

# Ein Grundstein der Atomphysik

Die gängige Lehrbuchinterpretation des Franck-Hertz-Experiments lässt viele Fragen offen.

Robert E. Robson, Malte Hildebrandt und Ronald D. White

Das Franck-Hertz-Experiment aus dem Jahre 1914 fehlt in keinem Lehrbuch, zeigt es doch anschaulich die quantisierten Eigenschaften der Atome und legt damit den Grundstein für die moderne Atomphysik. Allerdings versagt die traditionelle Interpretation, wenn mehrere angeregte Niveaus ins Spiel kommen. Nur eine Analyse aus dem Blickwinkel der elementaren kinetischen Gastheorie erlaubt es, den korrekten Zusammenhang zwischen mikroskopischen Vorgängen, die den Gesetzen der Quantenmechanik unterliegen, und den im Labor gemessenen makroskopischen Größen herzustellen.

Die bedeutenden Experimente des späten 19. und frühen 20. Jahrhunderts zur Untersuchung von elektrischen Strömen in Gasen leiteten eine neue Epoche in der Geschichte der modernen Physik ein. Besonders bemerkenswert in diesem Zusammenhang sind die Experimente, die James Franck und Gustav Hertz ab dem Jahr 1911 in Berlin durchführten. Bis 1914 untersuchten sie die Wechselwirkung langsamer Elektronen mit neutralen Gasatomen [1]. Ihr Ziel war eine allgemeine „kinetische Theorie der Elektronen in Gasen“, da Franck Aussagen von J. S. Townsend zum Elektronenstreuungsprozess bezweifelte.

Franck und Hertz verbesserten die experimentellen Methoden, mit denen unter anderem Philipp Lenard die Kathodenstrahlen in Gasen untersucht hat. Die bahnbrechende Untersuchung in Quecksilberdampf, 1914 veröffentlicht und üblicherweise als „das“ Franck-Hertz-Experiment bezeichnet, interpretierten sie zunächst als Messung der Ionisierungsspannung von Quecksilber [2]. Erst nach weiteren Experimenten zur Lichtemission von Quecksilberdampf erkannten beide, dass es sich um ein Anregungsniveau des Quecksilberatoms handelt [3]. Für ihre Arbeiten erhielten Franck und Hertz den Nobelpreis für Physik des Jahres 1925.

Das Experiment selbst ist heute als Standardprodukt im Fachhandel erhältlich, und Generationen von Physikstudenten haben es im Praktikum durchgeführt, wahrscheinlich primär aus pädagogischen Gründen. Die entsprechenden Erklärungen in den üblichen Lehrbüchern (z. B. [4]) oder auf heutzutage unzähligen Internetseiten sind jedoch sehr vereinfacht, und die wahre Vielfalt der involvierten Physik wurde bis vor einigen Jahren übersehen [5, 6].

AIP Emilio Segre Visual Archives, Born Collection



James Franck (1882 – 1964, links) und Gustav Hertz (1887 – 1975) begegneten sich 1911 am Physikinstitut der Friedrich-



Wilhelms-Universität Berlin, wo sie ihr bahnbrechendes Experiment durchführten.

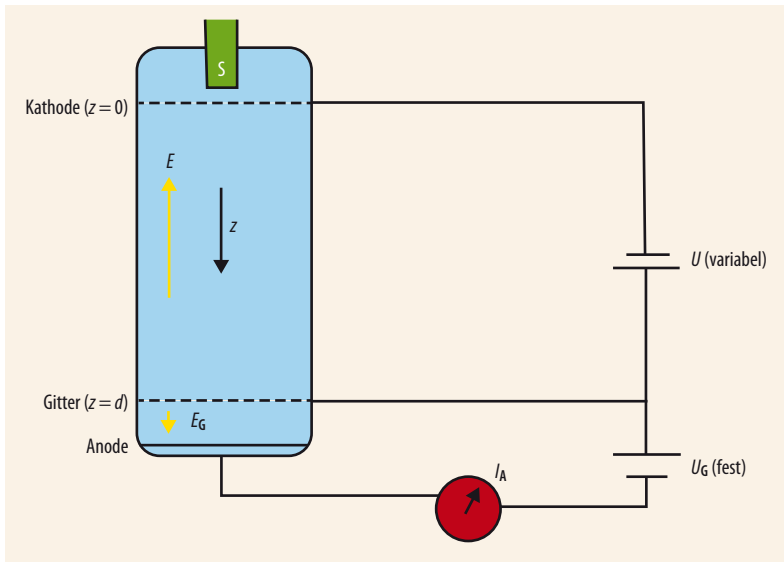
A.B. Lagrelius & Westphal / AIP Emilio Segre Visual Archives

Gegenüber der von Franck und Hertz verwendeten zylindrischen Geometrie wird heute meist ein Aufbau mit ebener Elektrodenanordnung vorgezogen (Abb. 1). Die Kathode emittiert Elektronen mit einer konstanten Rate in den gasgefüllten Drifttraum, wo sie beim Durchlaufen einer Potentialdifferenz zum Kontrollgitter in elastischen und inelastischen Stößen an den Gasatomen streuen. Eine Bremsspannung zwischen Kontrollgitter und Anode erlaubt nur Elektronen ausreichender Energie, die Anode zu erreichen und damit zum Anodenstrom  $I_A$  beizutragen. Als Funktion der Spannung  $U$  oszilliert dieser Strom, wobei die Abstände  $\Delta U$  zwischen den Strommaxima üblicherweise direkt einem quantisierten atomaren Energieniveau zugeordnet werden.

## KOMPAKT

- Das Franck-Hertz-Experiment illustriert mit dem oszillierenden Anodenstrom in anschaulicher Weise die quantisierten Energieniveaus der Atome. Dabei bestimmen im Allgemeinen nicht nur ein, sondern mehrere Energieniveaus den Abstand zwischen den Strommaxima.
- Im Gegensatz zur traditionellen Lehrbuchklärung haben die Elektronen in der Driftregion eine breite Energieverteilung und eine nahezu isotrope Geschwindigkeitsverteilung.
- Eine eingehende theoretische Analyse auf der Grundlage der kinetischen Theorie zeigt, wie das Franck-Hertz-Experiment mit dem zur Boltzmann-Gleichung gehörenden Eigenwertproblem verbunden ist.

Prof. Robert E. Robson, James Cook University, Townsville, Australien, Dr. Malte Hildebrandt, Paul Scherrer Institut, CH-5232 Villigen, Schweiz und Prof. Ronald D. White, James Cook University, Townsville, Australien



**Abb. 1** Beim Franck-Hertz-Experiment ist der Bereich zwischen den parallelen Elektroden mit dem zu untersuchenden Gas gefüllt. Die Quelle S emittiert mit einer konstanten Rate Elektronen, die im elektrischen Feld  $E = U/d$  den Bereich

$0 \leq z \leq d$  zwischen Kathode und Kontrollgitter durchlaufen. Hinter diesem Gitter können aufgrund der Bremsspannung  $U_G$  nur Elektronen mit einer Energie größer als  $e U_G$  die Anode erreichen und zum Strom  $I_A$  beitragen.

Zu ihrem Experiment mit Quecksilberdampf haben Franck und Hertz 1914 drei Messkurven  $I_A(U)$  veröffentlicht [2] – deutlich ist der Wert  $\Delta U \approx 4,9 \text{ V}$  zu erkennen (**Abb. 2**). Nachdem sie diesen Wert zunächst als Ionisierungsspannung des Quecksilberatoms interpretiert hatten, erkannten sie später, dass die Ursache ein diskretes Anregungsniveau der Energie  $\varepsilon_1 = e \Delta U = 4,9 \text{ eV}$  sein müsse. Dies schlossen sie aus der von angeregten Quecksilberatomen emittierten Strahlung mit der Wellenlänge  $\lambda = 253,6 \text{ nm}$ . Mit der Beziehung  $\varepsilon_1 = hc/\lambda$  lässt sich daraus entweder der gemessene Wert  $\varepsilon_1$  bestätigen oder die Plancksche Konstante  $h$  auf unabhängige Weise abschätzen.

Das Bohrsche Atommodell kannten Franck und Hertz zunächst nicht. Erst Jahre später erkannten sie die volle Tragweite ihrer Ergebnisse, wie ihre letzte gemeinsame Veröffentlichung zeigt [3]. Es war Bohr selber, der bereits 1915 die Bedeutung des Franck-Hertz-Experiments für die Bestätigung seines Atommodells erkannte.

### Die Lehrbuchinterpretation

Innerhalb eines bestimmten Wertebereichs von elektrischer Spannung und Gasdruck oszilliert die mittlere Elektronenenergie  $\varepsilon(z)$  in der Driftregion zwischen Kathode und Kontrollgitter. Solch eine räumliche periodische Struktur ist ein makroskopisches Abbild von atomarer Quantisierung, und obwohl derartige Strukturen auch in anderen Experimenten auftreten [7], ist die theoretische Beschreibung des Franck-Hertz-Experiments üblicherweise sehr unzulänglich.

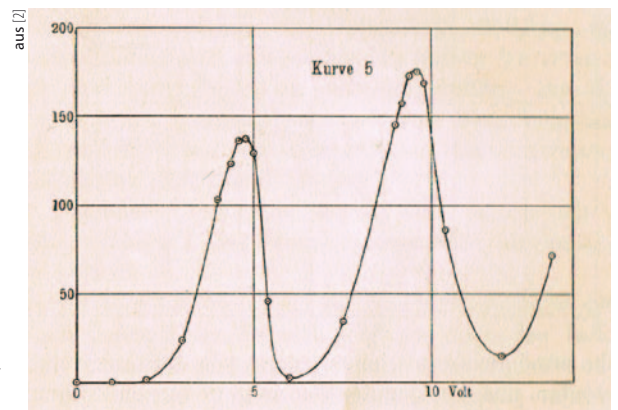
Entsprechend der Lehrbuchinterpretation startet jedes Elektron an der Kathode aus der Ruhe und wird durch das elektrische Feld  $E = U/d$  solange beschleunigt,

bis seine Energie ausreicht, um ein diskretes Energieniveau  $\varepsilon_1$  des Gasatoms anzuregen. Das Elektron verliert in diesem inelastischen Stoß seine gesamte Energie, bevor es erneut aus der Ruhe auf die Energie  $\varepsilon_1$  beschleunigt wird. Dann findet der nächste inelastische Stoß statt usw. In dieser Betrachtungsweise fluktuiert die mittlere Energie  $\varepsilon(z)$  jedes einzelnen Elektrons als Funktion der Distanz  $z$  in einer strengen Sägezahnstruktur mit einer räumlichen Periode  $\Delta z = \varepsilon_1/(eE)$ . Weiter sagt die Lehrbuchinterpretation, dass  $\Delta z$  kleiner und somit die Sägezahnstruktur enger wird, wenn  $U$  (und damit  $E$ ) steigt. Daher oszilliert die Elektronenergie  $\varepsilon(d)$  an der Position des Gitters. Für  $\varepsilon(d) > U_G$  erreicht das Elektron die Anode, sodass der Anodenstrom  $I_A$  entsprechend steigen und fallen sollte, wenn  $U$  anwächst. Bei einem Inkrement

$$\Delta U = \varepsilon_1 / e \tag{1}$$

entsteht genau ein zusätzlicher interner Zyklus, und dies muss also dem Abstand der Strommaxima entsprechen. Diese Überlegung gilt in der Tat für jede oszillierende Struktur  $\varepsilon(z)$  und nicht nur für die Sägezahnstruktur aus dem Lehrbuch. Wir werden später sehen, dass die „Wellenlänge“  $\varepsilon_1 = eE \Delta z$  im Allgemeinen nicht nur genau einem einzelnen diskreten atomaren Anregungsniveau entspricht.

Für das Originalexperiment von Franck und Hertz (**Abb. 2**) suggeriert die Lehrbuchinterpretation, dass das Quecksilberatom genau ein diskretes Anregungsniveau von 4,9 eV hat. Dies ist tatsächlich sehr nahe am Wert 4,89 eV, der allerdings dem zweiten Anregungsniveau entspricht (Übergang  $6^1S_0 \rightarrow 6^3P_1$ ). Das erste Anregungsniveau ( $6^1S_0 \rightarrow 6^3P_0$ ) mit  $\varepsilon_1 = 4,67 \text{ eV}$  scheint somit übersprungen. Da dieses unterste Niveau metastabil ist, würde man keine korrespondierende Emissionslinie im Spektrum erwarten, aber warum sollte sich dieses Niveau nicht auf die  $I_A$ - $U$ -Kurve auswirken? Zu dieser Frage hat G. Friedrich Hanne den Hinweis gegeben, dass der Streuquerschnitt für die Anregung des ersten Energieniveaus von Quecksilber sehr klein ist (**Tab. 1** und **Abb. 3**) [8]. Wir werden später sehen, warum auch der Übergang  $6^1S_0 \rightarrow 6^3P_2$  mit einer Schwellenenergie von 5,46 eV die Messung nicht signifikant beeinflusst.



**Abb. 2** Aus dieser für Quecksilberdampf gemessenen Strom-Spannungs-Kurve haben Franck und Hertz  $\Delta U = 4,9 \text{ V}$  für die Abstände der Maxima extrahiert.

Streueigenschaften von Quecksilber			
$J$	Übergang	Schwellenenergie in eV	max. Streuquerschnitt in $10^{-20} \text{ m}^2$
0	$6s6p^3P_0$	4,67	0,4 / 0,5
1	$6s6p^3P_1$	4,89	3,5 / 5,0
2	$6s6p^3P_2$	5,46	4,0

Tab. 1 Schwellenenergien und (ungefähre) maximale Streuquerschnitte für die Anregung von Quecksilber durch inelastische Stöße (zwei Zahlen deuten auf zwei Maxima im Streuquerschnitt hin, siehe Abb. 3).

Bei Leybold Didactic ist eine Franck-Hertz-Messapparatur mit Neon als Standardprodukt erhältlich.<sup>1)</sup> Die damit gemessene  $I_A$ - $U$ -Kurve suggeriert gemäß der Lehrbuchinterpretation ein Anregungsniveau bei  $\epsilon_1 = e \Delta U \approx 18 \pm 1 \text{ eV}$  (Abb. 4). Selbst wenn man dies als  $^3S_1$ -Niveau mit 18,4 eV interpretieren würde – und wir glauben nicht, dass dies stimmt –, stellt sich die gleiche Frage wie zuvor: Warum „wählt“ das Experiment anscheinend nur ein spezielles Anregungsniveau aus und übergeht die anderen (Tab. 2 und Abb. 5)? Ein Blick auf die Elektronstreuquerschnitte für Neon zeigt, dass das bei Quecksilber angeführte Argument hier nicht gilt. Wie lässt sich daher der gemessene Wert  $\epsilon_1$  interpretieren? Die begleitende Anleitung von Leybold erwähnt dieses Problem und ergänzt, dass die Wahrscheinlichkeit für die jeweiligen Prozesse eine Rolle spielt. In der Tat sind die Streuquerschnitte für jeden möglichen Übergang zu berücksichtigen.

### Periodische Strukturen im Driftraum

Nach den bisherigen Erkenntnissen stellt sich die grundlegende Frage: Wie ist der im Franck-Hertz-Experiment gemessene Wert  $\epsilon_1$  im Hinblick auf die diskreten Energieniveaus der Gasatome zu interpretieren? Die Antwort erfordert zunächst eine eingehende Betrachtung der physikalischen Grundlagen für die Bewegung der Elektronen im Driftraum. Dabei gilt es zunächst, den riesigen elastischen Streuquerschnitt in Quecksilber zu berücksichtigen (Abb. 3). Elektronen können daher im Driftraum zunächst sehr oft elastisch streuen, bevor sie in einer inelastischen Streuung ein Atom anregen. Dies hat zwei wesentliche Folgen: Zum einen werden die Bewegungsrichtungen der Elektronen zunehmend gleich verteilt, sodass die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion  $f(z, v)$  der Elektronen im Driftraum nahezu isotrop ist. Zum anderen entsteht durch die vielen Stöße eine breite Energieverteilung – obwohl Elektronen nur einen kleinen Anteil ihrer Energie in elastischen Stößen mit Atomen austauschen ( $\sim 2m/m_0$  mit der viel größeren Atommasse  $m_0$ ) [6]. Die Elektronen bilden also nicht – wie in Lehrbüchern erklärt – einen unidirektionalen, monoenergetischen Strahl, sondern einen „Schwarm“ [10]. Daher sind gleichzeitig unterschiedliche inelastische Prozesse möglich, und der gemessene Wert  $\epsilon_1$  sollte der mittleren Energie der Anregungsniveaus gewichtet mit der Energieverteilungsfunktion der Elektronen entsprechen.

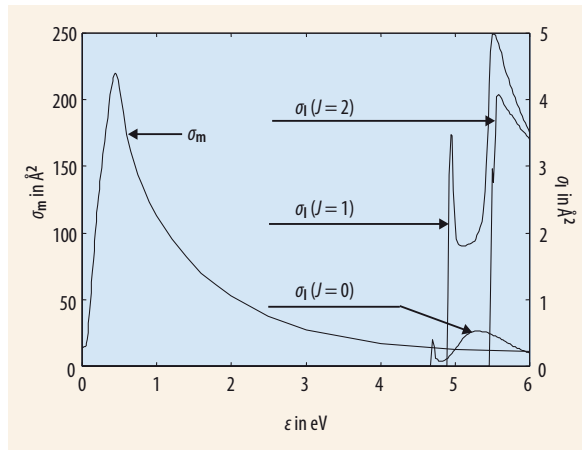


Abb. 3 In Quecksilber ist der elastische Streuquerschnitt  $\sigma_m$  für Elektronen viel größer als die drei relevanten inelastischen Streuquerschnitte  $\sigma_1$ .

Obwohl periodische Strukturen von Elektroneneigenschaften in der kinetischen Gastheorie seit langem bekannt sind, wurde das Franck-Hertz-Experiment bislang nicht in diesem Zusammenhang diskutiert. Eine Verbindung besteht zum „steady state Townsend-Experiment“, bei dem es die sog. Photonenfluss-Methode [7] erlaubt, die durch Abregung emittierten Photonen nachzuweisen und damit das räumliche Profil direkt und störungsfrei zu beobachten. Aus den entsprechenden Profilen für Neon lässt sich  $\epsilon_1 = e E \Delta z \approx 18,5 \text{ eV}$  extrahieren [7] (Abb. 6). Obwohl bei diesem Experiment weder ein Gitter vorhanden ist noch ein Strom gemessen wird, kann man es als Analogie zur Driftregion in Abb. 1 betrachten. Bei dem Vergleich mit  $\epsilon_1 \approx 18 \text{ eV}$  aus dem Franck-Hertz-Experiment muss natürlich ein möglicher Einfluss des Gitters berücksichtigt werden. Zudem ist nicht

### JAMES FRANK UND GUSTAV HERTZ

**James Franck** wurde 1882 in Hamburg geboren. Er studierte zunächst kurz in Heidelberg, bevor er zum Physikstudium an die Friedrich-Wilhelms-Universität in Berlin wechselte, wo er 1906 promovierte und 1911 habilitierte. Dort begann auch seine Zusammenarbeit mit Gustav Hertz. Für das wegweisende Experiment von 1914 erhielten beide den Nobelpreis für Physik von 1925. Zu dieser Zeit war er bereits Professor für Physik an der Universität Göttingen, wo er ein sehr aktives und einflussreiches Institut führte. 1933 legte er aus Protest gegen das „Gesetz zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums“ sein Amt nieder und emigrierte in die USA. Franck ist auch bekannt für das Franck-Condon-Prinzip und für den „Franck-Report“, eine Warnung vor dem Einsatz der Atombombe. Er starb 1964 in Göttingen [14].

**Gustav Hertz**, ein Neffe von Heinrich Hertz, wurde 1887 in Hamburg geboren. Er studierte Physik und Mathematik zunächst in Göttingen und München, und anschließend in Berlin an der Friedrich-Wilhelms-Universität, wo er 1911 promovierte. Hertz habilitierte sich 1917 und wurde, nach einer Tätigkeit bei Philips, Professor an den Universitäten Halle und Berlin. Während der Zeit des Nationalsozialismus arbeitete er bei Siemens, nach dem Krieg war er fast zehn Jahre in der Sowjetunion, bevor er 1954 zurückkehrte und Professor in Leipzig wurde. Er starb 1975 in Ost-Berlin [15].

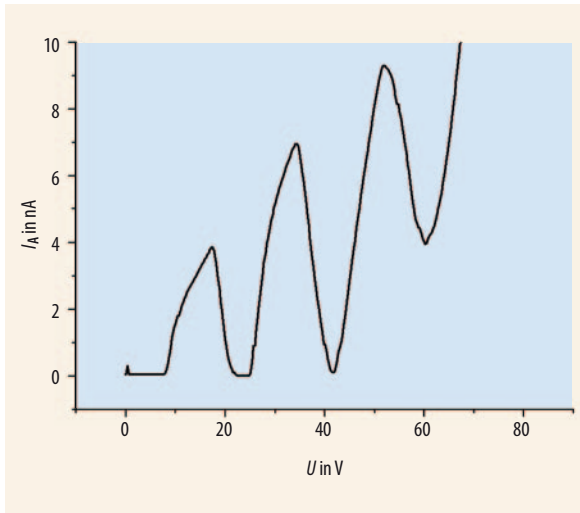


Abb. 4 Die bei  $U_G = 8 \text{ V}$  in Neon gemessene  $I_A$ - $U$ -Kurve weist eine Periode von rund 18 eV auf.

erwarten, dass beide Werte exakt übereinstimmen, da die Anregung von Atomen in metastabile Zustände nicht von der Photonenfluss-Methode erfasst wird, im Franck-Hertz-Experiment jedoch alle Streuprozesse beitragen.<sup>2)</sup> Die Autoren von Ref. [7] diskutieren ihr Resultat im Kontext der diskreten Energieniveaus von Neon (Tab. 2) und kommen zu dem Schluss, dass sich ihr gemessener Wert nur mit einer Art Gewichtung der jeweiligen Streuquerschnitte erklären lässt. Allerdings schlagen sie dazu leider keine Vorgehensweise vor.

Dieses Problem lässt sich strenggenommen nur mit den Methoden der Statistischen Mechanik von Nicht-Gleichgewichtszuständen, insbesondere der Boltzmannschen Transportgleichung im Phasenraum [11, 12], lösen. Dennoch soll zunächst auf weniger formale und damit auch weniger rechenintensive Weise aufgezeigt werden, wie die Streuquerschnitte zu gewichten sind.

### Approximierte Theorie und formale Analyse

Zunächst muss bemerkt werden, dass sich weder Franck-Hertz- noch Townsend-Experiment mit Diffusions- und Mobilitätskoeffizienten beschreiben lassen, da die Diffusionsgleichung unphysikalische Lösungen hat ([12], S. 171). Andererseits liefern allgemeine Gleichgewichts- oder „Fluid“-Gleichungen physikalisch

Streueigenschaften von Neon		
Übergang	Schwellenenergie in eV	max. Streuquerschnitt in $10^{-20} \text{ m}^2$
$2p^5 3s^3 P_2$	16,62	0,01
$2p^5 3s^3 P_1$	16,67	0,012
$2p^5 3s^3 P_0$	16,72	0,0024
$2p^5 3s^1 P_1$	16,85	0,12
$2p^5 3s^3 S_1$	18,38	0,033
$2p^5 3s^2 P$	18,97	0,026
$2p^5 3s^2 S$	19,66	0,033

Tab. 2 Schwellenenergien und (ungefähre) maximale Streuquerschnitte für die Anregung von Neon durch inelastische Stöße.

2) Alle Messgrößen in den beiden Experimenten hängen übrigens vom sog. reduzierten elektrischen Feld  $E/n_0$  (Einheit 1 Townsend =  $1 \text{ Td} = 10^{-21} \text{ V m}^2$ ) ab, das definiert wird durch das elektrische Feld  $E = U/d$  und die Teilchendichte  $n_0$ .

sinnvolle (Näherungs-)Lösungen für die Teilchenzahldichte  $n$ , die mittlere Geschwindigkeit  $v$  und die mittlere Energie  $\epsilon$  der Elektronen. Diese Größen erhält man sonst aus den entsprechenden Geschwindigkeitsmomenten der Boltzmann-Gleichung [12, 13]. Die Lösungen dieser Fluid-Gleichungen erlauben es jedoch, die Wellenlänge  $\Delta z$  der beobachteten periodischen Strukturen gut abzuschätzen [13]. Bei diesem Formalismus gehen die inelastischen Kollisionen in die Größe

$$\Omega(\epsilon) = \frac{m_0}{2m} \sum_i \sigma_i(\epsilon) \exp\left(-\frac{3\epsilon_i}{2\epsilon}\right) \quad (2)$$

ein, mit den Schwellenenergien  $\epsilon_i$  und den Streuquerschnitten  $\sigma_i$  für die Anregungen der Energieniveaus (Tab. 1, 2 für Quecksilber bzw. Neon).

Der Beitrag von einem Niveau  $i$  mit kleinem  $\sigma_i$  ist vernachlässigbar, und der exponentielle Term unterdrückt die höheren Niveaus mit  $\epsilon_i \gg \epsilon$ . Wenn nun die angelegte Spannung  $U$  (und damit  $E/n_0$  mit der Teilchendichte  $n_0$ ) erhöht wird, dann steigt auch  $\epsilon$ , sodass inelastische Prozesse mit höheren Schwellenenergien zu  $\Omega(\epsilon)$  beitragen. Ein komplexes Zusammenspiel von elastischen und inelastischen Prozessen unterdrückt jedoch den Beitrag von hohen Anregungsniveaus. Oberhalb eines kritischen Wertes von  $E/n_0$  (für Quecksilber ungefähr  $30 \text{ Td}^2$ ) verschwinden daher die periodischen Strukturen in  $\epsilon(z)$ , und das Experiment liefert keine brauchbare Information [13].

Für das Franck-Hertz-Experiment mit Quecksilber bedeutet dies, dass das dritte Niveau mit 5,46 eV bei genügend hohen Spannungen zwar zu Gl. (2) beitragen kann, dann jedoch der Wert für  $E/n_0$  zu groß ist für Oszillationen. Da zudem das niedrigste Niveau mit 4,67 eV nur mit einer vernachlässigbaren Rate angeregt ist, dominiert der Beitrag des zweiten Anregungsniveaus bei 4,89 eV.

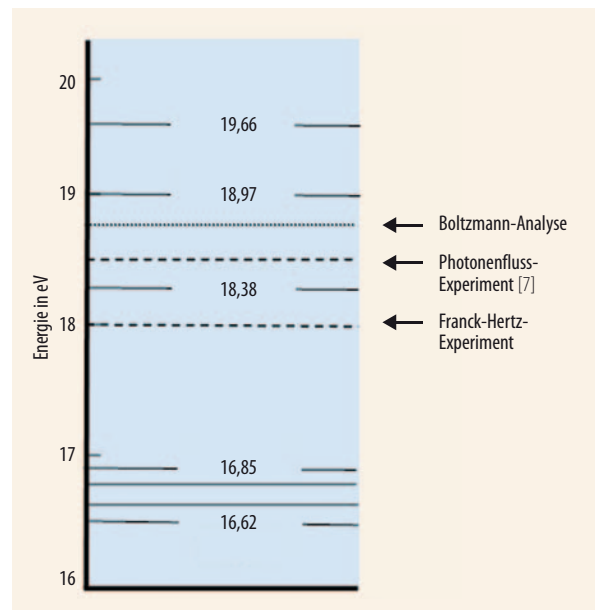


Abb. 5 Für Neon lassen sich die im Photonenfluss- [7] und Franck-Hertz-Experiment gemessenen Werte von  $\epsilon_i$  (gestrichelt) durch eine Boltzmann-Analyse verstehen (punktirt). Dazu tragen verschiedene Energieniveaus bei (durchgezogene Linien).

Für Neon ist die Situation noch komplizierter: Kein einzelner inelastischer Prozess dominiert (Tab. 2), und obwohl Gl. (2) qualitative Erkenntnisse zur möglichen Gewichtung der Prozesse geben könnte, ist für eine quantitative Aussage eine formale Analyse mithilfe der Verteilungsfunktion  $f(z, \mathbf{v})$  der Elektronen notwendig. Diese spielt auf der makroskopischen Ebene die gleiche fundamentale Rolle wie die Wellenfunktion  $\psi$  im Mikrokosmos. Beim Franck-Hertz-Experiment ergeben sich die makroskopischen Größen aus den Mittelwerten der Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}$  der Elektronen, also z. B. die Teilchenzahldichte  $n(z) = \int f(z, \mathbf{v}) d\mathbf{v}$  und die mittlere Energie

$$\varepsilon(z) = \frac{1}{n(z)} \int \frac{1}{2} m v^2 f(z, \mathbf{v}) d\mathbf{v} . \quad (3)$$

Da sich die Elektronen aufgrund des angelegten Feldes nicht in einem Gleichgewichtszustand befinden, ist  $f(z, \mathbf{v})$  sicherlich keine Maxwell-Verteilung und schon gar nicht eine Delta-Funktion, wie die traditionelle Lehrbuchinterpretation sagt. Die Verteilungsfunktion ergibt sich als Lösung der Boltzmann-Gleichung [11, 12], und zwar ohne jegliche Näherung (weder Chapman-Enskog-Methode noch Entwicklung nach Dichtegradienten). Ähnlich wie bei der Lösung der Schrödinger-Gleichung für die Wellenfunktion  $\psi$  lässt sich auch die Lösung der Boltzmann-Gleichung als Eigenwertproblem schreiben [6]. Der fundamentale Unterschied ist jedoch, dass die kinetischen Operatoren nicht selbstadjungiert sind und der Eigenwert daher komplex sein kann. Tatsächlich misst das Franck-Hertz-Experiment den imaginären Teil eines spezifischen Eigenwertes, der mit der Wellenlänge  $\Delta z$  verbunden ist.

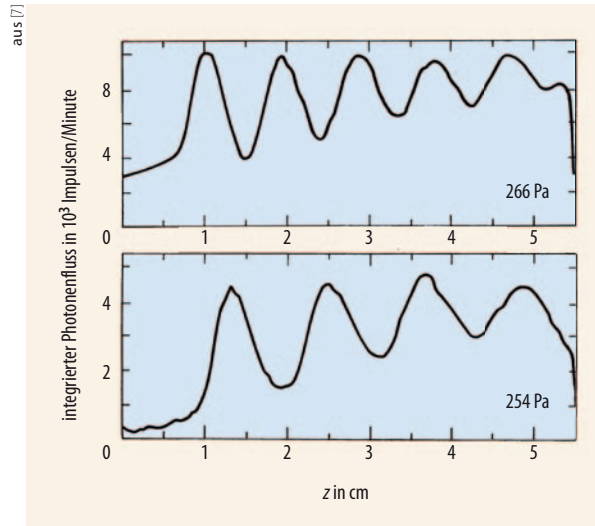


Abb. 6 Photonenfluss in einer stationären Townsend-Entladung in Neon als Funktion der Position zwischen den beiden Elektroden bei einem reduzierten elektrischen Feld  $E/n_0 = 30,4 \text{ Td}$  ( $1 \text{ Td} = 1 \text{ Townsend} = 10^{-21} \text{ V m}^2$ ) und verschiedenen Gasdrücken.

Die Beschreibung der mittleren Energie (in ausreichender Entfernung von der Quelle) ergibt sich durch Einsetzen der Formel für  $f(z, \mathbf{v})$  (Infokasten „Verteilungsfunktion und Eigenwertproblem“) in Gl. (3):

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_\infty + \varepsilon_1 \cdot \exp(-kz) \cdot \cos(2\pi z/\Delta z + \varphi) + \dots \quad (4)$$

mit dem Realteil  $k$  des Eigenwertes, der Phasendifferenz  $\varphi$  und den Konstanten  $\varepsilon_\infty$  und  $\varepsilon_1$ , die sich als entsprechende Integrale über die Eigenfunktionen  $\psi_0(\mathbf{v})$  und  $\psi_1(\mathbf{v})$  berechnen lassen.

Die Eigenschaften der Elektronen in der asymptotischen Region (Infokasten „Verteilungsfunktion ...“) sind

### VERTEILUNGSFUNKTION UND EIGENWERTPROBLEM

Die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion  $f(z, \mathbf{v})$  erhält man durch das Lösen der Transportgleichung von Ludwig Boltzmann aus dem Jahre 1872 [11]. Hierbei wird der von Wang-Chang, Uhlenbeck und de Boer modifizierte Kollisionsoperator verwendet, um die Anregung von quantisierten Energieniveaus durch inelastische Stöße einzubeziehen [12]. Wie in [6] ausgeführt, lässt sich die Lösung als eine Linearkombination von Eigenmoden  $j$  schreiben,

$$f(z, \mathbf{v}) = f_\infty(\mathbf{v}) + \text{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} S_j \exp \left[ (-k_j + i \frac{2\pi}{\Delta z_j}) z \right] \psi_j(\mathbf{v}) \right\} . \quad (i)$$

Dabei sind  $K_j = -k_j + 2\pi i/\Delta z_j$  die (komplexen) Eigenwerte und  $\psi_j(\mathbf{v})$  die Eigenfunktionen eines Eigenwertproblems, das den Boltzmann-Kollisionsoperator [6] und damit die Informationen über die Elektron-Atom-Streuquerschnitte enthält. Die Größen  $k_j$  sind die Zerfallskonstanten der  $j$ -ten Mode mit  $k_1 < k_2 < k_3 \dots$ ,  $\Delta z_j$  die entsprechenden Wellenlängen und  $f_\infty(\mathbf{v}) = S_0 \psi_0(\mathbf{v})$  die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion bei räumlicher Homogenität. Die Koeffizienten  $S_j$  ergeben sich im Prinzip aus der Verteilungsfunktion an der Quelle  $f(0, \mathbf{v})$ , aber diese ist im Allgemeinen nicht bekannt. Nahe der Quelle sind viele Terme in der Summe von Gl. (4) nötig, aber in ausreichender Entfernung entlang der Driftrichtung, wenn also  $k_1 z > 1$ , dominiert die Mode  $j = 1$  und die asymptotische Verteilungsfunktion

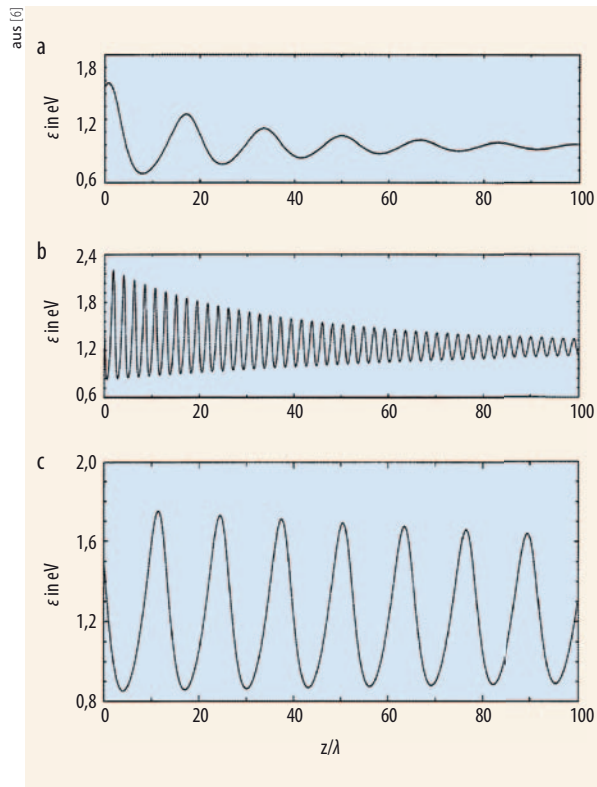
$$f(z, \mathbf{v}) \approx f_\infty(\mathbf{v}) + \text{Re} \left\{ S_1 \psi_1(\mathbf{v}) \exp \left[ (-k_1 + i \frac{2\pi}{\Delta z_1}) z \right] \right\} \quad (ii)$$

wird durch eine einzelne Zerfallskonstante  $k_1$  und eine einzelne Wellenlänge  $\Delta z_1$  beschrieben. Zur Vereinfachung sind im Haupttext diese fundamentalen Größen nur als  $k$  und  $\Delta z$  bezeichnet.

Bei den in der modernen kinetischen Theorie von Gasen allgemein üblichen Analysemethoden werden zunächst die Eigenfunktionen im Geschwindigkeitsphasenraum nach Legendre-Polynomen  $P_l(\cos\theta)$  entwickelt,

$$\psi_n(\mathbf{v}) \approx \sum_{l=0}^{l_{\max}} \psi_{n,l}(\mathbf{v}) P_l(\cos\theta) , \quad (iii)$$

mit dem Winkel  $\theta$  zwischen  $\mathbf{v}$ - und  $z$ -Achse. Die obere Grenze  $l_{\max}$  der Summenbildung wird sukzessive erhöht, bis eine bestimmte Genauigkeitsanforderung erfüllt ist. Da die elastischen Stöße dazu beitragen, dass die Richtungen der Elektronengeschwindigkeiten zufällig verteilt sind, ist der Geschwindigkeitsphasenraum nahezu isotrop und  $l_{\max} = 2$  reicht im Allgemeinen aus, um Genauigkeiten von rund einem Prozent für die gewünschten Größen zu erreichen. Anschließend werden die Koeffizienten  $\psi_{n,l}(\mathbf{v})$  im Geschwindigkeits- (oder Energie-)phasenraum entwickelt, z. B. durch das Produkt einer Maxwell-Funktion zu einer beliebigen, variablen Basistemperatur und einer Reihenentwicklung nach Sonine-Polynomen (generalisierte Laguerre-Polynome) [6, 12].



**Abb. 7** Räumliche Relaxierung der mittleren Energie von Elektronen in Quecksilber für  $E/n_0 = 5$  Td (a) bzw. 30 Td (b). Die Distanz zur Quelle ist in Einheiten der mittleren freien Weglänge  $\lambda$  aufgetragen. Ein zehnfach geringerer elastischer Streuquerschnitt, bei  $E/n_0 = 5$  Td, wirkt sich deutlich aus (c).

durch eine einzelne „Harmonische“ der Wellenlänge  $\Delta z$  bestimmt, die eine intrinsische Eigenschaft alleine der Gasatome ist. Idealerweise sollte das Gitter bei  $z = d$  in dieser Region platziert werden. Die „räumliche“ Wellenlänge  $\Delta z$  lässt sich gemäß

$$\epsilon_1 = e E \Delta z \tag{5}$$

in den korrespondierenden Energiewert  $\epsilon_1$  umrechnen, aus dem sich mit Gl. (1) die Spannungsdifferenz  $\Delta U$  ergibt.

Die berechneten Profile  $\epsilon(z)$  der mittleren Energie sind alle stetig und konsistent mit den Beobachtungen in Ref. [7], jedoch völlig anders als das Sägezahnprofil der Lehrbuchinterpretation. **Abb. 7** zeigt die Profile von Elektronen in Quecksilber für Werte von  $E/n_0$ , die dem Experiment entsprechen. Die Graphen zeigen den gesamten Driftbereich und nicht nur den Bereich mit asymptotischen Verhalten, in dem die Resultate streng genommen gelten. Die Driftstrecke entlang  $z$  ist in Einheiten einer charakteristischen mittleren freien Weglänge  $\lambda = 1/(\sqrt{2}n_0 \sigma_0)$ , mit  $\sigma_0 = 10^{-20} \text{ m}^2$ , aufgetragen. Damit lässt sich Gl. (5) umschreiben zu

$$\epsilon_1 \text{ (eV)} = 0,0707 \left( \frac{E}{n_0} \right)_{\text{Td}} \frac{\Delta z}{\lambda} \tag{6}$$

Bei  $E/n_0 = 5$  Td ergibt sich die dimensionslose Wellenlänge  $\Delta z/\lambda \approx 14$  und daraus  $\epsilon_1 \approx 4,9$  eV, in Einklang mit dem experimentellen Messwert!

Diese Rechnungen berücksichtigen die elastische Streuung über den elastischen („momentum transfer“)

Streuquerschnitt  $\sigma_m$ , der in der traditionellen Interpretation völlig fehlt. Reduziert man  $\sigma_m$  gegenüber den Werten in **Abb. 3** um einen Faktor 10, so ist – im asymptotischen Bereich, also für große  $z/\lambda$  – die Amplitude der Oszillationen merklich größer, die Dämpfung erheblich kleiner und die Wellenlänge etwas kleiner (**Abb. 7c**). Damit ist offensichtlich, dass der in Quecksilber gemessene Wert  $\epsilon_1 \approx 4,9$  eV das kombinierte Resultat verschiedener physikalischer Gegebenheiten ist.

Das Profil der mittleren Energie in Neon zeigt ähnliche Oszillationen. Hier ergibt sich  $\epsilon_1 \approx 18,8$  eV, was mit dem experimentellen Wert ( $18 \pm 1$ ) eV bzw. 18,5 eV aus der Photonenfluss-Methode [7] zu vergleichen ist. Nach den bisherigen Auführungen überrascht es nicht, dass  $\epsilon_1$  nicht einem einzelnen Anregungsniveau von Neon (**Abb. 5**) entspricht.

### Zusammenfassung

Das bedeutende Experiment von Franck und Hertz aus dem Jahre 1914 zeigt anschaulich die quantisierten Eigenschaften der Atome und bestätigte die Bohrschen Postulate von 1913, obwohl dies erst mehrere Jahre später erkannt wurde. Die Bedeutung dieses Experiments als Fundament der modernen Physik und der Entwicklung der Atomphysik ist unbestritten, auch wenn die traditionelle Interpretation dem Experiment nicht gänzlich gerecht wird.

Eine genauere Analyse zeigt, dass die Abstände der Maxima in der Strom-Spannungskurve im Allgemeinen durch mehrere atomare Anregungsniveaus bestimmt werden und dass ein grundlegendes Verständnis und eine korrekte Interpretation nur mittels der kinetischen Gastheorie möglich ist. Da die Elektronen in der Driftregion eine breite Energieverteilung und eine nahezu isotrope Geschwindigkeitsverteilung haben, lässt sich die traditionelle Interpretation nicht aufrecht erhalten, die von der Anregung nur eines einzigen Niveaus durch einen unidirektionalen Elektronenstrahl ausgeht. Die streng formale Analyse mittels der kinetischen Theorie zeigt, dass die  $I_A$ - $U$ -Kurve bei Quecksilber zwar nur vom zweiten Anregungsniveau dominiert wird, bei Neon aber – und das gilt für alle anderen Gase auch – nicht nur ein einzelnes Anregungsniveau beiträgt. Nur diese umfassende Betrachtungsweise mit der Anwendung der elementaren kinetischen Gastheorie wird dem Franck-Hertz-Experiment vollständig gerecht!

### Danksagung

Ein besonderer Dank der Autoren geht an Peter Nicoletopoulos von der Université Libre Bruxelles für die vielen anregenden Diskussionen. Die Unterstützung durch die Alexander von Humboldt Stiftung, das Paul Scherrer Institut und den Australischen Forschungsrat (ARC) sei ebenfalls dankend erwähnt. Einer der Autoren (RER) bedankt sich herzlich bei Albrecht Wagner und Bernhard Schmidt (beide DESY) für die Unterstützung und Ermutigung.

**Literatur**

- [1] A. Hermann (Hrsg.): James Franck – Gustav Hertz, Die Elektronenstreuversuche, Ernst Battenberg Verlag, München (1967)
- [2] J. Franck und G. Hertz, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 457 (1914)
- [3] J. Franck und G. Hertz, Phys. Z. **20**, 132 (1919), siehe auch: James Franck – Nobel Lecture ([www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1925/franck-lecture.html](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1925/franck-lecture.html)) und Gustav Hertz – Nobel Lecture ([www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1925/hertz-lecture.html](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1925/hertz-lecture.html))
- [4] C. Gerthsen, H. Kneser und H. Vogel: Physik, Springer-Verlag, Heidelberg (1982), S. 530
- [5] P. Nicoletopoulos, <http://users.skynet.be/P.Nicoletopoulos>
- [6] R. E. Robson, B. Li und R. D. White, J. Phys B **33**, 507 (2000)
- [7] J. Fletcher und P.H. Purdie, Aust. J. Phys. **40**, 383 (1987)
- [8] G. F. Hanne, Amer. J. Phys. **56**, 696 (1988)
- [9] R. D. White et al., Euro. Phys. J. D **66**, 117 (2012)
- [10] L. G. H. Huxley und R. W. Crompton: The Drift and Diffusion of Electrons in Gases, Wiley, New York (1974)
- [11] L. Boltzmann, Wiener Berichte **66**, 275 (1872); siehe auch: E. D. G. Cohen und W. Thirring (Hrsg): The Boltzmann Equation and Applications, Springer, Wien (1973)
- [12] R. E. Robson, Introductory Transport Theory for Charged Particles in Gases, World Scientific, Singapore (2006)
- [13] P. Nicoletopoulos und R. E. Robson, Phys. Rev. Lett. **100**, 124502 (2008)
- [14] J. Lemmerich: Aufrecht im Sturm der Zeit: Der Physiker James Franck, 1882–1964, GNT, Diepolz (2007); F. von Hippel, Physics Today, Juni 2010, S. 41
- [15] J. Kuczera: Gustav Hertz, Teubner, Leipzig (1985)

**DIE AUTOREN**

**Robert Robson** promovierte 1972 an der Australian National University in Canberra (Australien) und war anschließend Postdoc an der University of Alberta in Kanada. Er war Gastprofessor in Japan und den USA, ordentlicher Professor in Australien und mehrmals Fellow der Alexander-von-Humboldt-Stiftung. Das Foto zeigt ihn (links) mit dem Urenkel von James Franck, William Hans von Hippel.



**Malte Hildebrandt** (FV Teilchenphysik) studierte an der Universität Heidelberg und promovierte dort 1999 über die Entwicklung von Teilchendetektoren für die Hochenergiephysik. Nach einer Postdoc-Position an der Universität Zürich wechselte er 2002 an das Paul Scherrer Institut in der Schweiz. Seit 2009 leitet er dort die Detektorgruppe

im Labor für Teilchenphysik. Sein Arbeitsgebiet sind Teilchendetektoren, insbesondere Gasdetektoren, für geladene Teilchen und Neutronen.

**Ronald White** promovierte 1996 an der James Cook University (Campus Cairns) in Australien. Er ist außerordentlicher Professor dieser Universität am Campus Townsville und Leiter der dortigen Außenstelle des „Centre of Excellence for Antimatter-Matter Studies“ des Australischen Forschungsrats (ARC).

