

Eine „thermodynamische Elektrodynamik“

Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen folgen direkt aus der Lokalität, der Ladungserhaltung und der Thermodynamik.

Mario Liu

Es gibt eine wenig bekannte, thermodynamische Sichtweise der makroskopischen Maxwell-Theorie. Sie hilft, der mikroskopischen Version der Theorie eine ebenso zuverlässige und logisch konsistente makroskopische gegenüberzustellen.

Die eigentliche, mikroskopische Maxwell-Theorie des Elektromagnetismus ist von einer Stringenz und Einfachheit, dass einigen von uns beim Anblick der Gleichungen die göttliche Verordnung: „Es werde Licht!“ in den Sinn kommt. Der Leumund der makroskopischen Maxwell-Theorie ist damit nicht vergleichbar. Weit weniger Physiker wären bereit, in ihr ein ähnlich tragendes Fundament der Physik zu sehen. Am Anfang seiner Elektrodynamik-Vorlesung behauptet ein Kollege regelmäßig, die zwei zusätzlichen Felder H und D hätten Experimentatoren erfunden – und dies nur, damit sich Theoretiker ärgern –, um fortan ganz ohne sie auszukommen.

Nun, auch wenn diese These überspitzt ist, verbalisiert sie doch ein verbreitetes Unbehagen. Dem Anfänger – und vermutlich nicht nur ihm – kommt die makroskopische Maxwell-Theorie dezent diffus, einige Aspekte gar diskret obskur vor. Wie schlüssig sauber nehmen sich dagegen doch die Mikroversion oder die Quantenmechanik aus! Die ärgerliche Schwammigkeit verwandelt sich in zeitweise harte Widersprüche – bei mir mit Vorliebe in der Nacht vor der Vorlesung, bei der es doch gilt, die Folgerichtigkeit der theoretischen Physik vor hellwachen Studenten zu vertreten.

Dem Augenschein nach wohl begründet ist die (eigentlich verwandte) These, dass von den vier makroskopischen Feldern nur E und B fundamental sind, weil man sie aus Mittelung mikroskopischer Felder bekommt, während $D = E + P$ und $H = B - M$ zusätzliche Information über die Polarisation P und Magnetisierung M enthalten. Damit sind sie Teil des Vielkörpersystems und stellen die viel komplexeren Felder dar. Diese Meinung würden viele unterschreiben – obwohl vielleicht die eine oder andere Implikation als störend empfunden wird. Zum Beispiel scheint dieser offenbar wichtige Unterschied kaum Konsequenzen zu haben, und je nach Orientierung des Feldes zur System-Oberfläche ist entweder E oder D stetig zum äußeren Feld. Tatsächlich ist die Ansicht, dass E das gemittelte mikroskopische Feld ist, nicht unproblematisch und führt bei weitergehenden Überlegungen zu Widersprüchen. Außerdem gibt es gute

Gründe, wie wir sehen werden, D und B als die eigentlich einfachen Felder anzusehen.

Dissipation mag ein weiterer Grund für das allgemeine Unbehagen sein. Sie ist ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal zwischen mikro- und makroskopischen Theorien: Mikroskopische Bewegungsgleichungen sind immer reversibel, sie kennen keine Dissipation; makroskopische Bewegungsgleichungen sind immer irreversibel und ohne Dissipation nicht vollständig.¹⁾ Bei der Maxwell-Theorie wird die Dissipation üblicherweise durch den Imaginärteil der dielektrischen Funktion ϵ und der Permeabilität μ beschrieben. Das erscheint verbesserungswürdig, denn die Aufteilung in Real- und Imaginärteil ist ungeeignet für starke Felder, wenn ϵ , μ von den Feldern abhängen, und D , H nicht mehr proportional zu E , B sind. Es ist auch nicht klar, weshalb der dissipative Anteil immer imaginär sein muss.

Wir werden in diesem Artikel die thermodynamische Grundlage der Maxwell-Theorie genauer anschauen, und unter anderem feststellen:

► Die Struktur der makroskopischen Maxwell-Gleichungen folgt direkt aus Lokalität, Ladungserhaltung und der Thermodynamik; ein Bezug zur Mikroskopie, der immer subtil ist, muss dabei nicht hergestellt werden.

► Es kommt auf das Verhalten eines Terms unter Zeitinversion an, ob er dissipativ ist. Das gilt auch für starke Felder, wenn ϵ , μ nicht konstant sind. Unter bestimmten Voraussetzungen (z. B. wenn das Medium rotiert), wird die Dissipation durch reelle Anteile von ϵ und μ beschrieben.

Auch ein guter Physikstudent muss nach den Kursvorlesungen den Eindruck haben, dass Elektromagnetismus und Thermodynamik, zwei Gebiete der klassischen Physik, nicht viel miteinander zu tun haben. Zum Beispiel wird der Begriff „Entropie“ in den 700 Seiten von Jacksons Klassiker über Elektrodynamik nie erwähnt. Dabei sind thermodynamische Überlegungen, die auf Entropie und Wahrscheinlichkeit beruhen, so allgemein, dass man eigentlich als selbstverständlich annehmen müsste, dass diese auch für die makroskopische Maxwell-Theorie relevant sind. Dass dies so ist, sieht man schon an den großen Erfolgen, die London, Ginzburg und Landau bei der Feldberechnung in und um Supraleiter erzielt haben.²⁾ Tatsächlich sind einfache thermodynamische Überlegungen ausgesprochen nützlich für das Verständnis der makroskopischen

1) In der Teilchenphysik gibt es Gleichungen, die nur unter CPT-Umkehr invariant sind. Die entsprechenden Makrogleichungen – falls es sie denn gibt – brechen dann diese Invarianz.

2) Der Tatsache, dass Magnetfelder in Supraleiter nur ein kleines Stückchen eindringen, wird durch eine zusätzliche Feldgleichung Rechnung getragen, die von London (auf Grund von Einteilchen-Überlegungen) aufgestellt wurde. Diese Gleichung haben Ginzburg und Landau verallgemeinert und auf ein allgemeingültiges, thermodynamisches Fundament gestellt.

Prof. Dr. Mario Liu,
Institut für Theoretische Physik, Universität Tübingen, Auf der Morgenstelle 14, 72076 Tübingen

Elektrodynamik. Es ist bedauerlich, dass diese in Kursvorlesungen nur selten vertreten werden und deshalb nicht Gemeingut aller Physiker sind.

Nachdem sich das vorliegende Thema um vier Differentialgleichungen dreht, liegt es auf der Hand, dass man im Text mehr Formeln als üblich sieht. Ich bitte aber den Leser, sich nicht von ihrem Anblick abschrecken zu lassen. Denn erstens bleibt die Algebra elementar und wird genau erklärt, und zweitens bringt im gegebenen Zusammenhang häufig eine kurze Formel den Sachverhalt schnell auf den Punkt, wo viele Worte nur Verwirrung stiften. Andererseits hat der Text durchaus eine gewisse Informationsdichte, und es ist vermutlich empfehlenswert, dass man nicht zu schnell grübelnd hängen bleibt – besser ist es allemal, sich erst einen schnellen Überblick zu verschaffen, um dann den Artikel ein zweites Mal zu lesen. (Fußnoten und Infokästen enthalten Argumente und Umformungen, die beim ersten Lesen übersprungen werden können.)³⁾

**Bekannte Argumente hinterfragt
Übliche Herleitung**

Die konzeptionelle Trennung der Maxwell-Gleichungen in eine mikroskopische Version mit zwei Feldern und eine makroskopische mit vier sowie die Herleitung der zweiten aus der ersten verdanken wir Lorentz. Die Herleitung kann man in zwei getrennten Schritten ausführen, der erste ist ausschließlich mikroskopische Umformung, erst der zweite überschreitet den Rubikon zur Makroskopie und Irreversibilität. Die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \dot{\mathbf{E}} &= c \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{j}, & \dot{\mathbf{B}} &= -c \nabla \times \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1) \quad (2)$$

Wir teilen die Ladungs- und Stromdichte in zwei Anteile, $\rho = \rho_1 + \rho_2$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$ – üblicherweise wird die eine als frei und die andere als gebunden angenommen, obwohl das formal keine Rolle spielt. Zwei Felder werden eingeführt, um ρ_2 , \mathbf{j}_2 zu eliminieren: $\rho_2 = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ und $\mathbf{j}_2 = -(\dot{\mathbf{P}} + c \nabla \times \mathbf{M})$. Das ist nicht eindeutig, aber immer möglich, wenn ρ_2 erhalten ist. (Aus der Definition der Felder folgt sofort $\dot{\rho}_2 + \nabla \cdot \mathbf{j}_2 = 0$.) Wenn wir zwei weitere Felder einführen, $\mathbf{H} \equiv \mathbf{B} - \mathbf{M}$ und $\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + \mathbf{P}$, können wir wiederum \mathbf{P} , \mathbf{M} eliminieren und haben zudem die Gleichungen in die „makroskopische“ Form gebracht:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_1, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \dot{\mathbf{D}} &= c \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{j}_1, & \dot{\mathbf{B}} &= -c \nabla \times \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (3) \quad (4)$$

Die beschriebene Algebra kann man in Ruhe nachvollziehen, wichtiger ist die Einsicht, dass Gln. (3, 4) keineswegs makroskopisch sind – sie sind identisch mit den Ausgangsgleichungen, nur komplizierter geschrieben.

Im nächsten Schritt werden die vier Gleichungen über einen kleinen Raumbereich, Korn genannt, Korn für Korn räumlich gemittelt (englisch: „coarse-grained“). Und weil die Gleichungen linear sind, behalten sie ihre Form bei. Nun können wir Gln. (3, 4) auch makroskopisch interpretieren: \mathbf{E} und \mathbf{B} sind offensichtlich die gemittelten mikroskopischen Felder; \mathbf{D} , \mathbf{H} sind komplizierter und werden dadurch verstanden, dass man \mathbf{P} , \mathbf{M} in führender Ordnung mit der elektrischen und magnetischen Dipolmomentdichte identifiziert. Das fördert viel Information zu Tage, wovon hier allein interessant ist, dass \mathbf{D} , \mathbf{H} Funktionen von \mathbf{E} , \mathbf{B} sind – paarweise proportional für ausreichend

schwache Felder, mit einer zeitlich nichtlokalen Abhängigkeit (d. h., \mathbf{D} , \mathbf{H} hängen auch von \mathbf{E} , \mathbf{B} ein Weilchen zurück ab). Im Fourier-Raum lässt sich das sehr einfach ausdrücken: $\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu(\omega)$, wo ε , μ Funktionen der Frequenz ω sind. Diese zwei „linearen konstitutiven Relationen“ sind sehr wichtig: Sie legen \mathbf{D} , \mathbf{H} fest, heben deren erwähnte Nicht-Eindeutigkeit auf, schließen das Gleichungssystem, und führen, weil ε , μ als komplex angenommen werden, Dissipation ein.

Gemittelte Mikroskopie versus Makroskopie

Aus allgemeinen Überlegungen wissen wir, dass der Realteil von $\varepsilon(\omega)$ eine gerade und der Imaginärteil eine ungerade Funktion von ω ist. Beschränken wir uns auf langsame Vorgänge, sind die Frequenzen klein, und wir können $\varepsilon(\omega)$ danach entwickeln. In linearer Ordnung gilt $\mathbf{D} = \bar{\varepsilon}(1 + i\omega\beta\bar{\varepsilon})\mathbf{E}$, wo $\bar{\varepsilon}$, β frequenzunabhängige Material-Parameter sind. (Wir konzentrieren uns hier auf Isolatoren.) Im Zeitraum, mit \mathbf{D} , $\mathbf{E} \sim e^{-i\omega t}$, schreibt sich diese konstitutive Relation als

$$\mathbf{D} = \bar{\varepsilon}(\mathbf{E} - \beta \dot{\mathbf{E}}). \quad (5)$$

Das ist eine hübsche, kurze, aussagekräftige Formel: Zum einen wird die zeitliche Nichtlokalität (für kleine Frequenzen) auf die Abhängigkeit von $\dot{\mathbf{E}}$ reduziert, und zum zweiten sieht man direkt, dass dieser im Fourierraum imaginäre Term dissipativ ist, weil er offensichtlich die gleiche Rolle spielt wie der zu $\dot{\mathbf{x}}$ proportionale Geschwindigkeitsterm in der Pendelgleichung, in der der Kraftterm proportional zu \mathbf{x} ist. Man kann sich leicht überlegen, dass thermodynamische Stabilität $\bar{\varepsilon} > 0$ verlangt, und β positiv sein muss, damit elektromagnetische Wellen gedämpft (und nicht verstärkt) werden.

Die Maxwell-Gleichungen (1, 2) sind zeitungkehrinvariant. Für sie gilt, dass falls $\mathbf{E}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ eine Lösung ist, auch $\mathbf{E}(-t)$, $-\mathbf{B}(-t)$ eine ist. Diese Symmetrie zeigt, \mathbf{E} ist (wie ρ) gerade unter Zeitumkehr, während \mathbf{B} (wie \mathbf{j}) ungerade ist. An dieser Eigenschaft ändert eine Mittelung nichts, denn von einem räumlich schnell variierenden \mathbf{E} -Feld bleibt nach einer Mittelung die Enveloppe, die aber die gleiche Zeitumkehr-Parität wie das ursprüngliche Feld besitzt. Also ist \mathbf{E} auch makroskopisch gerade. Da man in Gl. (5) den geraden Term \mathbf{E} mit dem ungeraden $\dot{\mathbf{E}}$ mischt, zerstört diese konstitutive Relation die Reversibilität der makroskopischen Maxwell-Gleichungen und beschreibt Dissipation.

Soweit ist es nicht mehr als eine Auffrischung dessen, was jeder Physiker weiß, oder zur Diplom-Prüfung genauer wusste. Der Punkt ist aber, dass Gl. (5) nicht richtig sein kann. Diese Formel beinhaltet für die Anfangsbedingungen \mathbf{D} , $\mathbf{E} = \text{konst.}$ die vollkommen unphysikalische, explodierende Lösung $\mathbf{E}(t) \sim \exp(t/\beta\bar{\varepsilon}) \equiv \exp(t/\tau)$ und $\mathbf{D}(t) = \text{konst.}$ Da ist es gut, dass die konstitutive Relation zulässt, invertiert gelesen zu werden, $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\varepsilon(\omega)$. Bis zur linearen Ordnung gilt dann $\mathbf{E} = (1/\bar{\varepsilon} - i\omega\beta)\mathbf{D}$, im Zeitraum heißt es nun

$$\mathbf{E} = \mathbf{D}/\bar{\varepsilon} + \beta \dot{\mathbf{D}}. \quad (6)$$

Jetzt hängt \mathbf{E} von \mathbf{D} , $\dot{\mathbf{D}}$ ab. Und es gibt zwar noch eine Lösung $\mathbf{D} \sim \exp(-t/\tau)$, aber diese relaxiert gegen Null und ist gutmütig. Die obige Frequenz-Entwicklung beschränkt die Gültigkeit von Gln. (5, 6) auf kleine Frequenzen. Auf dieser Skala verschwindet eine relaxierende, aber nicht eine explodierende Mode. Nur Gl. (6) kann richtig sein. Wegen einer vollkommen analo-

3) Es gelte das einfache rationale Maßsystem, von Heaviside und Lorentz erdnen, bei dem die sonst allgegenwärtigen ε_0 , μ_0 , $1/4\pi$ nicht auftreten. In diesem System ist die Vakuumpermeabilität 1 und alle Felder haben die gleiche Einheit, Quadratwurzel der Energiedichte, also $(\text{J/m}^3)^{1/2}$ in MKS and $(\text{erg/cm}^3)^{1/2}$ in cgs. Man kann jederzeit z. B. zu MKSA ($\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}, \dots$) übergehen: $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}/\mu_0$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}\sqrt{\mu_0}$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}/\sqrt{\varepsilon_0}$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}\sqrt{\varepsilon_0}$, und $\dot{\mathbf{Q}}_e = \dot{\mathbf{Q}}_e\sqrt{\varepsilon_0}$, $\dot{\mathbf{j}}_e = \dot{\mathbf{j}}_e\sqrt{\varepsilon_0}$.

gen Instabilität, $H \sim e^{t/\mu\alpha}$, lautet die magnetische konstitutive Relation

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\bar{\mu} + \alpha \dot{\mathbf{B}}. \quad (7)$$

Gl. (6) zeigt aber, dass D die einfache und E die zusammengesetzte Größe ist. Sie suggeriert ein gerades D und ein nicht-eindeutiges E unter Zeitumkehr. In der Tat kann man D als gerade annehmen, denn die identischen Umformungen und anschließende Mittelung, die zu D, H geführt haben, verändern keine Symmetrie. Also ist D (wie Q_2) gerade und H (wie j_2) ungerade. Nun gibt es ein schlimmes Problem: Wenn sowohl D als auch E gerade sind, und H, B ungerade, müssen α, β in Gln. (6, 7) verschwinden – und mit ihnen eine Kern-Ingredienz der Makroskopie, die Irreversibilität. Wir folgern, dass irreversible konstitutive Relationen nicht kompatibel sind mit der obigen Herleitung, die im wesentlichen aus einer Mittelung besteht.⁴⁾ Andererseits steht, durch unzählige Experimente verifiziert, außer Zweifel, dass sowohl die konstitutiven Relationen als auch die Maxwell-Gleichungen richtig sind. Es ist nur die Herleitung, die neu durchdacht werden muss – ebenso die Folgerung, dass E immer das einfache, gemittelte mikroskopische Feld sei und D die ganze Komplexität des Vielteilchensystems in sich birge.

Die räumliche Mittelung könnte im Prinzip durch eine statistische ersetzt werden, aber das ist nicht modellunabhängig möglich und bei stärker wechselwirkenden Systemen zumindest technisch aufwändig. Da ist der thermodynamische Zugang hilfreich, den wir nun näher betrachten werden. Er agiert ausschließlich auf der makroskopischen Ebene und leitet die entsprechenden Bewegungsgleichungen (einschließlich der Maxwell-Theorie) auf Grund von allgemeinen Prinzipien her, ohne je von den mikroskopischen auszugehen. Das ist eine effiziente Vorgehensweise, weil sich die Makrodynamik im Allgemeinen deutlich von der Mikrodynamik unterscheidet: Der Energie-Transfer kann durch klassische, quantenmechanische, geladene oder grüne Marsteilchen bewerkstelligt werden, die Temperatur gehorcht immer der Diffusionsgleichung (solange keine spontan gebrochene Phasen-Symmetrien vorliegt). Die Maxwell-Gleichungen, bei denen sich Makro- und Mikroversionen ähneln, bilden da eine der wenigen Ausnahmen. Das liegt daran, dass die gemeinsame Struktur (wie wir sehen werden) durch Lokalität, Erhaltungssätze und Lorentz-Invarianz festgelegt ist; es ist kein Hinweis dafür, dass die einen die räumliche Mittelung der anderen seien.

Bei dem thermodynamischen Zugang spielt die Entropie eine wichtige Rolle. Die statischen Maxwell-Gleichungen folgen aus der Maximierung der Entropie im Gleichgewicht. Außerhalb dieses folgen dann aus der Betrachtung der Entropie-Produktion die nichtlinearen, irreversiblen Maxwell-Gleichungen, die auch für bewegte Medien gültig sind (wofür Gln. (6, 7) den linearisierten Spezialfall für ruhende Medien darstellen). Dabei ist bemerkenswert, dass die Feldvariablen ausdrücklich D, B sind: Gln. (3) sind Zwangsbedingungen für D, B und Gln.(4) ihre Bewegungsgleichungen – wobei Gln. (6, 7) die „Ströme“ E, H spezifizieren; auch die thermodynamische Energie hat bekanntlich D, B als Variable.

Bewegtes Medium

Gln. (6, 7) gelten wie gesagt nur für Systeme in Ruhe. Sie lassen sich aber auf rotierende Medien verallge-

meinern, wenn wir dem im Folgenden dargelegten, in seiner Essenz bereits thermodynamischen Gedankengang folgen. Im Ruhesystem ist die Dissipation proportional zu $\dot{\mathbf{B}}$, weil $\dot{\mathbf{B}} = 0$ Gleichgewicht bedeutet, und $\dot{\mathbf{B}} \neq 0$ ein Maß für die Entfernung vom Gleichgewicht darstellt. In einem rotierenden System ist Gleichgewicht, wenn Feld und Medium⁵⁾ gemeinsam rotieren, $\dot{\mathbf{B}} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B} = 0$ (wo $\boldsymbol{\Omega}$ die Rotationsgeschwindigkeit ist). Die Dissipation ist wieder durch die Entfernung vom Gleichge-

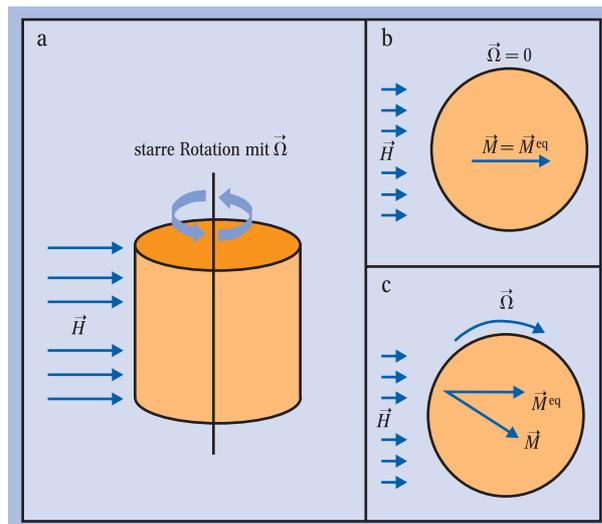


Abb. 1: Durch die Rotation eines Mediums mit Ω weicht die Magnetisierung von seinem Gleichgewichtswert M^{eq} ab. Diese führen zu einem reellen Term in der konstitutiven Relation $\mu(\omega) = B/H$, der aber Dissipation beschreibt.

wicht gegeben, die proportional zu $(\dot{\mathbf{B}} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B})$ ist, also muss $\dot{\mathbf{B}}$ in Gl. (7) durch $\dot{\mathbf{B}} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}$ ersetzt werden,

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\bar{\mu} + \alpha(\dot{\mathbf{B}} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}). \quad (8)$$

(Wir nehmen $E=0$ an und vernachlässigen relativistische Effekte.) Der dritte, offensichtlich reelle Term beschreibt für ein statisches Feld ($\dot{\mathbf{B}} = 0$) die gesamte, im System produzierte Dissipation. Man bemerke, dass der erste Term auf der rechten Seite ($\sim B$) ungerade ist, und der dritte Term als Produkt von zwei ungeraden Termen gerade und dissipativ ist – genau so wie der Term proportional zu $\dot{\mathbf{B}}$. Obwohl Gl. (8) allgemein gilt, ist sie in Ferrofluiden (kolloidale Suspensionen von ferromagnetischen Teilchen), mit $\alpha \approx 10^{-4}$ s, besonders wichtig. Denn für natürlich vorkommende paramagnetische Flüssigkeiten ist α meist kleiner als 10^{-10} s, mit der Folge, dass dissipative Effekte vernachlässigbar klein sind.

Betrachten wir einen sich mit Ω drehenden und mit einem Ferrofluid gefüllten Behälter, der einem statischen, senkrecht zu Ω stehenden Magnetfeld ausgesetzt wird (siehe Abb. 1). Für $\Omega = 0$ sind die magnetischen Momente der Teilchen in Richtung des Feldes orientiert. Für $\Omega \neq 0$ werden die Teilchen – und mit ihnen die magnetischen Momente – durch Ω aus der Feldrichtung gedreht, versuchen aber, in Feldrichtung zu relaxieren [1]. Halten sich beide „Kräfte“ die Waage, stellt sich ein stationärer, dissipierender Zustand ein, der durch Gl. (8) mit $\dot{\mathbf{B}} = 0$ beschrieben wird. Dieses Experiment wird zurzeit in Saarbrücken von Embs, Kityk, Knorr, Lücke und Müller durchgeführt. Die gemessene Feldverteilung kann auch berechnet werden: Man nehme Gl. (8) im Ferrofluid, $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ im Außenraum, und verbinde die Felder durch die üblichen Anschlussbedingungen. Ein Vergleich beider Ergebnisse kann dann Gl. (8) bestätigen – oder (nun ja) falsifizieren.

4) Tatsächlich macht die Linearität der Maxwell Gleichungen nur deutlich, was immer richtig ist: Eine Mittelung mikroskopischer Gleichungen liefert „grobkörnige“ Felder und lässt die Reversibilität unangetastet. Durch die Mittelung verliert man zwar Information, aber wenn die unterlegte mikroskopische, reversible Dynamik streng gültig ist, müssen bei Zeitumkehr die alten Verhältnisse wieder hergestellt werden.

5) Man denke sich eine supraleitende Spule, die magnetisierbares Material umhüllt. Das ganze rotiert ad infinitum und mit konstantem Drehimpuls weit weg von allem im All – falls Abstrahlung (reaktiver Vorgang, noch keine Dissipation) verhindert wird.

Thermodynamische Sichtweise

Lokalität

Wunder wirken aus der Ferne, Physik geschieht immer vor Ort. Unser Verständnis davon, was die Welt im Innersten zusammenhält, hat viel mit Lokalität zu tun. Und sie scheint nicht nur in der Physik relevant zu sein: Marktwirtschaft und Evolution bedienen sich lokalen Spielregeln zwischen Individuen (wie Kaufvertrag oder Selektionsvorteil), um gesellschaftliche oder biologische Muster zu erzeugen. Planwirtschaft oder die Schöpfungsgeschichte hängen hingegen von Fernwirkungen ab [2]. Im Kern der Maxwell-Gleichungen steckt ebenfalls Lokalität. Um diese Behauptung zu verstehen, muss man sich zuerst vergegenwärtigen, dass die makroskopischen Maxwell-Gleichungen einen Teil der hydrodynamischen Theorie geladener Systeme darstellen. Und die eigentliche Frage, die hier zu beantworten gilt, ist eben, wie man diese Theorie aufstellt. Die unabhängigen Variablen der Hydrodynamik neutraler Systeme (wie z. B. Wasser) sind drei Dichten – die von Entropie und den lokal erhaltenen Größen Masse und Impuls. Bei einer Verallgemeinerung auf geladene Systeme erscheint es naheliegend, die erhaltene makroskopische Ladungsdichte ρ_1 als eine zusätzliche Variable zu berücksichtigen. Aber genau das würde gegen die Lokalität verstoßen – deshalb führt man Felder ein. Die Erklärung, warum dies so ist, gilt mikro- wie makroskopisch. Betrachten wir zunächst den einfacheren, mikroskopischen Fall.

Nehmen wir die Ladungsdichte q als Variable, schreibt sich die Veränderung der Feldenergiedichte als Φdq . Nun hängt das Coulomb-Potential Φ nicht nur vom lokalen q ab, sondern von q überall im System. Also ist Φdq keine lokalisierbare Energiedichte und q keine Variable einer lokalen Theorie. (Obwohl die Lagrange-Dichte die angemessene Größe wäre, sprechen wir hier wegen der Analogie zur Makroskopie von der Energiedichte.) Betrachten wir statt dessen E als Variable, ist die Ladungsdichte über $\nabla \cdot E = q$ gegeben, und es gibt keine Frage, dass die mit jedem Raumpunkt assoziierte Energiedichte $E^2/2$, und deren Veränderung $E dE$ ist. (Die Präferenz für eine der zwei Energiedichten steht nicht im Widerspruch dazu, dass die Integrale identische Energien liefern.) Mit q als Variable gilt die Coulomb-Kraft, die instantan und aus der Ferne wirkt; mit E als Variable gilt die Lorentz-Kraft, die lokal ist. Auffällig ist, dass E für ein fest vorgegebenes q noch teilweise frei ist. Nur so kann E gemäß seiner Bewegungsgleichung in Form eines Wellenzuges an einen entfernten Punkt gelangen und vor Ort Ladungen verrücken – Physik lokal zu beschreiben erkaufte man sich offensichtlich mit einer höheren Anzahl von Variablen.

Wird das B -Feld eingeführt, ist auch die lokale Erhaltung von Energie und Impuls gewährleistet. Im Vakuum gehorcht die Energiedichte $(E^2 + B^2)/2$ der Kontinuitätsgleichung, mit dem Poynting-Vektor $cE \times B$ als Stromdichte – welche als Feld-Impulsdichte ebenfalls lokal erhalten ist. Befindet sich ein Elektron im Feld, sind Feldenergie und -impuls nicht mehr erhalten, wohl aber Gesamtenergie und -impuls von Feld und Elektron – und die Lorentz-Kraft drückt nur den Energie- und Impulsaustausch zwischen ihnen aus. Mit q wäre es nicht möglich gewesen, die Kontinuitätsgleichung für Energie und Impuls aufrechtzuerhalten. Ein lokales Verständnis durch seine Gleichungen ermöglicht zu haben, darin kann man durchaus den Genius von Maxwell sehen.

Makroskopisch behält dieses Verständnis nicht nur seine Gültigkeit, es ist sogar essenziell. Die Wechselwirkung zwischen Feldern und Materie bewirkt, dass ihre Anteile an Energie und Impuls gar nicht auseinanderzuhalten sind, und die komplette Theorie von Feld und Materie – die Hydrodynamik geladener Systeme – auf einmal aufgestellt werden muss. Wenn wir aber wie bei neutralen Flüssigkeiten weiter davon ausgehen können, dass Gesamtenergie und -impuls Kontinuitätsgleichungen erfüllen, können wir die Theorie – mithilfe einiger Zusatzüberlegungen zu den Feldern – nach wie vor eindeutig und stringent herleiten.

Wir fangen mit q_1 an, einer für sich erhaltenen, makroskopisch langsam variierenden Ladungsdichte, und definieren über $\nabla \cdot D = q_1$ ein von vornherein makroskopisches Feld D . Die Beziehung zwischen D und q_1 ist die gleiche wie bei der mikroskopischen Theorie zwischen E und q : Mit D als Variable lässt sich eine lokale Theorie konstruieren. D hat die gleiche Zeitumkehrparität wie q_1 , ist gerade. Drei weitere Variablen, nun ungerade, werden noch über die Bedingung $\nabla \cdot B = 0$ eingeführt. Die Eindeutigkeit der Felder ist gegeben, wenn wir auch deren Bewegungsgleichungen kennen. Für die Herleitung postulieren wir (wie stets in der Thermodynamik) die Existenz einer erhaltenen Gesamt-Energie, deren Dichte u sei. Da die konkrete Form von u nicht spezifiziert werden braucht, werden die Bewegungsgleichungen in den Variablen, in u und in den Ableitungen von u nach diesen Variablen ausgedrückt. Deshalb ist das Ergebnis allgemein und weitgehend unabhängig von Material-Eigenschaften. Die Bewegungsgleichungen werden nun in zwei Schritten hergeleitet: Im ersten beschränken wir uns auf das Gleichgewicht, im zweiten lassen wir zeitliche Variationen zu.

Gleichgewicht

Nehmen wir zunächst ein unbewegtes System ohne Dichteänderungen an. Dann ist u eine Funktion von D, B und der Entropiedichte s ,

$$du = Tds + E^{eq} \cdot dD + H^{eq} \cdot dB. \quad (9)$$

Die Gleichgewichts-Felder $E^{eq} \equiv \partial u / \partial D$ und $H^{eq} \equiv \partial u / \partial B$ werden analog der Temperatur $T \equiv \partial u / \partial s$ eingeführt und sind wie T reelle Funktionen von D, B, s . Im Gleichgewicht ist die Entropie $\int s d^3r$ maximal. Also verschwindet ihre Variation bezüglich D, B und u , wobei Energieerhaltung $\int u d^3r = \text{konst.}$ und Gln. (3) als Zwangsbedingungen berücksichtigt werden müssen. Das bedeutet

$$\nabla T = 0, \quad \nabla \times E^{eq} = 0, \quad \nabla \times H^{eq} = 0, \quad (10)$$

oder Gültigkeit der statischen Maxwell-Gleichungen

Herleitung durch Variationsrechnung

Die Variation bezüglich D ergibt

$$\int d^3r [E^{eq} \cdot \delta D - \Phi(r) \delta(\nabla \cdot D - q_1)] = 0,$$

wo $\Phi(r)$ der Lagrange-Parameter ist, und $\delta q_1 = 0$. Nach partieller Integration des zweiten Terms haben wir (mit im Unendlichen verschwindenden Feldern)

$$\int d^3r (E^{eq} + \nabla \Phi) \cdot \delta D = 0.$$

Da δD beliebig ist, gilt $E^{eq} = -\nabla \Phi$, oder eben $\nabla \times E^{eq} = 0$. Die Variation von B läuft analog. (Wenn das System eine endliche Leitfähigkeit hat, kann die Dichte variieren, $\delta q_1 \neq 0$, aber nicht die Gesamtladung, $\delta \int q_1 d^3r = 0$. Die Entropie kann dann weiter wachsen und wird maximal für $E^{eq} = 0$.)

(siehe Infokasten „Herleitung durch Variationsrechnung“). Da nun diese Gleichungen feststehen, sind die vier thermodynamisch eingeführten Felder \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{E}^{eq} , \mathbf{H}^{eq} wie üblich je nach Orientierung im angrenzenden Vakuum messbar und daher physikalisch reell. Dieses großartige Resultat schlummert⁶⁾, durch eine nichtssagende Überschrift halb versteckt, im § 18 des Buches von Landau und Lifshitz [3]. Es ist ein glasklarer Beweis dafür, dass Elektro- und Magnetostatik Untergebiete der Thermodynamik sind.

Will man das Ergebnis auf ein lineares Medium einschränken, muss man u nach den Feldern entwickeln, $u = u_0 + (D^2/\bar{\epsilon} + B^2/\bar{\mu})/2$. ($u - u_0$ ist positiv definit, also verschwinden lineare Terme.) Daraus folgt $\mathbf{E}^{\text{eq}} \equiv \partial u / \partial \mathbf{D} = \mathbf{D}/\bar{\epsilon}$, $\mathbf{H}^{\text{eq}} = \mathbf{B}/\bar{\mu}$.

Man kann auch die Betrachtung auf ein bewegtes Medium verallgemeinern. Dazu muss man die erhaltene Gesamtimpulsdichte g_i als zusätzliche Variable in Gl. (9) berücksichtigen: $du = \dots + v_i dg_i$ mit den zwei folgenden Ergebnissen:

► Eine zusätzliche Gleichgewichtsbedingung, $v_{ij} \equiv \nabla_i v_j + \nabla_j v_i = 0$, besagt, dass Bewegung im Gleichgewicht nur aus einer Festkörperrotation und einer gleichmäßigen Translation bestehen darf.

► Gl. (10) bleibt gültig, falls die Felder \mathbf{E}^{eq} , \mathbf{H}^{eq} durch die vom lokalen Ruhesystem \mathbf{E}_0^{eq} , \mathbf{H}_0^{eq} ersetzt werden. Die weiter unten (nach Gl. (12)) gemachte Rechnung zeigt, $\nabla \times \mathbf{E}_0^{\text{eq}}$, $\nabla \times \mathbf{H}_0^{\text{eq}} = 0$ bedeuten, dass Feld und Medium im Gleichgewicht gemeinsam rotieren müssen – wie wir das zur Herleitung von Gl. (8) bereits angenommen haben.

Es soll nicht verwundern, dass $\nabla \times \mathbf{H}_0^{\text{eq}} \approx \nabla \times (\mathbf{H}^{\text{eq}} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}/c)$ verschwindet, und nicht gleich \mathbf{j}_1/c ist, denn der typische Strom ist Ohmsch und damit kein Gleichgewichtsphänomen. Zwei Möglichkeiten gibt es dennoch, einen endlichen Strom zu erhalten: Zum einen gilt im Laborsystem (für Ladungsverteilungen, bei denen $\dot{\mathbf{D}} = 0$ ist) doch $\nabla \times \mathbf{H}^{\text{eq}} = \rho_1 \mathbf{v}/c$; zum anderen können Supraleiter auch im Ruhesystem Gleichgewichtsströme tragen. Um diesen Fall zu betrachten, muss man allerdings Gl. (9) um die entsprechenden Variablen erweitern.

Mithilfe dieser „supraleitenden Thermodynamik“ kann man das altbekannte, mikroskopisch schwierige Problem des *London-Moments* betrachten. Dreht sich ein Supraleiter mit Ω , verändert sich seine definierende Eigenschaft, Magnetfelder aus dem Inneren zu verdrängen dahin, dass nunmehr spontan ein Feld aufgebaut wird, das London-Moment. Dabei ist das Verhältnis von Feld und Rotation, zwei makroskopischen Größen, durch Naturkonstanten gegeben: $B/\Omega = 2m/ec$, wo m die Masse des Elektrons und e seine Ladung ist. In wenigen Schritten lässt sich sauber nachvollziehen, warum m die „nackte“ Masse sein muss. Eine leichte Verfeinerung dieser Betrachtung zeigt dann, dass relativistische Korrekturen, über die in der Literatur lang und kontrovers diskutiert wurde, vollkommen vernachlässigt werden können [4].

Lokales Gleichgewicht

Wenn die Felder mit der Zeit variieren, brauchen wir Bewegungsgleichungen für \mathbf{D} und \mathbf{B} . Bemerkenswerterweise wird deren Struktur durch Gl. (3) und Ladungserhaltung, $\dot{\rho}_1 = -\nabla \cdot \mathbf{j}_1$, eindeutig festgelegt. Da $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, können wir \mathbf{B} als Rotation eines Feldes $-\mathbf{cE}$ schreiben, $\dot{\mathbf{B}} = -\mathbf{c} \nabla \times \mathbf{E}$. Analog gilt $\nabla \cdot \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho}_1 = -\nabla \cdot \mathbf{j}_1$, also lässt sich das Feld $\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{j}_1$ ebenfalls als Rotation

schreiben, $\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{j}_1 = \mathbf{c} \nabla \times \mathbf{H}$. Von den neu eingeführten Felder \mathbf{E} , \mathbf{H} wissen wir vorerst nur, dass sie im Gleichgewicht (d. h. für \mathbf{B} , \mathbf{D} , $\mathbf{j}_1 = 0$) gleich \mathbf{E}^{eq} , \mathbf{H}^{eq} sind. Also schreiben wir, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{eq}} + \mathbf{E}^{\text{D}}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{\text{eq}} + \mathbf{H}^{\text{D}}$, mit der Vorgabe, dass \mathbf{E}^{D} , \mathbf{H}^{D} im Gleichgewicht verschwinden.

Die Ausdrücke für die dissipativen Felder \mathbf{E}^{D} , \mathbf{H}^{D} lassen sich im Zuge der Herleitung der Hydrodynamik geladener Systeme bestimmen. Dabei gehen Erhaltungssätze, Thermodynamik (also Gl. (9), die Korn für Korn gültig bleibt) und die Kraft-Fluss-Relation von Onsager ein. Obwohl die einzelnen Schritte einfach sind und in einer Kursvorlesung kaum auffällig wären, würde deren Präsentation hier den vorgegebenen Rahmen sprengen.⁷⁾ Die Ergebnisse bezüglich der Maxwell-Gleichungen sind jedoch schnell dargestellt und leicht zu verstehen. \mathbf{E}^{D} , \mathbf{H}^{D} sind (für Nichtleiter) Linearkombinationen der Größen: $\nabla \times \mathbf{E}_0^{\text{eq}}$, $\nabla \times \mathbf{H}_0^{\text{eq}}$, ∇T , v_{ij} , und verschwinden mit ihnen im Gleichgewicht. Falls die Felder ausreichend schwach sind und die Temperatur homogen, haben wir $\mathbf{E}^{\text{D}} = \beta c \nabla \times \mathbf{H}_0^{\text{eq}}$, $\mathbf{H}^{\text{D}} = -\alpha c \nabla \times \mathbf{E}_0^{\text{eq}}$. In Gl.(4) eingesetzt, führt das auf

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{c} \nabla \times (\mathbf{H}^{\text{eq}} - \alpha c \nabla \times \mathbf{E}_0^{\text{eq}}) \quad (11)$$

$$-\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{c} \nabla \times (\mathbf{E}^{\text{eq}} + \beta c \nabla \times \mathbf{H}_0^{\text{eq}}). \quad (12)$$

Diese sind die nichtlinearen, irreversiblen und makroskopisch hergeleiteten Maxwell-Gleichungen. Man beachte insbesondere, dass die dissipativen Felder \mathbf{H}^{D} , \mathbf{E}^{D} jeweils das andere Zeitumkehr-Verhalten haben als $\dot{\mathbf{D}}$, $\dot{\mathbf{B}}$.

Für den linearen, magnetischen Fall haben wir $\mathbf{H}^{\text{eq}} = \mathbf{B}/\bar{\mu} + O(v/c)$; in gleicher Ordnung gilt für $\beta = 0$, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ und ein uniformes B -Feld: $-\alpha c \nabla \times \mathbf{E}_0^{\text{eq}} = -\alpha c \nabla \times (\mathbf{E}^{\text{eq}} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c) = \alpha (\dot{\mathbf{B}} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B})$. Zusammen ergibt das Gl. (8).

Die Rechnung liefert auch Einsichten in Energie- und Impulserhaltung: Für den einfachen Fall (eines festgenagelten Labortisches) $\mathbf{v} = 0$ gibt es keine Impulserhaltung, und der Energiestrom ist: $\mathbf{cE} \times \mathbf{H} - \boldsymbol{\kappa} \nabla T$, also durch den Poynting-Vektor und den diffusiven Wärmestrom gegeben. Für den allgemeinen Fall $\mathbf{v} \neq 0$ erhält man (nebst Korrekturen proportional zu \mathbf{v} für den Energiestrom) auch einen Ausdruck für den Impulsstrom [5].

Höherfrequenter Bereich

Die Maxwell-Gleichungen (11, 12) sind eine hydrodynamische Theorie und daher wie üblich nur für $\omega \tau_p$, $\omega \tau_M \ll 1$ gültig (wo ω eine typische Frequenz ist und τ_p , τ_M die Zeiten sind, nach denen die Polarisation \mathbf{P} und die Magnetisierung \mathbf{M} ins Gleichgewicht gelangen.) Wir können diese Einschränkung überwinden, wenn wir \mathbf{P} , \mathbf{M} als zusätzliche Variablen einführen. Mit ähnlichen Überlegungen wie den obigen ist es möglich, nichtlinear gültige Bewegungsgleichungen für sie herzuleiten, die gewöhnlich von zweiter Ordnung in der Zeit für \mathbf{P} [6] und von erster für \mathbf{M} [1] sind. Damit kann man z. B. optische Probleme in dissipativen und chiralen Substanzen betrachten; oder wie oben erwähnt, Ferrofluide beschreiben. Eine überraschende Vorhersage betrifft seitwärts oszillierende Wände, die in Ferrofluiden hörbaren Schall erzeugen [7].

6) Der Vorbehalt, die Rechnung sei nicht einwandfrei, weil mit unphysikalischen Feldverteilungen variiert wurde, ist nicht nachvollziehbar. Denn $\nabla \times \mathbf{E}^{\text{eq}} \sim \mathbf{B}$, $\nabla \times \mathbf{H}^{\text{eq}} \sim \mathbf{D}$ sind generisch endlich, sie verschwinden nur im Gleichgewicht, wenn die Entropie maximal ist.

7) Die ausführliche Rechnung ist unter www.physik-journal.de zu finden oder kann vom Autor angefordert werden (mliu@uni-tuebingen.de).

Zusammenfassung

Das war ein längerer Aufstieg – was kann man bergab Merkbares und Bemerkenswertes nach Hause tragen? Nun: Der thermodynamische Zugang zur Maxwell-Theorie fängt mit der Forderung nach einer lokalen Beschreibung an. Die führt zu \mathbf{D} , \mathbf{B} als Variablen, welche $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_1$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ erfüllen. Aus der Ladungserhaltung kann man dann leicht die Bewegungsgleichungen $\dot{\mathbf{D}} = c \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{j}_1$ und $\dot{\mathbf{B}} = -c \nabla \times \mathbf{E}$ herleiten, mit vorerst unbekanntem Feldern \mathbf{H} , \mathbf{E} . Wegen Maximierung der Entropie und mit u als einer unspezifizierten Energiedichte folgt dann im Gleichgewicht, dass $\mathbf{E} = \partial u / \partial \mathbf{D} \equiv \mathbf{E}^{\text{eq}}$ und $\mathbf{H} = \partial u / \partial \mathbf{B} \equiv \mathbf{H}^{\text{eq}}$ sind. Außerhalb des Gleichgewichtes gibt es Dissipation, dann gelten die allgemeineren Beziehungen Gln. (11, 12).

Literatur

- [1] Man kann diesen Sachverhalt detaillierter durch eine Bewegungsgleichung für die Magnetisierung beschreiben. Diese wurde zuerst von *M.I. Shliomis* [Sov. Phys. Usp. **17**(2), 153 (1974)] mit spezifischer Vorstellung über den Drehimpuls der Teilchen hergeleitet. Neuere Arbeiten [*U. Felderhof*, *B. Kroh*, J. Chem. Phys. **110**, 7403 (1999); *H. W. Müller*, *M. Liu*, Phys. Rev. E **64**, 061405 (2001)] haben diese Gleichung verallgemeinert und auf ein thermodynamisches Fundament gestellt.
- [2] *S. Johnson*, Emergence, Scribner (2001).

- [3] *L. D. Landau*, *E. M. Lifschitz*, Electrodynamik der Kontinua, Akademie Verlag, Berlin (1985).
- [4] *M. Liu*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3223 (1998).
- [5] Mehr zur Herleitung und Anwendungen findet man in *M. Liu*, Phys. Rev. Lett. **70**, 3580 (1993), **74**, 1884, (1995), **74**, 4535, (1995), **80**, 2937, (1998).
- [6] *Y. Jiang*, *M. Liu*, Phys. Rev. Lett. **77**, 1043 (1996); und Preprint.
- [7] *H. W. Müller*, *M. Liu*, Phys. Rev. Lett. **89**, 67201 (2002).

Der Autor

Mario Liu kam in Shanghai zur Welt und zog mit 16 nach Deutschland, um hier später Physik zu studieren. Das war keine schlechte Entscheidung, denn während er das Abitur in Wyk auf Föhr ablegte, tobte in China die Kulturrevolution. Nach der Promotion in München (1976) ging er für drei Jahre in die USA, wo er bei den Bell Laboratories und an der University of Southern California arbeitete. Zurückgekehrt forschte er an der KFA-Jülich, bevor er als Professor für theoretische Physik berufen wurde, 1983 nach Hannover und 2001 nach Tübingen. Außer den Vorlesungen beschäftigt er sich hauptsächlich mit hydrodynamischen Theorien von kondensierten Systemen – wie Supraflüssigkeiten, Ferrofluiden und neuerdings Sand.

