

Lokalisierung statt Thermalisierung

Das interessante Phänomen der Vielteilchenlokalisierung verhindert, dass quantenmechanische Vielteilchensysteme das thermodynamische Gleichgewicht erreichen können.

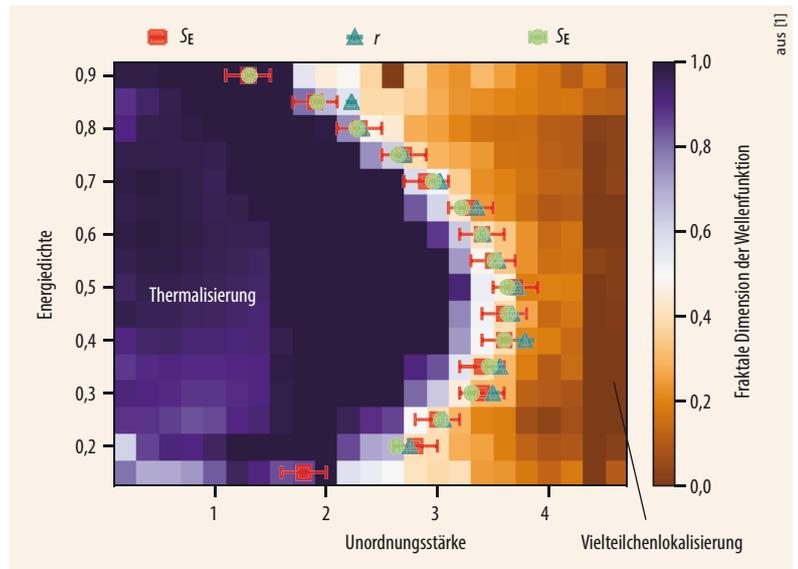
David J. Luitz und Frank Pollmann

Unordnung in wechselwirkenden Quantensystemen bricht die Translationsinvarianz und zerstört somit Symmetrien. In der Beschreibung der klassischen Statistischen Mechanik ist dann chaotisches Verhalten zu erwarten. Erstaunlicherweise hat starke Unordnung in quantenmechanischen Vielteilchensystemen aber den gegenteiligen Effekt: Von einem Anfangszustand entfernt sich das System nur wenig. Selbst nach beliebig langer Zeit bleibt lokale und damit messbare Information über den Anfangszustand erhalten: Das System erreicht kein thermodynamisches Gleichgewicht.

Jeder hat sicher schon beobachtet, wie Eiswürfel in einer Flüssigkeit schmelzen und sich nach einiger Zeit ein Gleichgewichtszustand einstellt, der durch die Temperatur der Flüssigkeit charakterisiert ist (Abb. 1). Dieses dynamische Erreichen des thermodynamischen Gleichgewichts nennt man Thermalisierung. Ludwig Boltzmann erkannte, dass dieses Gleichgewicht durch einen Zustand maximaler Entropie gegeben ist – unter Einhaltung vorliegender Randbedingungen. Dieser Zustand stellt sich durch dynamisches Chaos ein, bei dem kleinste Unterschiede in den Anfangsbedingungen zu komplett unterschiedlichen Endzuständen führen.

Doch kann es Thermalisierung auch in isolierten Quantensystemen geben? Diese Frage ist von großer Bedeutung für das grundlegende Verständnis der Thermodynamik von Quantensystemen in Abwesenheit eines Wärmebades sowie für die Erklärung von Experimenten mit ultrakalten Quantengasen [2]. Diese sind exzellent von der Umgebung isoliert und eignen sich aufgrund bedeutender Fortschritte in der experimentellen Kontrolle sehr gut, um theoretische Vorhersagen zu überprüfen.

Der Zustand eines isolierten Systems wird im Allgemeinen durch die Dichtematrix $\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ als ein statistisches Gemisch verschiedener Wellenfunktionen $|\psi_n\rangle$ mit Wahrscheinlichkeiten p_n beschrieben. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung p_n ist unter der Dynamik der Schrödinger-Gleichung invariant, weshalb sich insbesondere ihre von Neumann-Entropie $S_{VN} = -\sum_n p_n \ln p_n$ nicht mit der Zeit ändert und daher durch den Anfangszustand gegeben ist. Somit bleibt die Information über den Anfangszustand vollständig erhalten, sodass sich im Gegensatz zu klassischen Systemen zu keiner Zeit ein Gleichgewichtszustand



Der Vielteilchenlokalisierungs-Phasenübergang ist eine Funktion von Unordnungsstärke und Energiedichte in einer wechselwirkenden Spinkette. Während sich das System bei schwacher Unordnung ergodisch verhält und einen thermischen Zustand erreicht, bleibt es in der lokalisierten Phase für alle Zeiten im Nichtgleichgewicht. Für verschiedene

Energiedichten wurde die kritische Unordnungsstärke des Phasenübergangs numerisch mittels verschiedener Größen wie der Verschränkungsentropie S_E oder des statistischen Parameters r der Energieniveaus bestimmt. Demnach scheint der kritische Punkt von der Energiedichte abzuhängen.

einstellen kann, welcher die Entropie (hier die von Neumann-Entropie) unter den gegebenen Randbedingungen maximiert, außer man startet bereits mit einem solchen Zustand. Dieses theoretische Resultat steht im Widerspruch zu experimentellen Beobachtungen in sehr gut isolierten Quantensystemen [3], in

KOMPAKT

- In klassischen Systemen mit dynamischem Chaos stellt sich meist nach einiger Zeit ein thermodynamisches Gleichgewicht ein. Eine große Klasse ungeordneter Quanten-Vielteilchensysteme thermalisiert aber nicht.
- Genügend starke Unordnung behindert den Transport von Teilchen in wechselwirkenden Systemen und führt dadurch zur so genannten Vielteilchenlokalisierung.
- Dieses Phänomen ist analytisch nur in Ausnahmefällen zu charakterisieren, es lässt sich aber numerisch betrachten (Abb. oben).
- Isolierte Vielteilchensysteme sind zudem in Experimenten mittels ultrakalter Atome simulierbar.

Dr. David J. Luitz, Max-Planck-Institut für Physik of komplexer Systeme, Nöthnitzer Str. 38, 01187 Dresden und Prof. Dr. Frank Pollmann, Physik-Department T42, TU München, James-Frank-Str. 1, 85748 Garching

denen lokale Observable wie die Teilchendichte sehr wohl nach langen Zeiten zu Werten relaxieren, die laut Thermodynamik zu erwarten sind. Eine Ausnahme bilden Systeme mit speziellen Symmetrien, sog. integrable Systeme, die wir hier nicht betrachten wollen, da sie nicht robust gegenüber kleinen Störungen sind.

Der Schlüssel zur Auflösung dieses scheinbaren Widerspruchs liegt in der Erweiterung des Begriffs des thermodynamischen Gleichgewichts durch die Trennung lokaler (physikalisch messbarer) und globaler (nicht messbarer) Observablen: Wir wollen einen Zustand als thermisch auffassen, wenn er durch Messung lokaler Observablen nicht von der theoretischen Vorhersage des thermodynamischen Gleichgewichts unterscheidbar ist. Diese Bedingung ist sinnvoll, da nur lokale Größen wie die Energie, Teilchendichte oder Magnetisierung physikalisch messbar sind. Globale Observable wie N -Punkt-Korrelationsfunktionen oder die von Neumann-Entropie sind mathematische Objekte, die für große N proportional zur Systemgröße nichtlokal und physikalisch nicht direkt messbar sind.

Diese Erweiterung des Begriffs des Gleichgewichts in isolierten Quantensystemen erlaubt es uns, eine Hypothese für die Struktur von thermalisierenden Systemen aufzustellen. Es zeigt sich nämlich, dass sich für die Zeitentwicklung des Erwartungswertes von lokalen Operatoren ausgehend von einem reinen Anfangszustand mit Wellenfunktion $|\psi(t=0)\rangle$ Bedingungen an die lokale Struktur der stationären Zustände der Schrödinger-Gleichung aufstellen lassen, welche die Relaxation ins Gleichgewicht garantieren: Die Er-

wartungswerte lokaler Observablen in stationären Zuständen sehr großer Systeme müssen eine glatte Funktion der Energie dieser Zustände sein. Diese glatten Funktionen entsprechen genau den Erwartungswerten der Observable im mikrokanonischen Ensemble als Funktion der Energie. Diese Eigenzustands-Thermalisierungshypothese (ETH) ließ sich numerisch in vielen Modellsystemen mit sehr hoher Präzision verifizieren (Infokasten ETH). Thermalisierung kann es dabei prinzipiell nur in wechselwirkenden Systemen geben, da der Energieaustausch zwischen Teilchen unabdingbar ist, um ins Gleichgewicht zu relaxieren. Die ETH lässt sich unter der Annahme herleiten, dass sich ein generisches Vielteilchensystem bei endlicher Energie praktisch wie eine sehr große Zufallsmatrix verhält. Diese Zufallsmatrizen erfüllen die Voraussetzungen der ETH im Detail. Außerdem ist die Korrespondenz zwischen Zufallsmatrizen und thermalisierenden Systemen durch numerische Verifikation der ETH sowie durch Vergleich der statistischen Eigenschaften des Energiespektrums von Zufallsmatrizen mit denen thermalisierender Systeme mit hoher Präzision gegeben.

Bisher haben wir das Problem der Thermalisierung in isolierten Quantensystemen betrachtet, das bereits eine Erweiterung des Gleichgewichtsbegriffs erfordert. Dazu ist es wichtig, dass die Teilchen im System miteinander wechselwirken. Nun stellt sich die Frage, ob die Wechselwirkungen ausreichen, um jedes generische (im Sinne von: ohne spezielle Symmetrien) Quantensystem thermalisieren zu lassen. Bahnbrechende Arbeiten zu ungeordneten Vielteilchensystemen haben in

EIGENZUSTANDS-THERMALISIERUNGSHYPOTHESE (ETH)

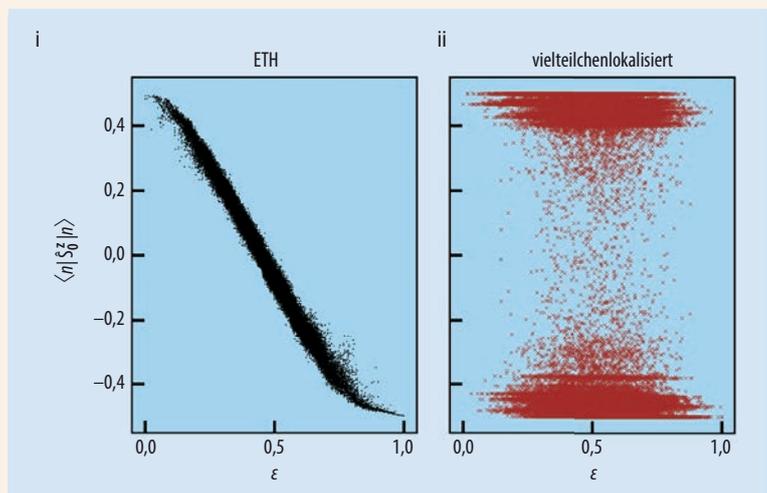
Präpariert man ein isoliertes Quantensystem zur Zeit $t = 0$ in einen reinen (nichtstationären) Zustand mit der Wellenfunktion $|\psi(t = 0)\rangle$, so ist diese für alle Zeiten durch die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

mit dem Hamilton-Operator \hat{H} bestimmt. Das System erreicht zu keinem Zeitpunkt einen gemischten Zustand

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

von beliebigen orthogonalen Zuständen $|\psi_i\rangle$, der z. B. das mikrokanonische Ensemble beschreibt. Streng genommen kann das System also nicht ins Gleichgewicht relaxieren. Allerdings besitzen wechselwirkende Quantensysteme ohne spezielle Symmetrien eine intrinsische chaotische Struktur. Diese führt dazu, dass alle lokalen physikalischen Observablen ins Gleichgewicht relaxieren und nur physikalisch nicht messbare nichtlokale Größen den Zustand des Systems vom Gleichgewicht unterscheiden. Physikalisch gesehen ist damit das System nach langer Zeit thermalisiert, da kein Unterschied zum mikrokanonischen Ensemble messbar ist (vgl. Text). Die spezielle Struktur, die ein



Das diagonale Matrixelement $\langle n | \hat{S}_z^i | n \rangle$ eines lokalen Spin Operators (\hat{S}_z^i) in der Eigenbasis $|n\rangle$ des Hamilton-Operators ist eine Funktion der Vielteilchen-Eigenenergie E_n . Es bildet sich eine klare Struktur,

Quantensystem dazu besitzen muss, äußert sich in den stationären Zuständen $|n\rangle$ mit Energie E_n . Diese liefern bei der Messung einer lokalen Observablen \hat{O} in hinreichend großen Systemen ein Ergebnis, das nur von der Energie des

zustands abhängt, nicht jedoch von der Wahl des Zustands selbst [20 – 22]. Also liefern alle stationären Zustände mit gleicher Energie ($E_n \approx E_{n'}$) identische Ergebnisse bei der Messung lokaler Observablen: $\langle n | \hat{O} | n \rangle \approx \langle n' | \hat{O} | n' \rangle$.

Die für größere Systeme noch schärfer wird (i). Im gleichen System bei starker Unordnung ist sie nicht vorhanden (ii): Benachbarte Eigenzustände zeigen sehr unterschiedliche Werte.

den letzten zehn Jahren diese Frage eindeutig negativ beantwortet: Eine große Klasse von generischen ungeordneten Vielteilchensystemen thermalisiert nicht, sondern zeigt ein Phänomen, das als Vielteilchenlokalisierung (Many-Body Localization, MBL) bekannt ist und die Thermalisierung effektiv verhindert. Wir wollen dieses reine Quantenphänomen nun genauer beleuchten. Insbesondere bricht in solchen Systemen die Eigenzustands-Thermalisierungshypothese zusammen, und es gibt keine effektive Beschreibung durch Zufallsmatrizen.

Auch in klassischen Systemen lassen sich Ausnahmen konstruieren, die das thermische Gleichgewicht nicht erreichen. Diese sind allerdings meist nicht robust gegenüber kleinen Störungen z. B. des Anfangszustandes – im Gegensatz zur Vielteilchenlokalisierung in Quantensystemen. Wir werden im Folgenden der Einfachheit halber die Diskussion auf eindimensionale isolierte Quantensysteme mit Unordnung und nur einer Art von Freiheitsgraden auf einem Gitter beschränken (Abb. 2).

Lokalisierung in der Unordnung

Der spätere Physik-Nobelpreisträger Philip Warren Anderson zeigte 1958, dass in nichtwechselwirkenden Systemen, in denen Teilchen durch direkte Tunnelprozesse nur zum Nachbarplatz hüpfen können (lokale Hüpfsterme, Abb. 2a), Unordnung μ_i den Teilchentransport zerstören kann [4]. Dadurch entsteht ein Anderson-Isolator. Dieses Phänomen hat seine Ursache in der destruktiven Interferenz bei der (teilweisen) Reflexion eines Wellenpakets am Unordnungspotential. Diese führt dazu, dass sich ein Wellenpaket nur in einem kleinen Teil des Systems ausbreiten kann, also lokalisiert ist. Es beruht daher auf der Wellennatur der Quantenmechanik. In eindimensionalen Systemen genügt bereits beliebig geringe Unordnung, um die Teilchen vollständig zu lokalisieren, während es in dreidimensionalen Systemen einen Metall-Isolator-Übergang als Funktion der Unordnungsstärke geben kann. Hier sind die Teilchen bei schwacher Unordnung mobil und können das gesamte System erreichen, während es ab einer kritischen Unordnungsstärke lokalisiert ist und sich das System daher wie ein Isolator verhält.

Da in realen Systemen sehr viele Teilchen vorhanden sind, die zum Beispiel aufgrund ihrer elektrischen Ladung miteinander wechselwirken, stellt sich die Frage, wie sich ungeordnete Vielteilchensysteme mit Wechselwirkung verhalten. Dieses sehr alte Problem ist schwierig zu behandeln, da die Komplexität solcher Systeme exponentiell mit der Teilchenzahl wächst.

Wenn die Teilchen miteinander wechselwirken, tauschen sie durch Stoßprozesse Energie miteinander aus. Dadurch sollte es möglich sein, die Lokalisierung durch Wechselwirkungen zu überwinden. Es stellte sich jedoch heraus, dass sich bei genügend starker Unordnung ein lokalisierter Zustand selbst in wechselwirkenden Systemen ausbildet und wieder Vielteilchen-



Abb. 1 Thermalisierung von Eiswasser: Nach kurzer Zeit stellt sich selbst bei isolierten Systemen (z. B. in einer Thermoskanne) das thermodynamische Gleichgewicht ein. Vielteilchenlokalisierte Quantensysteme verhalten sich hingegen völlig anders und erreichen das Gleichgewicht nie.

lokalisierung auftritt. Dies belegten wegweisende Arbeiten mittels störungstheoretischer Methoden (Infokasten Abbildung auf hochdimensionales Hüpfproblem) [5, 6].

Eine über die Störungstheorie hinausgehende Untersuchung der Vielteilchenlokalisierung erfordert es, stark wechselwirkende Quantensysteme fernab vom thermischen Gleichgewicht exakt zu behandeln. Das gelingt analytisch nur in Ausnahmefällen – wie bei integrablen Systemen mit speziellen Symmetrien, die zu einer großen Zahl an Erhaltungsgrößen und den damit verbundenen Randbedingungen führen. In ungeordneten Systemen ist das nahezu aussichtslos, und der Fortschritt bei der Vielteilchenlokalisierung im letzten Jahrzehnt ist vor allem der numerischen Betrachtung des Problems zu verdanken [1, 7, 8].

Eine der wichtigsten exakten numerischen Methoden ist die exakte Diagonalisierung, bei welcher der Hamilton-Operator als Matrix in einer festen Basis geschrieben wird, deren Eigenwerte und Eigenvektoren den stationären Zuständen der Schrödinger-Gleichung entsprechen. Bei der Vielteilchenlokalisierung sind vor allem Zustände bei sehr hoher Energie von Bedeutung, da das Fehlen der Thermalisierung bei hohen Energien schon in relativ kleinen Systemen deutlich sichtbar ist. Diese Zustände sind mit den üblichen Methoden nicht zu erreichen. In den letzten Jahren wurden aber neue Methoden für hoch angeregte Zustände entwickelt, welche die Struktur des Hamilton-Operators ausnutzen und Hilbertraumdimensionen von mehr als 10^7 Zuständen (entspricht etwa 26 Spins 1/2) erreichbar machen [1, 9]. Neu sind auch Algorithmen, die auf Konzepten der Quanteninformationstheorie basieren, um hochangeregte Eigenzustände zu berechnen [10].

Die Untersuchung von Eigenzuständen und Eigenwerten des Hamilton-Operators ist für die Theorie von großer Bedeutung und erlaubt es, den Phasenübergang durch den Zusammenbruch der Eigenzustands-

Thermalisierungshypothese bei einer kritischen Unordnungsstärke genau zu lokalisieren (Abb. auf Seite 47). Jedoch sind stationäre Zustände bei hohen Energien nicht experimentell zugänglich, da sie sich nicht präparieren lassen. Daher ist es wichtig, auch die Dynamik des Systems numerisch zu simulieren, was mit exakten numerischen Methoden zur Zeitentwicklung bis zu Hilbertraumdimensionen von etwa 10^{10} (entspricht ca. 36 Spins 1/2) möglich ist.

Zusammenbruch der Thermalisierung

Auf experimenteller Seite eignen sich synthetische Quantensysteme gut, um die Dynamik isolierter Vielteilchensysteme zu untersuchen. In aktuellen Experimenten an ultrakalten Quantengasen gelang es, Signaturen von Vielteilchenlokalisierung in ungeordneten optischen Gittern in ein und zwei Dimensionen nachzuweisen [3, 11]. Hierzu wurde der Hamilton-Operator plötzlich geändert (Quantenquench), bei welchem beispielsweise ein Anfangszustand einer eindimensionalen Ladungsdichtewelle von abwechselnd besetzten ($n > 0$) und leeren ($n = 0$) Gitterplätzen bei unterschiedlichen Unordnungsstärken in der Zeit entwickelt wird [3, 12]. Bei schwacher Unordnung schmilzt die Ladungsordnung, und das System verliert lokale Information über den Anfangszustand – wie nach der Eigenzustands-Thermalisierungshypothese zu erwarten. Bei starker Unordnung bleibt die Dichtemodulation jedoch bestehen, und das System thermalisiert nicht (Abb. 3).

Exakte numerische Untersuchungen zeigten, dass starke Unordnung in wechselwirkenden Vielteilchensystemen nicht nur das Schmelzen der Ladungsordnung verhindert, sondern auch den Transport von Teilchen verlangsamt und bei genügend starker Unordnung sogar komplett unterbindet: Das System wird zu einem Isolator.

Ein System, dessen stationäre Zustände der Schrödinger-Gleichung eine spezielle Struktur aufweisen,

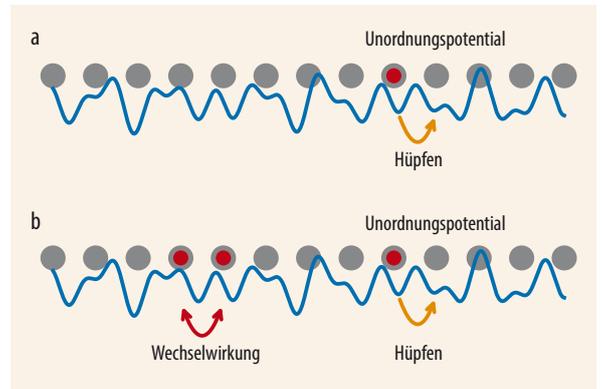


Abb. 2 Ein einzelnes Teilchen, das sich auf einem Gitter mit einem ungeordneten Potential bewegt, ist aufgrund von Anderson-Lokalisierung in einer Dimension für beliebig kleine Unordnung lokalisiert und kann daher nur einen kleinen Teil des Systems erreichen (a). Fügt man in das Gitter viele Teilchen ein, die miteinander wechselwirken, sind die Teilchen bei schwacher Unordnung delokalisiert (b), während sie bei starker Unordnung ebenfalls lokalisiert sind.

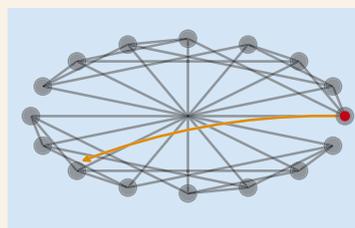
relaxiert ins thermodynamische Gleichgewicht (Informationsentropie). Numerische Untersuchungen in ungeordneten wechselwirkenden Quantensystemen zeigen in der Tat, dass lokale Observable bei schwacher Unordnung in allen stationären Zuständen die der gleichen Energie entsprechende identische Werte annehmen. Übersteigt das Unordnungspotential einen kritischen Wert, wird diese Eigenschaft des Systems zerstört, und alle stationären Zustände bei gleicher Energie liefern verschiedene Werte für die gleiche Observable. Obwohl die ETH nur eine hinreichende Bedingung für Thermalisierung ist, führt ihr Zusammenbruch in diesem Fall offenbar zu einer neuen Nichtgleichgewichtsphase, die das Gleichgewicht nie erreicht. Bei diesem dynamischen Phasenübergang ändern alle Eigenzustände ihr Verhalten dramatisch [8, 13].

Dieses grundlegend verschiedene Verhalten lässt sich auf vielfältige Weise quantifizieren und äußert sich in physikalischen Observablen und in quanteninformationstheoretischen Maßen wie der Verschränkungsentropie, welche die Verschränkung zweier Teilsysteme A und B bemisst. Sind deren Zustände vollkommen unabhängig voneinander, sind sie nicht miteinander verschränkt. Ein stark verschränkter Zustand liefert bei einer Messung im Teilsystem A dagegen sehr viel Information über den Zustand auf dem Teilsystem B . Diese Information lässt sich mathematisch aus der reduzierten Dichtematrix eines der beiden Teilsysteme berechnen: Summiert über alle möglichen Mikrozustände des Teilsystems B ergibt sich für den Zustand des Systems auf dem Teilsystem A fast immer ein gemischter Zustand ρ_A . Die von Neumann-Entropie dieses Zustandes $S_A = -\text{Tr} \rho_A \ln \rho_A$ entspricht dann der Verschränkungsentropie. Eine charakteristische Eigenschaft von hochangeregten Eigenzuständen vielteilchenlokalisierter Systeme ist, dass die Verschränkungsentropie niedrig ist und nicht proportional zum Volumen des Teilsystems (Anzahl der Gitterplätze) skaliert [14]. Im Gegensatz dazu ist

ABBILDUNG AUF HOCHDIMENSIONALES HÜPFPROBLEM

Das schwierige Problem von N wechselwirkenden Teilchen auf einem niedrigdimensionalen Gitter wurde in einer wichtigen Arbeit auf ein nichtwechselwirkendes Problem eines einzigen abstrakten Teilchens auf einem hochvernetzten Graphen mit exponentiell (in N) vielen Vertices im Fock-Raum abgebildet [5]. Hierbei entspricht jeder Vertex des Graphen einer Konfiguration von Teilchen in lokalisierten Zuständen des nichtwechselwirkenden Problems. Die Vernetzung des Graphen resultiert in der Störungstheorie aus der Wechselwirkung der Teilchen.

Das abstrakte Teilchen auf dem Graphen ist nun auf jedem Vertex des Graphen einem anderen Potential (das sich aus der physikalischen Unord-



nung im ursprünglichen Problem ergibt) unterworfen und kann durch diese Unordnung auf dem Graphen Anderson-lokalisiert werden. Eine Rücktransformation dieser Lösung auf das physikalischen Vielteilchenproblem zeigt, dass dann auch die physikalischen Teilchen lokalisiert sind. Weiterführende Details dazu finden sich in [23] sowie den Referenzen darin.

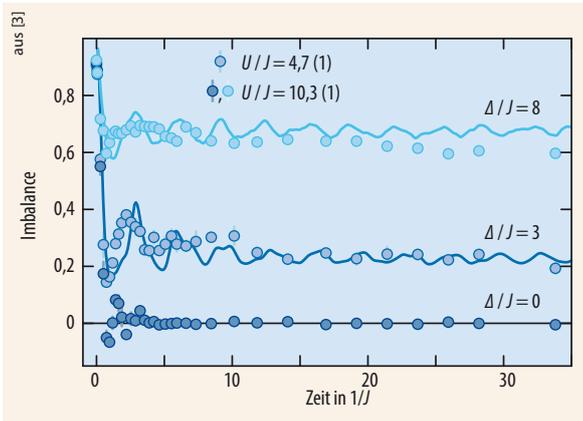


Abb. 3 Schmelzen einer anfänglich präparierten Ladungsordnung bei niedriger Unordnung Δ sowie Vielteilchenlokalisierung bei starker Unordnung im Experiment. J ist die Hüpfamplitude von Teilchen zum Nachbarplatz und U die Kontaktwechselwirkung zweier Teilchen. In einem eindimensionalen optischen Gitter wurde eine Ladungsdichtewelle als Anfangszustand präpariert, bei dem sich die Besetzungszahl der geraden Gitterplätze stark von derjenigen der ungeraden Plätze unterscheidet (Imbalance). In einem thermalisierten System sollte sie nach langer Zeit verschwinden, was bei Vielteilchenlokalisierung nicht der Fall ist.

die Verschränkungsentropie in thermalisierenden Systemen aufgrund der Eigenzustands-Thermalisierungshypothese zwingend extensiv, d. h. proportional zum Volumen des Teilsystems. Denn einen Teil des Systems kann man als Wärme- und Teilchenbad auffassen, das den anderen Teil thermalisiert. Die Verschränkungsentropie des Teilsystems entspricht in diesem Fall der von Neumann-Entropie eines thermischen Zustandes, die zwingend extensiv ist.

Ausbreitung von Information

Der Transport von Teilchen ist wichtig, um das thermodynamische Gleichgewicht zu erreichen. Intuitiv ist klar, dass ein Anfangszustand, in dem sich z. B. alle Teilchen in einer Hälfte des Systems befinden, nicht im Gleichgewicht ist und die Teilchen sich verteilen müssen, um dorthin zu gelangen. Dies ist nur eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Thermalisierung, da für einen thermischen Endzustand alle möglichen (hinreichend lokalen und damit zumindest theoretisch messbaren) physikalischen Observablen mit der Vorhersage der thermodynamischen Ensembles übereinstimmen müssen – gemäß unserer Definition der Thermalisierung in isolierten Systemen.

Daher bietet es sich an, die Ausbreitung von Information in thermalisierenden Quantensystemen zu untersuchen. Denn das Erreichen des Gleichgewichts geht notwendigerweise mit dem Verlust lokaler Information über den Anfangszustand einher. Methoden aus der Theorie der Quanteninformation eignen sich besonders, um diesen Vorgang quantitativ zu untersuchen. Dazu kann man etwa das System in zwei Teile aufteilen und die Verschränkungsentropie zwischen ihnen betrachten. Diese Größe stellte sich bereits als

gutes Unterscheidungsmerkmal für stationäre Zustände der Schrödinger-Gleichung zwischen Vielteilchenlokalisierung und thermischen Zuständen heraus, jetzt wollen wir die Entwicklung der Verschränkungsentropie nach einem Quantenquench von einem „einfachen“, möglichst unverschränkten Zustand aus betrachten.

Die Verschränkungsentropie ist anfangs sehr klein und wächst mit der Zeit an, da immer mehr Prozesse über die Grenze der Subsysteme hinweg Verschränkung aufbauen – z. B. dadurch, dass es zu späteren Zeiten mehr Möglichkeiten gibt, wie Teilchen von einem Subsystem zum anderen gelangen können, aber auch viel kompliziertere kollektive Prozesse. In einem endlichen, thermalisierenden System wächst die Verschränkungsentropie typischerweise linear mit der Zeit bis zu einem Wert, der kompatibel mit der Beschreibung ist, dass das eine Teilsystem als Wärmebad des anderen dient und die Verschränkungsentropie der thermodynamischen Entropie entspricht.

Bekannt ist bereits, dass in der vielteilchenlokalisierten Phase kein Teilchentransport stattfindet. Daher könnte man erwarten, dass auch keine Verschränkung aufgebaut wird. Das ist in Systemen ohne Wechselwirkung tatsächlich so. Erstaunlicherweise wächst jedoch die Verschränkungsentropie in wechselwirkenden Systemen logarithmisch in der Zeit an [15, 16]. Diese numerische Beobachtung ließ sich durch eine Beschreibung von MBL-Systemen als effektive integrable Systeme durch effektive lokale Erhaltungsgrößen erklären und ist ein reiner Wechselwirkungseffekt [17]. Die Theorie lokaler Erhaltungsgrößen ist in der Lage, zahlreiche Phänomene der MBL-Phase zu beschreiben, auch den Zusammenbruch der Eigenzustands-Thermalisierungshypothese, da Zustände mit verschiedenen Quantenzahlen der Erhaltungsgrößen vollständig unabhängig voneinander sind und daher bei gleicher Energie auftreten können (Abb. 4). Dadurch können lokale Operatoren stark unterschiedliche Erwartungswerte in Eigenzuständen des Hamiltonians haben, obwohl sie fast die gleiche Energie aufweisen. Dieses Verhalten ist ein deutlicher Kontrast zur

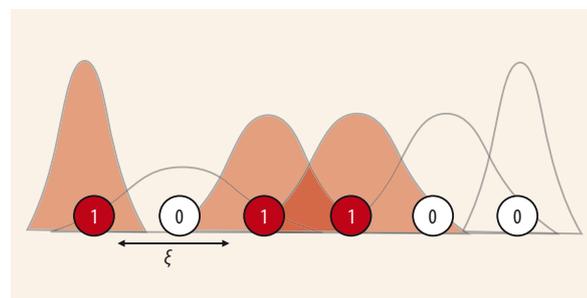


Abb. 4 In der vielteilchenlokalisierten Phase bildet sich eine extensive Anzahl an lokalen Erhaltungsgrößen (Local Integrals Of Motion, LIOM) heraus, die bei spinlosen Gitterfermionen zwei mögliche Quantenzahlen, z. B. 0 (weiß) und 1 (rot) annehmen. Die möglichen Kombinationen der Quantenzahlen aller LIOMs entsprechen exakt der Zahl aller Eigenzustände des Systems. Dabei sind die erhaltenen Operatoren lokal, d. h. der Beitrag von Operatoren im Abstand r vom Lokalisierungszentrum eines LIOMs ist exponentiell klein $\propto \exp(-r/\xi)$, wobei ξ die Lokalisierungslänge beschreibt.

Eigenzustands-Thermalisierungshypothese. Ebenso kann das logarithmische Wachstum der Verschränkungsentropie ausgehend von einem Produktzustand als Dephasierung der Phasen der lokalen Erhaltungsgrößen gelten, die exponentiell schwach mit dem Abstand zueinander wechselwirken (Abb. 4).

MBL-Systeme sind als robust integrable Systeme mit lokalen Erhaltungsgrößen zu verstehen, was sie fundamental von Bethe-Ansatz integrablen Systemen unterscheidet, in denen eine kleine Störung die Erhaltungsgrößen zerstört. In Systemen mit Vielteilchenlokalisierung werden die Erhaltungsgrößen durch kleine Störungen zwar deformiert, bleiben aber exakt erhalten und sind daher robust.

Phänomenologie und Beispiele

Bei starker Unordnung erreicht ein beliebiger Anfangszustand also nie das thermische Gleichgewicht, da der Transport von Teilchen sowie die Ausbreitung von Quanteninformation sehr stark unterdrückt sind. In MBL-Systemen existieren quasilokale Erhaltungsgrößen, die lokale Information über den Anfangszustand für alle Zeiten speichern können. Sie hängen von der Unordnungsconfiguration ab, existieren aber stets ab einer kritischen Unordnungsstärke. Bei schwacher Unordnung bewegen sich Teilchen diffusiv, während sich Information ballistisch ausbreitet und sich dadurch rasch ein Gleichgewichtszustand einstellt.

Dieser dynamische Phasenübergang äußert sich in einer schlagartigen Änderung der Struktur der stationären Zustände der Schrödinger-Gleichung bei einer kritischen Unordnungsstärke, die quantitativ vom System abhängt. Bei schwacher Unordnung verhalten sich Eigenzustände des Hamilton-Operators bei gleicher Energie in Bezug auf lokale Observable sehr ähnlich und erfüllen die Eigenzustands-Thermalisierungshypothese, während sie diese bei starker Unordnung verletzen. Damit ändert sich an der kritischen Unordnung auch das Skalierungsverhalten der Verschränkungsentropie von Eigenzuständen, die als Ordnungsparameter dienen kann [18]. Der Phasenübergang findet dabei abhängig von der Energiedichte von einer thermischen Gleichgewichtsphase zu einer MBL-Nichtgleichgewichtsphase statt, wobei numerische Ergebnisse auf eine Koexistenz von thermischen und vielteilchenlokalisierten Zuständen am kritischen Punkt hindeuten [18].

Vielteilchenlokalisierung ist ein spannendes Quantenphänomen, das durch Wechselwirkungseffekte entsteht und eine neue Nichtgleichgewichtsphase der Materie darstellt. Sie ist unter anderem für die Stabilisierung exotischer Nichtgleichgewichtsphasen, zum Beispiel von Zeitkristallen, verantwortlich. Bei letzteren handelt es sich um eine neue dynamische Phase periodisch getriebener Quantensysteme, die sich durch ein zeitlich periodisches Wiederaufleben eines Anfangszustandes mit einer vielfachen Frequenz des periodischen Antriebs auszeichnet [19].

Weitere experimentelle Realisierungen stellen Stickstoff-Fehlstellen in Diamanten dar, in denen eine kritische Thermalisierung aufgrund der langreichweitigen Wechselwirkung auftritt, sowie Systeme mit nuklearen Spins. Eine der großen Herausforderungen bei der experimentellen Untersuchung von Vielteilchenlokalisierung ist, dass die realen Systeme nie komplett von der Umgebung abgekoppelt sind. Somit treten nach langen Zeiten immer extrinsische Prozesse auf, welche die Vielteilchenlokalisierung zerstören. Daher ist die langsame Dynamik des Systems nur bedingt zu beobachten. Unter welchen Umständen Vielteilchenlokalisierung in schwach an die Umgebung gekoppelten Systemen auftritt, wird aktuell untersucht und ist ein wichtiger Baustein zum Verständnis des Phänomens im Kontext von Festkörpern, in denen beispielsweise Gitterschwingungen als Wärmebad dienen.

Literatur

- [1] D. J. Luitz et al., Phys. Rev. B **91**, 081103 (2015)
- [2] I. Bloch et al., Rev. Mod. Phys. **80**, 885 (2008)
- [3] M. Schreiber et al., Science **349**, 842 (2015)
- [4] P. W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958)
- [5] D. M. Basko et al., Annals of Physics **321**, 1126 (2006)
- [6] I. V. Gornyi et al., Phys. Rev. Lett. **95**, 206603 (2005)
- [7] V. Oganesyan und D. A. Huse, Phys. Rev. B **75**, 155111 (2007)
- [8] A. Pal und D. A. Huse, Phys. Rev. B **82**, 174411 (2010)
- [9] F. Pietracaprina et al., arXiv:1803.05395 (2018)
- [10] V. Khemani et al., Phys. Rev. Lett. **116**, 247204 (2016)
- [11] P. Bordia et al., arXiv:1704.03063 (2017)
- [12] H. P. Lüschen et al., arXiv:1612.07173 (2016)
- [13] S. A. Parameswaran et al., Annalen der Physik **529**, 7 (2017)
- [14] B. Bauer und C. Nayak, J. Stat. Mech. **2013**, P09005 (2013)
- [15] M. Znidaric et al., Phys. Rev. B **77**, 064426 (2008)
- [16] J. H. Bardarson et al., Phys. Rev. Lett. **109**, 017202 (2012)
- [17] M. Serbyn et al., Phys. Rev. Lett. **110**, 260601 (2013)
- [18] X. Yu et al., Phys. Rev. B **94**, 184202 (2016)
- [19] M. Knap, Physik Journal, Juni 2017, S. 22
- [20] J. M. Deutsch, Phys. Rev. A **43**, 2046 (1991)
- [21] M. Srednicki, Phys. Rev. E **50**, 888 (1994)
- [22] M. Rigol et al., Nature **452**, 854 (2008)
- [23] F. Alet und N. Laflorencie, Comptes Rendus Physique (2018) 10.1016/j.crhy.2018.03.003

DIE AUTOREN

David J. Luitz (FV Tiefe Temperaturen, Dynamik, Statistische Physik) studierte Physik in Augsburg und Würzburg, wo er 2013 promovierte. Nach einem Postdoc-Aufenthalt am CNRS in Toulouse ging er 2015 als Gordon and Betty Moore Fellow an die University of Illinois at Urbana-Champaign. Er kehrte 2017 als Marie Curie-Stipendiat nach Europa zurück und arbeitete an der TU München, bevor er 2018 als Gruppenleiter ans MPI für Physik komplexer Systeme (MPI-PKS) wechselte. Er untersucht quantenmechanische Vielteilchensysteme mit numerischen Methoden.

Frank Pollmann studierte Physik in Braunschweig und Stockholm und promovierte 2006 am MPI-PKS. Nach einem Postdoc-Aufenthalt an der University of California at Berkeley kehrte er 2011 ans MPI-PKS als Gruppenleiter zurück. 2016 wurde er als Associate Professor an die TU München berufen. Er beschäftigt sich mit verschiedenen Problemen der Festkörpertheorie.

