer Kugel, nur einer entsprechend höherdimensionalen, nämlich S^{n-2} . Im Allgemeinen muss aber in höheren Dimensionen der Horizont nicht mehr die einfache Topologie einer Kugeloberfläche haben. Tatsächlich entdeckte Emparan zusammen mit Harvey Reall vor einigen Jahren exakte Lösungen der Einstein-Gleichungen, die rotierende Schwarze Ringe in 5D beschreiben [5]. Der Horizont dieser Schwarzen Ringe hat die Topologie eines dreidimensionalen Torus ($S^2 \times S^1$), während der Horizont einer fünfdimensionalen Myers-Perry-Lösung die Topologie S^3 hat. Kombiniert man beide, ergibt sich ein „Schwarzer Saturn“, ein Schwarzes Loch umgeben von einem Schwarzen Ring [6].

Der fünfdimensionale Schwarze Ring muss sich drehen, da er sich sonst aufgrund seiner Selbstgravitation zusammenziehen würde. Im rotierenden Ring kann die Zentrifugalkraft dem entgegenwirken, sodass durch eine Balance der Kräfte eine stationäre Raumzeit entstehen kann. Der Drehimpuls muss für Schwarze Ringe daher eine Mindestgröße besitzen. Für Myers-Perry Schwarze Löcher in 5D haben wir dagegen eine Obergrenze. Betrachten wir diese Schwarzen Löcher (mit nur einem Drehimpuls) und Schwarze Ringe zusammen, so ergibt sich ein interessantes Bild: Für kleine skalierte Drehimpulse j existieren nur Schwarze Löcher. Für große skalierte Drehimpulse j existieren nur Schwarze Ringe. In einem Koexistenzbereich gibt es aber jeweils drei Schwarze Objekte, ein Schwarzes Loch und zwei Schwarze Ringe, die unterschiedliche Dicke haben [5] (Abb. 6).

Die Koexistenz von Schwarzen Löchern und Schwarzen Ringen im selben Bereich hat aus theoretischer Sicht große Bedeutung. Kerr-Lösungen sind nämlich eindeutig durch ihre Masse und ihren Drehimpuls bestimmt. Sind also Masse und Drehimpuls bekannt, so ist die Kerr-Lösung und damit die Raumzeit eindeutig festgelegt. Das besagt das Eindeigkeitstheorem in 4D. In 5D gilt das Eindeigkeitstheorem aber nicht mehr. Denn hier gibt es einen Bereich mit drei verschiedenen Schwarzen Objekten, die alle dieselbe Masse und denselben Drehimpuls haben. Es reicht also nicht aus, Masse und Drehimpuls zu kennen, um die Raumzeit eindeutig festzulegen.

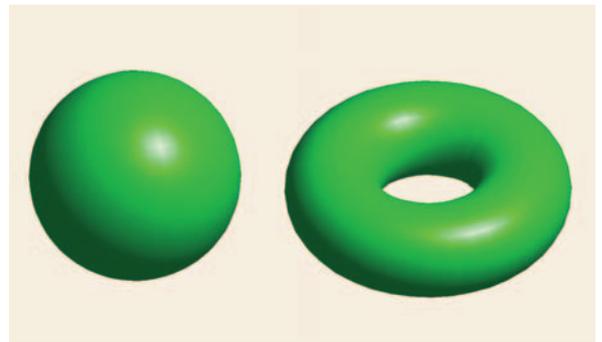


Abb. 5 Die Topologien einer Kugeloberfläche S^2 und eines Rings bzw. eines Torus ($S^1 \times S^1$) sind verschieden; sie lassen sich nicht durch Deformation stetig ineinander überführen.

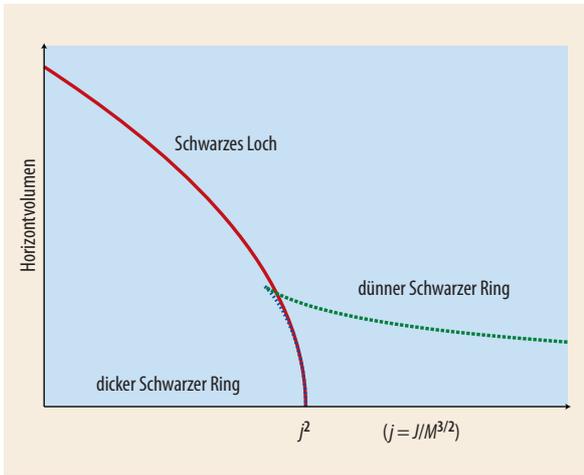


Abb. 6 Das Horizontvolumen als Funktion des skalierten Drehimpulses j^2 für Myers-Perry-Schwarze Löcher und Schwarze Ringe [5].

Die drei Schwarzen Objekte unterscheiden sich aber in ihren übrigen physikalischen Eigenschaften. Insbesondere haben sie ein unterschiedliches Horizontvolumen A . (In 5D ist die „Horizontoberfläche“ A dreidimensional.) Dabei ist A am größten für den dünnen Schwarzen Ring. Er hat also die größte Entropie. Denn die Gesetze der Mechanik Schwarzer Löcher gelten in analoger Weise auch in höheren Dimensionen.

Kompakte Extradimensionen

Bisher haben wir alle räumlichen Dimensionen gleich behandelt und sie als unendlich ausgedehnt und somit auch beobachtbar angenommen. Doch da sich Extradimensionen bislang nicht beobachten ließen, bieten sich zwei Wege an: Entweder folgt man Kaluza und Klein und nimmt an, dass die Extradimensionen klein und kompakt sind, oder man geht wie im Randall-Sundrum-Modell [7] davon aus, dass von den vier fundamentalen Wechselwirkungen nur die Gravitation in die Extradimensionen eindringt, während Teilchen und Licht auf die 4D-Raumzeit beschränkt sind.

Im Folgenden betrachten wir höherdimensionale Raumzeiten mit kompakten Dimensionen. Auch hier gibt es neben Schwarzen Löchern andere Schwarze Objekte, die sich durch die Topologie ihres Horizonts unterscheiden. Wir beschränken nun exemplarisch auf den einfachsten Fall, nämlich Schwarze Objekte in einer n -dimensionalen Raumzeit mit nur einer kompakten Dimension. Dabei lässt sich die kompakte Dimension als ein Liniensegment mit identifizierten Endpunkten auffassen, topologisch also als Kreis (S^1).

Schwarze Löcher in der Falle

Die Ausdehnung eines Schwarzen Lochs in der Richtung der kompakten Dimension ist zwangsläufig beschränkt. Daher heißen solche Schwarzen Löcher auch eingesperrte (*caged*) Schwarze Löcher [8]. Eingesperrte Schwarze Löcher, deren Horizont viel kleiner als die Länge der kompakten Dimension ist, entsprechen im

Wesentlichen Schwarzschild-Lösungen in n Dimensionen, wenn sie statisch sind, da sie kaum den Einfluss der endlichen Größe der kompakten Dimension spüren. Wächst jedoch der Horizontradius relativ zur Länge der kompakten Dimension, so spüren die Schwarzen Löcher schließlich, dass sie eingesperrt sind und werden entsprechend deformiert (Abb. 7) [9].

Die endliche Größe der kompakten Dimension hat zur Folge, dass die eingesperrten Schwarzen Löcher nicht beliebig groß werden können. Bei einer kritischen Größe müsste sich nämlich der Horizont der eingesperrten Schwarzen Löcher in der kompakten Richtung selbst berühren. Das bedeutet aber, dass sich bei dieser kritischen Größe die Topologie des Horizonts ändern müsste. Ein Übergang zu anderen Schwarzen Objekten müsste auftreten, doch zu welchen?

Schwarze Strings

Neben eingesperrten Schwarzen Löchern gibt es in einer Raumzeit mit einer kompakten Dimension auch Schwarze Strings. Hier ist der Horizont nicht in der kompakten Dimension lokalisiert, sondern er umhüllt diese. Die einfachsten Schwarzen Strings hängen nicht von der Koordinate der kompakten Richtung ab. Sie heißen darum gleichförmige (*uniform*) Schwarze Strings (Abb. 8).

Gleichförmige Schwarze Strings gibt es für alle Massen. Sie sind aber nur für große Massen stabil. Für kleine Massen tritt eine Instabilität auf, die Ruth Gregory und Raymond Laflamme entdeckt haben [10]. Da gravitierende Materie die Tendenz hat, sich zusammenzuballen (Jeans-Instabilität), ist es für einen langen gleichförmigen String vorteilhaft, eine Inhomogenität zu entwickeln [8]. Für einen kurzen String dagegen wäre die Ausbildung solch einer Inhomogenität energetisch ungünstig. Gregory und Laflamme vermuteten daher, dass instabile Schwarze Strings in Schwarze Löcher zerfallen würden, da diese eine höhere Entropie haben. Gary Horowitz and Kengo Maeda argumentierten dagegen, dass sich der Horizont nicht in endlicher Zeit abschnüren könnte. Sie erwarteten daher, dass aus den Schwarzen Strings neue Lösungen

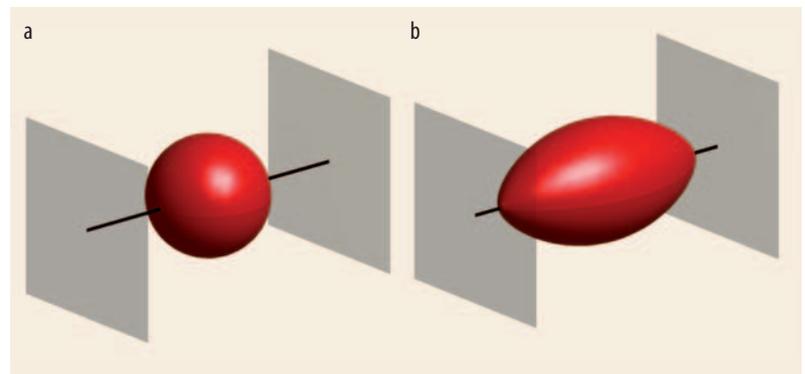


Abb. 7 Der Horizont eingesperrter Schwarzer Löcher in einer Raumzeit mit einer kompakten Dimension: Ein „kleines“ Schwarzes Loch ist beinahe kugelsymmetrisch (a), ein „großes“ hingegen deformiert (b). Die kompakte

Dimension verläuft längst der Symmetrieachse; ihre räumliche Periode ist durch die grauen Flächen angedeutet. Die Zeit- und eine der ausgedehnten Raumdimensionen sind unterdrückt.

4) Die Einsteinschen Gravitationsgleichungen sind ein sehr kompliziertes, nichtlineares gekoppeltes System von partiellen Differenzialgleichungen, das sich im Allgemeinen nicht analytisch lösen lässt. Zum Auffinden der ungleichförmigen Schwarzen Strings ist es notwendig, auf numerische Methoden zurückzugreifen.

würden, die nicht mehr gleichförmig wären, sondern von der kompakten Koordinate abhängig wären: ungleichförmige (*nonuniform*) Schwarze Strings. Tatsächlich wurden bald darauf solche ungleichförmigen Schwarzen Strings gefunden [9, 11] (Abb. 8).⁴⁾ Ungleichförmige Schwarze Strings können aber nicht den Endzustand der Gregory-Laflamme-Instabilität darstellen, weil sie zu schwer sind und eine zu geringe Entropie besitzen (jedenfalls, wie es Rechnungen zeigen, solange die Zahl der Dimensionen kleiner als 13 ist). Folglich sollten Schwarze Löcher den Endzustand der Instabilität bilden [8].

Der Lösungszweig der ungleichförmigen Schwarzen Strings beginnt beim kritischen gleichförmigen Schwarzen String, an dem die Gregory-Laflamme-Instabilität einsetzt. Entlang des Lösungszweiges wächst die Deformation der Schwarzen Strings. Es bildet sich eine „Taille“, die sich immer weiter einschnürt. Im Grenzfall sollte der String in der Mitte auseinanderbrechen. Das daraus resultierende Schwarze Objekt hätte dann eine andere Horizonttopologie, nämlich die eines Schwarzen Lochs [8].

Änderung der Horizonttopologie

Wir haben nun aus zwei Richtungen kommend jeweils argumentiert, dass im Schwarzen Loch-Schwarzen String-System bei einer kritischen Lösung ein Übergang auftreten sollte, an dem sich die Topologie des Horizonts ändert. Hier sollten der Lösungszweig der eingespernten Schwarzen Löcher und der Lösungszweig der ungleichförmigen Schwarzen Strings aufeinander treffen. Um das Auftreten eines solchen Übergangs zu sehen, betrachten wir die physikalischen Eigenschaften der eingespernten Schwarzen Löcher und der ungleichförmigen Schwarzen Strings. Obwohl die numerischen Daten noch unvollständig sind, haben wir bereits eine deutliche Evidenz dafür, dass bei der kritischen Lösung physikalische Größen wie Masse, Entropie oder Temperatur übereinstimmen.

Was passiert nun aber mit der Singularität, wenn sich die Topologie des Horizonts ändert? Tritt bei der kritischen Lösung eine nackte Singularität auf? Um diese Fragen beantworten zu können, muss man die Lösung der Schwarzen Strings innerhalb des Horizonts betrachten. Unsere Rechnungen deuten stark darauf hin, dass beim Übergang tatsächlich die Singularität den Horizont erreicht. Das Auftreten einer nackten Singularität bedeutet allerdings, dass dort die Kausalität verletzt werden könnte und physikalische Vorhersagen unmöglich würden (Penrosesche kosmische Zensur [12]).

Für das System Schwarze Löcher-Schwarze Strings haben wir gesehen, dass es überzeugende Evidenz dafür gibt, dass ein Übergang zwischen beiden Lösungszweigen existiert, wo sich bei einer kritischen Lösung die Topologie des Horizonts von einer Kugel zu einem Ring ändert. Voraussetzung für die Existenz dieses Systems ist dabei die Gregory-Laflamme-Instabilität, die überhaupt erst auf den Lösungszweig der ungleichförmigen Schwarzen Strings führt.

Eine Instabilität tritt aber auch bei Myers-Perry-Lösungen auf. Auch hier erwartet man einen Lösungszweig von „ungleichförmigen“ Schwarzen Löchern, d. h. solchen mit „eingedelltem“ Horizont. Was wird aus diesen, wenn die Deformation immer weiter anwächst, also die „Delle“ in der Mitte immer tiefer wird? Emparan et al. haben kürzlich in Analogie zum obigen System geschlossen, dass sich der Horizont bei einer kritischen Lösung gerade in der Mitte selbst berühren und dann reißen wird [13]. Aus einem Schwarzen Loch würde dann ein Schwarzer Ring (Abb. 9). Weitere Instabilitäten können dann auf „wellige“ Schwarze Löcher führen und diese auf Schwarze Saturne und andere Schwarze Objekte. Die Überprüfung dieses spannenden Szenarios stellt eine große Herausforderung dar.

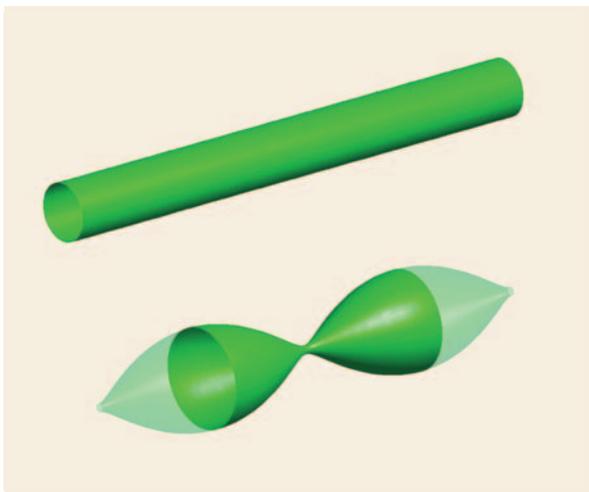


Abb. 8 Einbettung des Horizonts eines gleichförmigen Schwarzen Strings (oben) und eines ungleichförmigen Schwarzen Strings (unten). Die kompakte Dimension ist längst der Symmetrieachse, die Zeit- und eine der ausgedehnten Raumdimensionen sind unterdrückt.

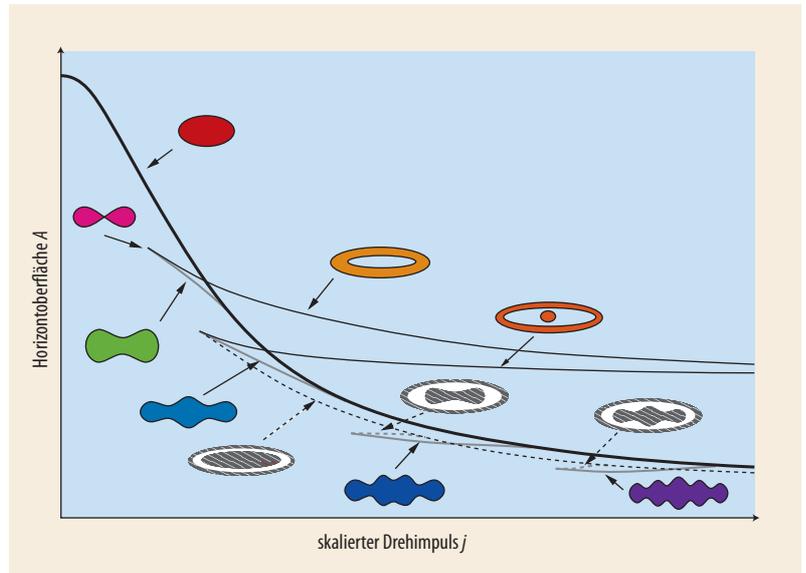


Abb. 9 In $n \geq 6$ Dimensionen ergibt sich als Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen eine große Vielfalt an „Schwarzen Objekten“ [13].

Mikroskopische Schwarze Löcher

Berücksichtigt man, dass ein Schwarzes Loch auch elektrische Ladung tragen kann, so ergeben sich bei den höherdimensionalen rotierenden Schwarzen Löchern weitere interessante Phänomene. Z. B. kann sich der Horizont im Vergleich zum Drehimpuls in die „falsche“ Richtung drehen, das Schwarze Loch also eine Gegenrotation aufweisen [14]. Verstehen lässt sich dieses Phänomen, wenn man bedenkt, dass das elektro-magnetische Feld auch Drehimpuls trägt. Wenn sich ein großer negativer Bruchteil des Gesamtdrehimpulses im elektromagnetischen Feld hinter dem Horizont befindet, so kann dieser bewirken, dass sich der Horizont in seine, also in die „falsche“ Richtung dreht. Für ein astrophysikalisches Schwarzes Loch spielt die Ladung jedoch keine Rolle, als makroskopisches Objekt ist es neutral. Für mikroskopische Schwarze Löcher kann die Ladung aber wichtig sein.

Falls zusätzliche Dimensionen tatsächlich existieren, könnten der LHC (Large Hadron Collider) am CERN unter Umständen mikroskopische Schwarze Löcher erzeugen [15]. Die Produktion und der anschließende Zerfall solcher Schwarzer „Mikrolöcher“ hätte charakteristische Signaturen zur Folge, über die sich diese dann in den Teilchendetektoren identifizieren lassen könnten. Diese Aussicht gibt der Untersuchung höherdimensionaler Schwarzer Löcher und ihrer Eigenschaften noch einen besonderen Anreiz. Denn solche Beobachtungen hätten einen dramatischen Effekt auf unser Verständnis der Raumzeitstruktur des Universums.

*

Wir danken herzlich R. Genzel (MPE München) für Abb. 1, sowie R. Emparan (ICREA Barcelona), T. Harmark (NBI Kopenhagen), V. Niarchos (CPHT Paris), N. Obers (NBI Kopenhagen), und M. Rodriguez (U Barcelona) für Abb. 9. B. Kleihaus dankt dem DLR und der DFG für Unterstützung, F. Navarro-Lérida dem Ministerio de Educación y Ciencia, Espana.

Literatur

- [1] R. Genzel, *Physik Journal*, Juli/August 2003, S. 45
- [2] S. Hawking und G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973)
- [3] R. C. Myers und M. J. Perry, *Annals Phys.* **172**, 304 (1986)
- [4] R. Emparan und R. C. Myers, *JHEP* **0309**, 025 (2003)
- [5] R. Emparan und H. S. Reall, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 101101 (2002)
- [6] H. Elvang und P. Figueras, *JHEP* **05**, 050 (2007)
- [7] L. Randall, *Verborgene Universen*, Fischer, Frankfurt (2006)
- [8] B. Kol, *Phys. Rep.* **422**, 119 (2006); T. Harmark, V. Niarchos und N. A. Obers, *Class. Quant. Grav.* **24**, R1 (2007)
- [9] H. Kudoh und T. Wiseman, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 161102 (2005)
- [10] R. Gregory und R. Laflamme, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2837 (1993)
- [11] B. Kleihaus, J. Kunz und E. Radu, *JHEP* **06**, 016 (2006), B. Kleihaus und J. Kunz, arXiv:0710.1726 [hep-th]
- [12] R. Penrose, in: R. Wald (Hrsg.), *Black Holes and Relativistic Stars*, University of Chicago Press, Chicago (1994)
- [13] R. Emparan, T. Harmark, V. Niarchos, N. A. Obers und M. J. Rodriguez, arXiv:0708.2181 [hep-th]
- [14] J. Kunz und F. Navarro-Lérida, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 081101 (2006)
- [15] S. Dimopoulos und G. Landsberg, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 161602 (2001), P. Kanti, *Int. J. Mod. Phys. A* **19**, 4899 (2004)

DIE AUTOREN

Jutta Kunz (FV Gravitation und Relativitätstheorie) ist seit 1993 Professorin für Feldtheorie in Oldenburg. Sie studierte in Gießen und Seattle und war PostDoc in Los Alamos, Gießen, Amsterdam (NIKHEF) und Utrecht. Ihre Forschungsarbeiten haben sie von der Kernphysik (Promotion) über die Hadronenphysik und Teilchenphysik zur Gravitation geführt. Neben Forschung und Lehre widmet sich Jutta Kunz ihrer Familie. Im Urlaub zieht es sie zum Wandern und Skilaufen in die Berge.



Francisco Navarro-Lérida studierte Physik an der Universität von Madrid, wo er 2004 mit einer Arbeit über die Theorie Schwarzer Löcher promovierte. Zur Zeit lehrt er am Nuclear Physics Department der Universität von Madrid. Neben der Forschung und Lehre genießt er es, seine Zeit mit seiner Frau und den beiden Kindern zu verbringen.



Burkhard Kleihaus (FV Teilchenphysik) promovierte 1991 an der Carl-von-Ossietzky Universität Oldenburg. Nach einem Postdoc-Aufenthalt in Maynooth (Irland) lehrte er von 1999 bis 2003 am University College in Dublin. Er habilitierte sich 2001 in Theoretischer Physik an der Universität Oldenburg.

