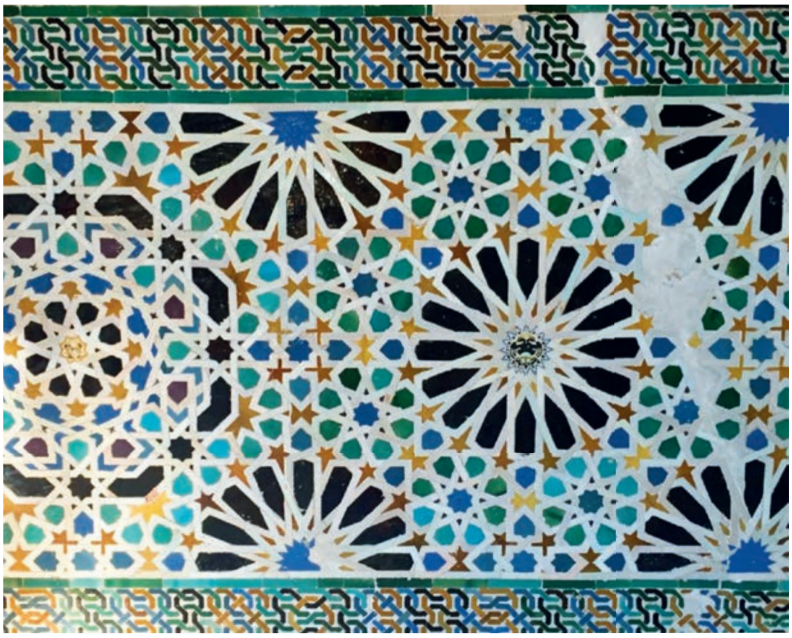
VIELTEILCHENPHYSIK

Symmetrien lokalisieren

Für lokale Symmetrien lassen sich verallgemeinerte Theoreme herleiten mit möglichen Anwendungen in verschiedenen wellenmechanischen Systemen.

Peter Schmelcher und Fotis K. Diakonos

Symmetrien sind fundamentale Eckpfeiler der modernen Physik, nicht zuletzt wegen ihrer Bedeutung für die Erhaltungssätze oder die zulässige Form der Wechselwirkung bei Elementarteilchen. Doch in komplexen Systemen zeigen sich oft in verschiedenen begrenzten Raumbereichen unterschiedliche Symmetrien. Ist es möglich, die Theorie der globalen Symmetrien auf solche Systeme mit lokalen Symmetrien zu erweitern? Tatsächlich lassen sich mathematische Instrumente finden, die lokale Symmetrien beschreiben können und neue Perspektiven bieten, etwa für Anwendungen in der Wellenpropagation.



Auch in den Ornamenten der spanischen Alhambra finden sich zahlreiche lokale Symmetrien.

Anordnungen von Objekten, die einer Symmetrie bzw. einem Muster folgen, faszinieren den Betrachter von jeher. Man denke nur an die Vielzahl von Ornamenten, welche sich in Werkzeugen, Alltagsgegenständen bis hin zu Gemälden und Bauwerken der unterschiedlichen historischen Epochen vom Altertum bis zur Neuzeit wiederfinden. Die Motive reichen von einer rein geometrischen und abstrakten Charakteristik bis zu einer naturalistischen Ornamentik. Regelmäßig angeordnete Objekte, welche einer komplexen Kombination von Symmetrien gehorchen, sind von einer ganz eigenen Ästhetik, die das Auge des Beobachters nahezu magisch anzieht.

Für die Entwicklung der modernen Naturwissenschaften stellt die Symmetrie eines der grundlegenden Konzepte dar. Symmetrien liefern ein Rezept, den Aufbau von Systemen zu analysieren und deren Struktur zu klassifizieren. Sie sind unmittelbarer Teil des Abstraktions- und Erkenntnisprozesses. Historisch hat dies seinen Ausgangspunkt in der Gravitationstheorie (Kepler, Galilei, Newton) mit ihrem engen Bezug zur Astronomie und konkret der Bewegung der Planeten um das Zentralgestirn genommen: Die Gravitationstheorie ist invariant unter Galilei-Transformationen. Die Forderung der Invarianz der Naturgesetze, d. h. ihrer Nichtänderung unter entsprechenden Symmetrien, hat sich als einer der mächtigsten Grundpfeiler der modernen Physik erwiesen. Symmetrien sind eng mit entsprechenden Eigenschaften der grundlegenden Komponenten eines Systems verbunden, seien es die Eigenschaften von Raum und Zeit selbst oder die der Wechselwirkung der fundamentalen Bausteine der Materie. Das Vorhandensein von Symmetrien hat unmittelbare Konsequenzen für die Eigenschaften und die Dynamik physikalischer Systeme. Beispiele hierfür sind die Invarianz unter Translationen (Homogenität des Raumes), welche zur Impulserhaltung führt, die Invarianz unter Rotationen (Isotropie des Raumes), welche die Drehimpulserhaltung liefert, und die Invarianz unter Zeittransformationen (Homogenität der Zeit), welche mit der Energieerhaltung verbunden ist.

Mit der Entwicklung der Quantenmechanik und den Quantenfeldtheorien im 20. Jahrhundert kam den Symmetrien eine noch zentralere Rolle zu, welche in den Eichtheorien kulminierte. Dort bestimmt die zugrundeliegende Symmetriegruppe der Elemen-

KOMPAKT

- Symmetrien beeinflussen ganz entscheidend die Eigenschaften und Dynamik physikalischer Systeme.
- Viele Systeme besitzen keine globale Symmetrie, dafür aber eine Vielzahl an lokalen Symmetrien.
- Lokale Symmetrien führen zu so genannten invarianten Stromkorrelatoren, die auf die Symmetriebrechung hindeuten und das Paritäts- und Bloch-Theorem für globale Symmetrien verallgemeinern.
- Lokalsymmetrische Systeme eröffnen vielversprechende Perspektiven in Akustik, Optik oder Quantenmechanik.

Prof. Dr. Peter Schmelcher, Zentrum für Optische Quantentechnologien, Universität Hamburg, Luruper Chaussee 149, 22761 Hamburg, **Prof. Dr. Fotis K. Diakonos**, Department of Physics, University of Athens, 15771 Athen, Griechenland

 1617-9439/16/0404-39

tarteilchen die zulässige Form der Wechselwirkung. Besitzt ein quantenphysikalisches System eine gewisse Symmetrie, so hat dies weitreichende Konsequenzen für das mögliche Verhalten dieses Systems. Das mathematische Werkzeug hierfür ist die gruppentheoretische Beschreibung, die der Symmetrie zugrunde liegt. In der Quantenmechanik ist dies eng verknüpft mit den resultierenden Konstanten der Bewegung (z. B. dem Drehimpuls im Falle der Rotationssymmetrie), die mit dem entsprechenden Hamilton-Operator kommutieren. Dies führt zu den „guten“ Quantenzahlen wie der magnetischen Quantenzahl des Bahndrehimpulses oder des Spins. Von besonderer Bedeutung ist, dass sich ein gemeinsamer Satz von Eigenzuständen des Hamilton-Operators und der symmetriebedingten Erhaltungsgröße finden lässt.

In der Tat sind viele wichtige Aussagen allein aufgrund der Anwesenheit der Symmetrie möglich, ohne die jeweilige Bewegungsgleichung, d. h. die nichtrelativistische Schrödinger-Gleichung, zu lösen. Dies möchten wir an zwei Beispielen von diskreten Symmetrien veranschaulichen. Im Fall einer Inversionssymmetrie im Hamilton-Operator eines quantenmechanischen Systems sind positive und negative Parität $\psi(x) = \pm\, \psi(-x)$ für die entsprechenden Eigenzustände möglich, die symmetriebedingt eine Beziehung zwischen der Wellenfunktion an einem Punkt und seinem Punktspiegelbild herstellen. Für einen periodischen Kristall, dessen Hamilton-Operator eine diskrete Translationssymmetrie besitzt, ergibt sich das berühmte Bloch-Theorem $\psi(x+L) = e^{ikL} \cdot \psi(x)$, das eine Phasenbeziehung zwischen der Wellenfunktion an einem Punkt und seinem um eine Periode L translatierten Bildpunkt herstellt. Die Bloch-Wellenfunktion lässt sich dann zerlegen in eine Phase und einen periodischen Anteil $\psi(x) = e^{ikx} \cdot u_k(x)$ mit $u_k(x+L) = u_k(x)$.

Zu betonen ist an dieser Stelle, dass die jeweiligen Randbedingungen diese Symmetrien respektieren sollten. Symmetriebedingte Vorhersagen sind überaus mächtig, wie an der Spektroskopie atomarer und molekularer Systeme zu sehen ist: Hier bestimmen die Symmetrien strukturelle Eigenschaften des Spektrums wie Entartungen und die Auswahlregeln für elektromagnetische Übergänge.

Von globalen zu lokalen Symmetrien

Unser Zugang zu Symmetrien ist oft geprägt durch eine Ja-oder-Nein-Sichtweise, gemäß der eine Symmetrie für ein gegebenes physikalisches System entweder gültig ist oder nicht. Diese Art des Zugangs zu physikalischen Systemen reicht von Atomen mit ihrer exakten Rotationssymmetrie und Molekülen mit ihren Punktgruppen bis hin zu idealen Kristallen mit ihren Translationsgruppen, die wir allesamt als globale Symmetrien bezeichnen möchten. In der Natur weisen komplexere oder zusammengesetzte Systeme jedoch Mechanismen der Symmetriebrechung auf. Insbesondere wenn eine Symmetrie nicht mehr global, sondern nur noch in einem eingeschränkten Raumbereich vorhanden ist, ist von einer lokalen Symmetrie die Rede. Strukturell komplexe, ausgedehnte Systeme besitzen oft eine Vielzahl solcher lokaler Symmetrien bzw. lokaler Ordnungen (**Abb. 1**). Ein Molekül mit einer sehr geringen oder gar keiner exakten globalen Symmetrie kann lokal durchaus (approximative) Symmetrien haben. Letztere können z. B. Inversionssymmetrien, diskrete Rotations- oder Translationssymmetrien sein. Selbstorganisierte, an Oberflächen angelagerte Strukturen oder Quasikristalle weisen viele Kombinationen dieser lokalen Symmetrien auf.

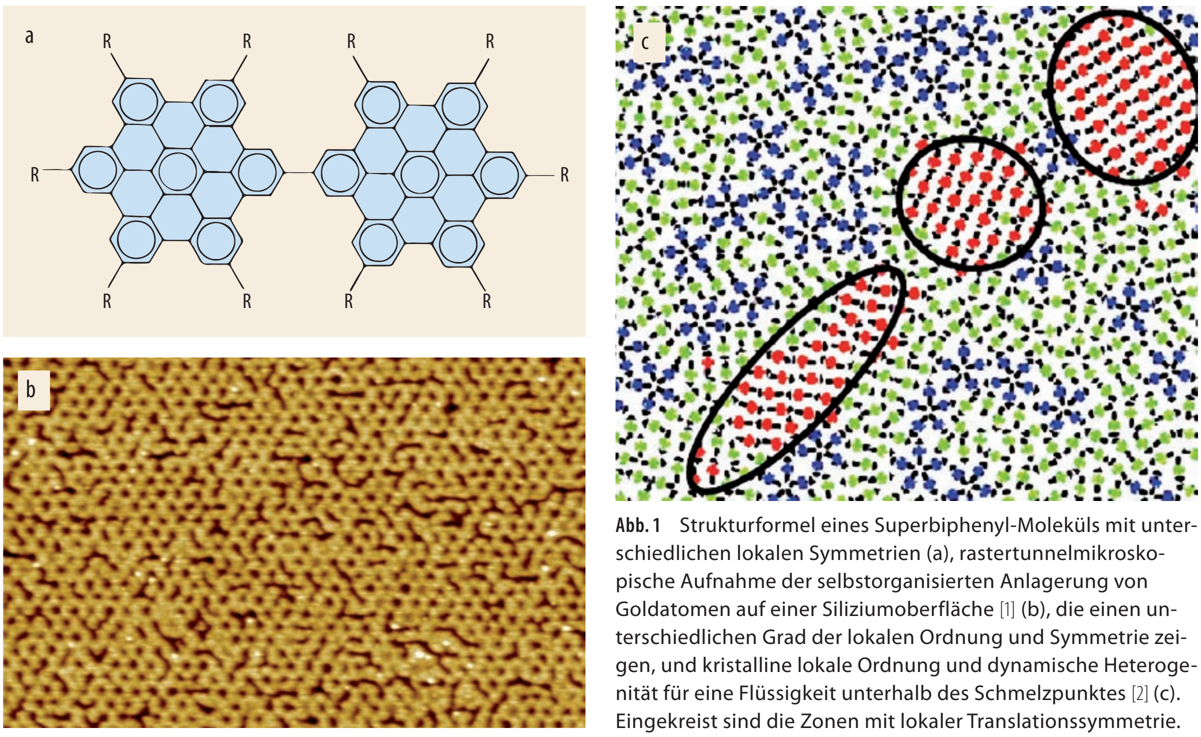


Abb. 1 Strukturformel eines Superbiphenyl-Moleküls mit unterschiedlichen lokalen Symmetrien (a), rastertunnelmikroskopische Aufnahme der selbstorganisierten Anlagerung von Goldatomen auf einer Siliziumoberfläche [1] (b), die einen unterschiedlichen Grad der lokalen Ordnung und Symmetrie zeigen, und kristalline lokale Ordnung und dynamische Heterogenität für eine Flüssigkeit unterhalb des Schmelzpunktes [2] (c). Eingekreist sind die Zonen mit lokaler Translationssymmetrie.

Im Gegensatz zu den umfassenden und mächtigen physikalischen und mathematischen Werkzeugen, welche uns zur Verfügung stehen, um wellenmechanische und insbesondere quantenmechanische Systeme mit globalen Symmetrien zu beschreiben, stellt sich die Frage nach einer Theorie der lokalen Symmetrien. Aufgrund der Einschränkung der Gültigkeit der jeweiligen Symmetrien auf begrenzte räumliche Bereiche ist intuitiv zu erwarten, dass die Randbedingungen eine wichtige Rolle spielen werden, da die globale Symmetrie gebrochen ist. Der existierende Formalismus globaler Symmetrien lässt sich somit nicht direkt anwenden, und die Betrachtung von entsprechenden Kommutatoren z. B. des Hamilton-Operators, mit der jeweiligen Symmetrieoperation führt zu Rand- oder Oberflächentermen, die nicht klar zu interpretieren sind. Dies gilt übrigens auch für den Fall, dass symmetrieverletzende Randbedingungen eine globale Symmetrie brechen. Beispiele hierfür sind ein endlicher, durch Oberflächen begrenzter Kristall oder die einseitige Wellenstreuung an einem reflektionssymmetrischen Objekt.

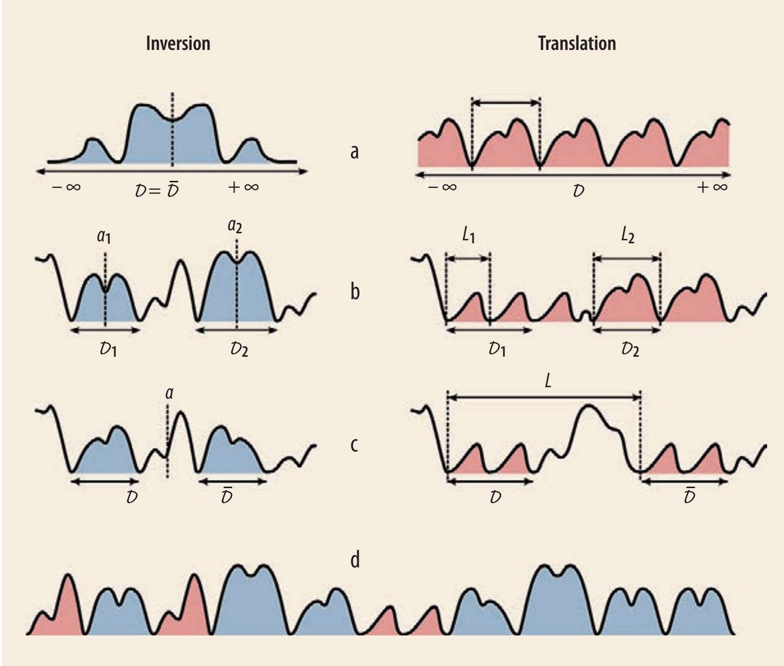


Abb. 2 Unterschiedliche Arten von Symmetrieoperationen (Inversion und Translation), wobei die Bereiche D auf $\bar{D}$ abgebildet werden: Globale Symmetrie (a), einfache lokale Symmetrie (b), lokale Symmetrien mit Lücken (c), vollständige lokale Symmetrien (d).

Invarianten lokaler Symmetrien

Die zentrale Frage lautet nun, ob es im Fall lokaler Symmetrien noch eine aussagekräftige Theorie gibt oder ob die Tatsache, dass die Symmetrie global gebrochen ist, keine weiteren Fortschritte zulässt. In diese Problemstellung reiht sich die Frage ein, ob eine Verallgemeinerung etwa des Paritäts- oder des Bloch-Theorems existiert, falls nur noch lokale, d. h. auf einen Raumbereich eingeschränkte, Inversions- oder Translationssymmetrien vorliegen. Im Folgenden werden wir diese Fragen für wellenmechanische Systeme (Quantenmechanik, Akustik und Optik) beantworten, indem wir eine Theorie der Invarianten für lokalsymmetrische Systeme entwickeln. Unser Ausgangspunkt ist die Wellengleichung

$$\Psi''(x) + U(x)\,\Psi(x)=0, \tag{1}$$

welche die Helmholtz-Gleichung mit einem komplexen Wellenfeld $\Psi(x)$ und einem inhomogenen Wellenvektor $k^2(x) = U(x)$ darstellt, der sich als ein verallgemeinertes Potential interpretieren lässt. Diese Gleichung beschreibt insbesondere die Quantenmechanik und liefert die stationäre Schrödinger-Gleichung für $U(x)=(2m/\hbar^2)(E-V(x))$, wobei m die Masse des Quantenteilchens ist, E der Energieeigenwert des Eigenzustandes $\Psi(x)$ und $V(x)$ das Potential. Gleichung (1) beschreibt in der paraxialen Approximation auch die Propagation elektromagnetischer Wellen durch optische Vielschichtsysteme, für welche $U(x)=\omega^2 n^2(x)/c^2$ gilt, mit dem räumlich variierenden Brechungsindex $n(x)$, der Frequenz ω und der Lichtgeschwindigkeit c.

Die Propagation von Schallwellen lässt sich ebenfalls durch eine erweiterte Helmholtz-Gleichung beschreiben, wenn man die Verluste hinzunimmt. Die Komplexität in der obigen Wellengleichung ist in der Inhomogenität des verallgemeinerten Potentials $U(x)$ enthalten, die eine Vielzahl von lokalen Symmetrien aufweisen kann, welche die unterschiedlichen Raumbereiche aufeinander abbilden (**Abb. 2**). Hierbei handelt es sich um diskrete Symmetrien in einer Raumdimension, d. h. Inversions- und Translationssymmetrien. Im Falle einer globalen Symmetrie wird der gesamte Raumbereich auf sich selbst abgebildet. Die adressierten Symmetrieoperationen (Inversion und diskrete Translation) sind linear und bilden jeden Punkt x auf seinen Bildpunkt $\bar{x}$ ab mittels $F\colon\ x \to \bar{x} = F(x) = \sigma x + \rho$, wobei $(\sigma, \rho) = (1, L), (-1, 2\alpha)$ für Translationen und Inversionen gilt. Wenn wir nun für das Potential eine lokale Symmetrie annehmen, wenn also $U(x)=U(F(x))$ gilt, so verschwindet unter Ausnutzung der Helmholtz-Gleichung (1) die Größe $\Psi(\bar{x})\Psi''(x)-\Psi(x)\Psi''(\bar{x})$. Diese lässt sich jedoch als totale räumliche Ableitung schreiben und damit integrieren. Dies führt uns auf folgende Aussage

$$Q = \frac{1}{2i}\left[\sigma\,\Psi(x)\Psi'(\bar{x}) - \Psi(\bar{x})\Psi'(x)\right] = C, \tag{2}$$

wobei C eine Konstante ist. Q ist damit eine Invariante in dem Raumbereich, in dem die jeweilige lokale Symmetrie gilt. Q ist per Konstruktion ein Zweipunktkorrelator, da diese Größe vom Ort x und seinem Bildort $\bar{x}$ abhängt. Die physikalische Einheit von Q ist die eines Stromes. Dabei handelt es sich jedoch nicht wie üblich um einen Teilchenstrom, sondern die Konstanz dieser Größe stellt eine Beziehung zwischen den Werten des Wellenfeldes an zwei symmetrieverbundenen Punkten her. In der Optik liefert Gl. (2) also eine Aussage über das elektrische Feld an zwei unterschiedlichen Raum-punkten. Wiederholt man das obige Vorgehen unter Ausnutzung des komplex konjugierten Wellenfeldes, so ergibt sich zudem

$$\tilde{Q} = \frac{1}{2i}\,[\sigma\,\Psi^*(x)\Psi'(\bar{x}) - \Psi(\bar{x})\Psi'^*(x)] = C', \qquad (3)$$

also eine zweite Invariante. Unsere erste Erkenntnis ist also, dass lokale Symmetrien – im Rahmen der Existenz der obigen Invarianten – Bedingungen an die Struktur des Wellenfeldes stellen. Die Brechung der globalen Symmetrie hinterlässt also eine manifeste Signatur in Form der Konstanz der invarianten Ströme Q, $\tilde{Q}$ in beschränkten Raumbereichen.

Nun stellt sich die Frage nach der weitergehenden Bedeutung dieser Stromkorrelatoren Q, $\tilde{Q}$. Um diese Frage zu beantworten, werden wir im Folgenden zeigen, dass sie im Fall lokaler Symmetrien auf eine Verallgemeinerung des Paritätstheorems und Bloch-Theorems führen [3]. Zunächst lässt sich zeigen, dass unsere Stromkorrelatoren mit dem erhaltenen globalen Strom $J = 1/(2i)[\Psi^*(x)\Psi'(x) - \Psi(x)\Psi'^*(x)]$ verbunden sind. In der Quantenmechanik ist dies der Wahrscheinlichkeitsstrom. In der Optik ist J mit dem Poynting-Vektor verbunden. Dann ergibt sich

$$|\tilde{Q}|^2 - |Q|^2 = \sigma J^2. \qquad (4)$$

Die Absolutwerte der Stromkorrelatoren Q und $\tilde{Q}$ sind also nicht unabhängig, sondern über Gleichung (4) mit dem Absolutwert des Stromes J verbunden. Wir möchten an dieser Stelle nochmals betonen, dass Q und $\tilde{Q}$ Zweipunktgrößen sind, wohingegen J eine lokale Größe ist, welche nur von einem Ortsargument abhängt. Gleichung (4) impliziert, dass $|\tilde{Q}| > |Q|$ für lokale Translationen ist und $|\tilde{Q}| < |Q|$ für lokale Inversion oder Parität.

Verallgemeinertes Paritäts- und Bloch-Theorem

Wir erinnern daran, dass sich im Falle von globalen Symmetrien das Paritäts- und Bloch-Theorem als eine Art Abbildungsprinzip unter der jeweiligen Symmetrieoperation (Inversion und Translation) auffassen lässt: Das Wellenfeld am Ausgangspunkt und Bildpunkt sind durch Phasen miteinander verbunden. Angesichts der Existenz der Invarianten Q und $\tilde{Q}$ im Falle der lokalen Symmetrien stellt sich die Frage, ob ein verallgemeinertes Abbildungsprinzip existiert, welches das Wellenfeld zwischen den beiden Punkten verknüpft. Zunächst führen wir ganz allgemein und formal die zugehörige Symmetrieoperation $\hat{O}_F\,\Psi(x) = \Psi(\bar{x})$ ein. Nun lässt sich zeigen, dass in der Tat die folgende Beziehung gilt

$$\hat{O}_F\,\Psi(x) = \frac{1}{J}\,[\tilde{Q}\Psi(x) - Q\,\Psi^*(x)] \qquad (5)$$

für alle $x \in \mathcal{D}$ (**Abb. 1**). Gleichung (5) stellt genau diese Verbindung zwischen der Wellenfunktion an einem Punkt und seinem symmetrietransformierten Bildpunkt für den Fall lokaler Symmetrien her. Der Schlüssel zu dieser Abbildung sind, wie aus Gl. (5) hervorgeht, die invarianten Ströme Q und $\tilde{Q}$. In der Tat zeigt ein nichtverschwindender Wert für den invarianten Stromkorrelator Q an, dass die Symmetrie zwar global gebrochen ist, aber lokal im Raum beibehalten wird.

Kehren wir zu dem Fall einer globalen Symmetrie zurück, so kann man zeigen, dass $Q = 0$ gilt und damit Gl. (5) in eine Eigenwertgleichung übergeht, wie sie uns wohlvertraut ist. Insbesondere folgt dann $\tilde{Q}/J = \pm 1$ für die Parität und $\tilde{Q}/J = e^{ikL}$ für die Translation. Damit ist gezeigt, dass das Paritäts- und Bloch-Theorem als Spezialfall in Gleichung (5) im Falle einer globalen Symmetrie enthalten ist. Damit haben wir eine Verall-

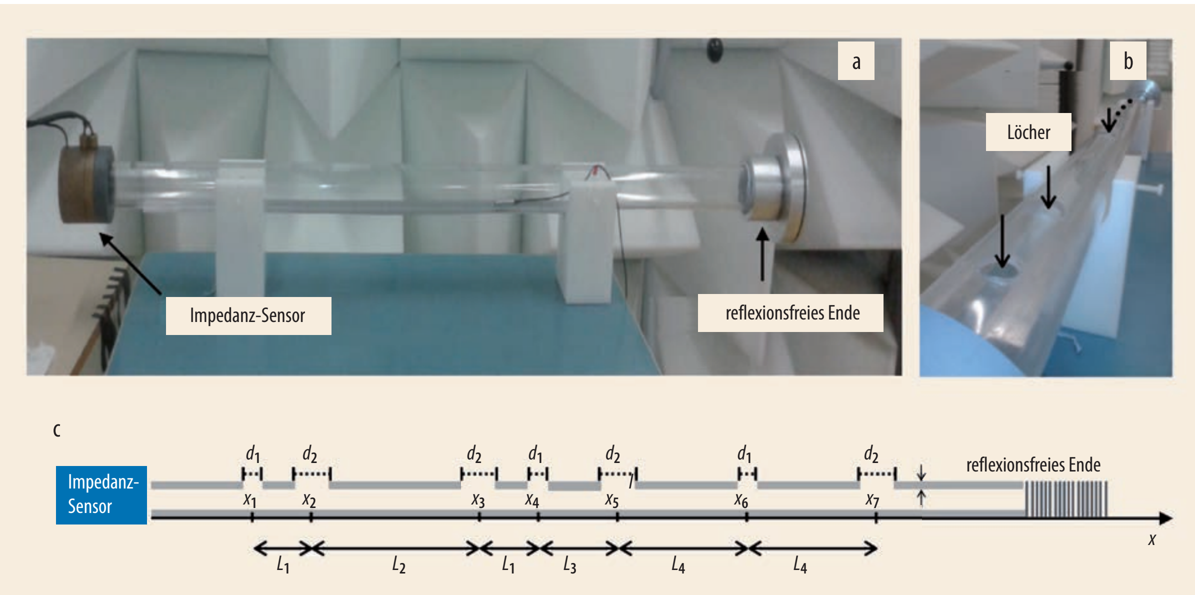


Abb. 3 In einem experimentellen Aufbau mit einem aperiodischen akustischen Wellenleiter ließ sich erstmals die Invarianz der Stromkorrelatoren nachweisen (a, b). Das Druckfeld wird abhängig von der Schallfrequenz vermessen. Der Wellenleiter besteht aus zwei lokalsymmetrischen Einheiten, die durch die Position der Löcher festgelegt sind (c). Schallquelle ist ein piezo-elektrischer Signaltongeber, welcher im Impedanzsensor eingebaut ist. Der Sensor erlaubt es, das Transmissionsdiagramm zu berechnen und das Druckfeld zu messen.

gemeinerung dieses Theorems für lokale Symmetrien gefunden [3], wobei Q die Rolle eines Symmetriebrechungsparameters spielt.

Bemerkenswert an der obigen Abbildungsrelation (5) ist zudem, dass diese auch für den Fall einer lokalen Symmetrie mit Lücken gilt (**Abb. 2c**). Dies bedeutet, dass dieser Abbildungszusammenhang unabhängig vom Potentialbereich zwischen den beiden Domänen, welche über eine lokale Symmetrie zusammenhängen, besteht. „Wie von Geisterhand gesteuert" bestimmen die Invarianten abhängig von der Wellenfunktion in der Ausgangsdomäne quasi die Struktur der Wellenfunktion in einer entfernten Domäne. Die Werte der invarianten Ströme Q und $\tilde{Q}$ hängen jedoch sehr wohl von diesem eingeschlossenen Potentialbereich ab. Falls lokalsymmetrische Einheiten den gesamten Raum abdecken (**Abb. 2d**), resultiert ein vollständig lokal symmetrisches System, das domänenweise konstante Ströme Q und $\tilde{Q}$ besitzt. Diese Art von „Materialien" schlägt eine Brücke zwischen den periodischen Kristallen und den ungeordneten Systemen. Quasikristalle, welche ebenfalls Teil dieser Brücke sind, besitzen eine langreichweitige Ordnung. Man kann zeigen, dass sie durch eine quasiperiodische Dynamik im lokalen Symmetrieraum gebildet werden [4].

Experimenteller Nachweis

Neben der Quantenmechanik beschreibt die Helmholtz-Gleichung (1) auch die Propagation von akustischen und optischen Wellen. In einem Experiment mit akustischen aperiodischen Wellenleitern gelang es erstmals, die Invarianz der Stromkorrelatoren Q und $\tilde{Q}$ nachzuweisen (**Abb. 3**). Der Schallwellenleiter besteht aus einer Röhre mit Öffnungen, deren Positionen entsprechend lokaler Inversionssymmetrien angeordnet sind. Im akustischen Aufbau sind sowohl die Phase als auch die Amplitude des Schallfeldes direkt experimentell zugänglich, und somit lassen sich die komplexen Q und $\tilde{Q}$ vollständig rekonstruieren [5].

Insbesondere in der akustischen Wellenpropagation spielen Verluste eine erhebliche Rolle. Die obige Theorie der Invarianten ist also zu verallgemeinern auf den Fall, dass akustische Strahlung an den Streuern und viskothermale Effekte vorhanden sind. Der Schallwiderstand der Löcher wird dann eine komplexe Funktion, und damit wird das Potential von der Form $U(x)=U_R(x)+iU_I(x)$ sein, wobei sich R und I auf den Real- und Imaginärteil beziehen (**Abb. 3**). Dies führt zu dem erstaunlichen Resultat, dass der Stromkorrelator Q selbst bei Verlusten invariant ist. Eine entsprechende Integralgleichung löst in dem Fall die Abbildungsrelation (5) ab.

Experimente für gekoppelte, optische Wellenleiter befinden sich zurzeit im Aufbau und sind besonders vielversprechend. Hier gibt es eine Vielzahl von Möglichkeiten, die Lichtpropagation und die Verluste zu kontrollieren. Dies beinhaltet die Positionierung der Wellenleiter nach nahezu beliebigen lokalsymmetrischen Anordnungen, die Variation der Kopplungen der Wellenleiter wie auch die flexible Präparation des Anfangszustandes und Detektion des Endzustandes.

Resonanzen und ihre Kontrolle

Ist es möglich, mittels lokaler Symmetrien die Wellenpropagation signifikant zu beeinflussen oder gar zu kontrollieren? Unter diese allgemeine Fragestellung fallen insbesondere die Möglichkeiten der Lokalisierung und Transmission von Wellen. Wir konzentrieren uns hier auf die Streuung von Wellen an einem lokalsymmetrischen Potential, das aus einer lokal inversionssymmetrischen Anordnung von Schichten mit unterschiedlichem Brechungsindex besteht. Insbesondere fragen wir uns, ob eine perfekte, d. h. vollständige Transmission der Welle möglich ist (**Abb. 4**). Wenn dies gelingt, ist das Material quasi durchsichtig für die Welle. Die folgenden Aussagen gelten allgemein im Rahmen der Helmholtz-Gleichung, beziehen sich jedoch konkret auf die Streuung von Licht an photonischen Vielschichtstrukturen.

Es zeigt sich, dass die invarianten Stromkorrelatoren Q der Schlüssel zu dem Auftreten von Resonanzen perfekter Transmission sind. In der Tat gilt eine Summenregel für die invarianten Stromkorrelatoren, die – wenn sie erfüllt ist – perfekte Transmission garantiert. Vielmehr noch, diese Summelregel liefert eine

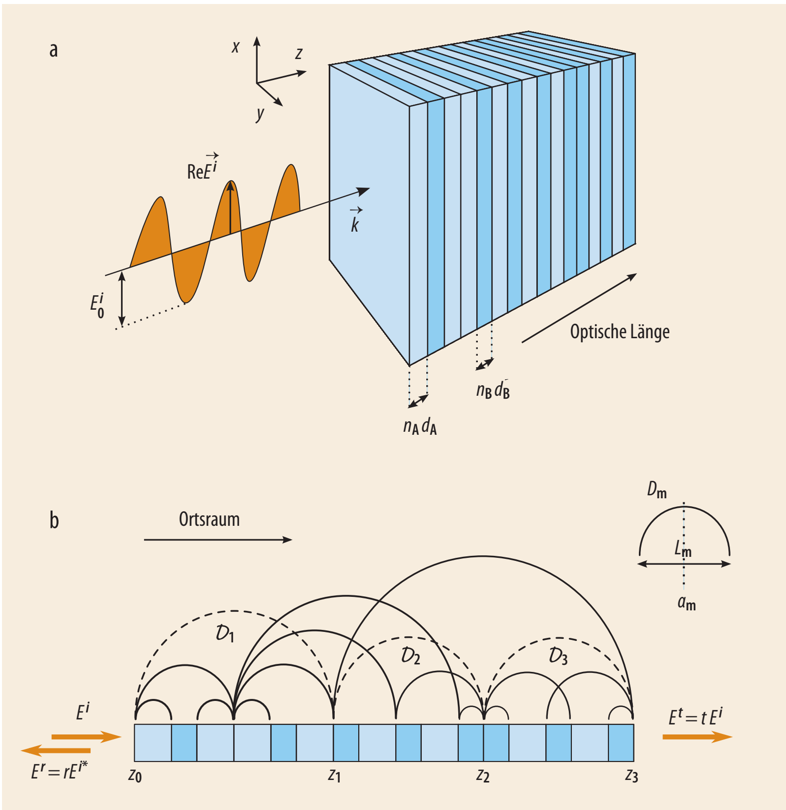


Abb. 4 Diese aperiodische photonische Vielschichtstruktur besteht aus zwei Materialien A (hellblau) und B (mittelblau), die abwechselnd angeordnet sind (a). Eine monochromatische Lichtwelle wird beim Durchgang gestreut. Der eindimensionale Querschnitt dieser Struktur verdeutlicht die lokalen Inversionssymmetrien (b).

Klassifikation der Resonanzen: Es gibt symmetrische Resonanzen, die (zumindest partiell) dem lokalsymmetrischen Profil folgen, und asymmetrische Resonanzen, für die das Wellenfeld nicht offensichtlich mit den lokalen Symmetrien zusammenhängt. Das Verständnis dieses Zusammenhangs zwischen den Stromkorrelatoren und den Resonanzen liefert den Schlüssel, um die Transmission zu steuern. Basierend auf der Summenregel und dem lokalsymmetrischen Aufbau beispielsweise einer photonischen Vielschichtstruktur (**Abb. 4**) kann man ein Konstruktionsprinzip für lokalsymmetrische Schichtstrukturen ableiten. Die resultierende Gesamtstruktur besitzt mehrere Resonanzen perfekter Transmission an den gewünschten Energien [6]. Licht kann also für bestimmte Frequenzen verlustfrei propagieren und für andere Frequenzen blockiert werden.

Neue Perspektiven

Aus der obigen Theorie der invarianten Ströme ergeben sich zahlreiche weitergehende Aspekte und Anwendungen. Wichtig ist zu bemerken, dass sich dieser Formalismus übertragen lässt auf den gesamten Lösungsraum der Helmholtz-Gleichung, welche ja eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist und damit (unabhängig von den Randbedingungen) zwei fundamentale Lösungen besitzt. Die lokal verfügbaren Stromkorrelatoren liefern eine lokale Basis für die Wellenpropagation in den jeweiligen lokalsymmetrischen Bereichen, woraus sich eine globale Lösung konstruieren lässt. Dieses Vorgehen ersetzt das Bloch-Theorem für einen periodischen Kristall. Damit ist es möglich, Eigenzustände lokal symmetrischer Systeme analog der Bandstrukturrechnungen von Kristallen zu berechnen [7].

Hat man Systeme mit einer gestörten lokalen Symmetrie, oder ist zunächst gar nicht bekannt, wie die zugrundeliegende Potentiallandschaft aussieht, so stellen die obigen Stromkorrelatoren eine hervorragende Möglichkeit dar, dies nachzuweisen. Das Auffinden einer (verborgenen) lokalen Symmetrie oder die Abweichung von einer exakten lokalen Symmetrie äußert sich direkt und sehr sensitiv in dem räumlichen Verhalten der Stromkorrelatoren. Jede Abweichung von der Konstanz zeigt eine Abweichung von der lokalen Symmetrie an. Umgekehrt deutet natürlich die Konstanz auf die Anwesenheit einer solchen Symmetrie. Die Stromkorrelatoren sind also quasi Detektoren für lokale Symmetrien. Dabei ist zu betonen, dass das zugrundeliegende Wellenfeld im Allgemeinen in keinster Art und Weise den lokalen Symmetrien des Potentials direkt folgt, d. h. seinen Symmetrien gehorcht.

Die invarianten Ströme existieren nicht nur für die Helmholtz-Gleichung (1), sondern auch für eine Reihe anderer relevanter physikalischer Situationen. Zu diesen gehören zeitgetriebene periodische Systeme [9], Wellengleichungen mit PT-Symmetrie [8], wobei P für Parität und T für Zeitumkehrinvarianz stehen, oder auch diskrete gekoppelte Systeme. Im Falle periodisch zeitgetriebener Systeme beinhaltet die entsprechend verallgemeinerte Größe eine Zeitmittelung über eine Periode.

Es gibt eine Reihe vielversprechender Perspektiven lokalsymmetrischer wellenmechanischer Systeme, sei es in der Akustik, Optik oder auch Quantenmechanik. Zuallererst stellt sich die Frage nach neuen Effekten in der Wellenpropagation über die oben demonstrierte Kontrolle der Transmissionsresonanzen hinaus. Kann man z. B. einen neuen Mechanismus für die Lokalisierung von Wellen erreichen? Wir haben uns hier auf eindimensionale Wellengleichungen konzentriert. Die Verallgemeinerung auf den höherdimensionalen Fall oder auch die Miteinbeziehung von Wechselwirkung zwischen Teilchen sind offene, sehr reizvolle Fragen. Tatsache ist, dass der Zugang über die invarianten Stromkorrelatoren sehr vielversprechend ist und uns in der Zukunft hoffentlich noch viele Überraschungen bescheren wird.

Literatur

[1] *F. R. Rahsepar* et al., G.I.T. Imaging & Microscopy 3/2013, S. 19
[2] *H. Shintani* und *H. Tanaka*, Nature Physics **2**, 200 (2006)
[3] *P. Kalozoumis* et al., Phys. Rev. Lett. **113**, 050403 (2014)
[4] *C. Morfonios* et al., Nonl. Dyn. **78**, 71 (2014)
[5] *P. A. Kalozoumis* et al., Phys. Rev. B **92**, 014303 (2015)
[6] *P. A. Kalozoumis* et al., Phys. Rev. A **88**, 033857 (2013)
[7] *V. E. Zampetakis* et al., arXiv:1507.05336
[8] *P. A. Kalozoumis* et al., Phys. Rev. A **90**, 043809 (2014)
[9] *T. Wulf* et al., arXiv:1511.05051

DIE AUTOREN

Peter Schmelcher (FV Atomphysik, Molekülphysik) studierte Physik an der Universität Heidelberg und promovierte 1990 am Institut für Physikalische Chemie. Er habilitierte sich nach einem Postdoc-Aufenthalt an der University of California Santa Barbara an der Universität Heidelberg. Seit 2010 ist er Professor für Theoretische Physik an der Universität Hamburg und leitet die Arbeitsgruppe „Fundamentale Prozesse in der Quantenphysik" am Zentrum für Optische Quantentechnologien.

Fotis Diakonos studierte Physik an der Universität Athen und promovierte 1988 am Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg. Seit 1998 ist er permanentes Mitglied und seit 2012 Associate Professor der Fakultät für Physik der Universität Athen.

