

# Von der Laserschwelle zum Quantenphasenübergang

Photonen und Atome als Quantengase im Fließgleichgewicht

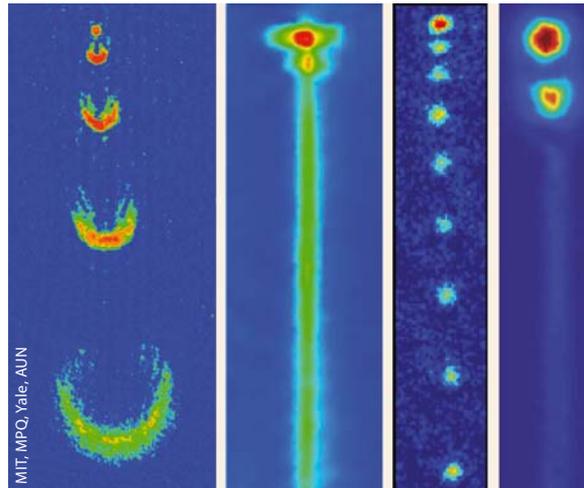
Robert Graham

Licht ist normalerweise ein thermisches Quantengas von Photonen, das jedoch in Lasern in einer weiteren Quantenphase auftreten kann, nämlich als Bose-Einstein-Kondensat von Photonen fester Frequenz im Fließgleichgewicht. Der enge Zusammenhang zwischen Extremalprinzipien und Fluktuationen lässt sich von thermodynamischen Gleichgewichten auf solche Fließgleichgewichte verallgemeinern. Die modernen Bose-Einstein-Kondensate in Atomfallen und jüngst realisierte Ein- und Auskopplungsmechanismen erlauben nun den analogen Schritt: vom thermischen Gleichgewicht ultrakalter Atome zum Fließgleichgewicht des Atomlasers.

Schon Newton fühlte sich auf den Schultern von Riesen sitzend, bei seinem ersten gewaltigen Schritt in die Physik hinein. Im heutigen weitaus reiferen Zustand unserer Wissenschaft ist dieses Gefühl noch angebrachter. So möchte ich fünf „meiner“ Riesen nennen beim Beginn meiner Beschäftigung mit dem hier behandelten Themenkreis.

Für die Physik des 20. Jahrhunderts sind die überragenden Giganten natürlich Max Planck und Albert Einstein. Unser Verständnis von normalem Licht, z. B. aus einer Glühlampe, wurde nicht nur von James Clerk Maxwell und Heinrich Hertz gelegt als Überlagerung elektromagnetischer Wellen, sondern eben auch, dazu dual, von Planck und Einstein als Gas von Teilchen, mit Einsteins Photonen mit Impuls  $p=E/c$  für Teilchen der Ruhemasse 0 und Plancks Energie  $E = \hbar\omega$ .

Das letzte Ingredienz, um die Beschreibung von Licht zu vervollständigen, wurde 1923 von Satyendranath Bose gefunden und von Einstein in seiner Wichtigkeit sofort erkannt und für Materieteilchen verallgemeinert: Photonen sind ununterscheidbar, alle Quantenzustände sind symmetrisch bei Vertauschung von zwei Photonen. Diese sind damit Bosonen (im Gegensatz zu ebenfalls ununterscheidbaren Fermionen, deren Quantenzustände antisymmetrisch bei Teilchen-austausch sind). Bose zeigte, dass diese Eigenschaft notwendig ist, um das Plancksche Strahlungsgesetz für schwarze Körper statistisch herzuleiten. Fortan war Licht einfach ein ideales Quantengas von Photonen. Das dazu quantenmechanisch äquivalente und für Interferenzexperimente relevante duale Wellenbild



Ein Atomlaser besteht aus einem Bose-Einstein-Kondensat, aus dem gepulste oder kontinuierliche Mikrowellenstrahlung Atome auskoppelt. Mittlerweile gelang sogar ein erster gepumpter Atomlaser (rechts).

beschreibt das Licht als Überlagerung von Wellenpaketen, deren mittlere Ausdehnung, Korrelationslänge und Wellenlänge alle von der Größenordnung  $\hbar c/T$  sind.

Das in der Natur vorkommende Licht ist fast ausschließlich von dieser Art. Doch seit der Realisierung des ersten Lasers durch Theodore Maiman im Jahr 1960 kennen wir Lichtquellen, die qualitativ gänzlich anders sind. Sie liefern kohärente Überlagerungen von Wellenpaketen, die dem Idealbild einer klassischen elektromagnetischen Welle so nahe kommen wie kein natürlich entstehendes Licht. Die ersten theoretischen Beschreibungen des Lasers gingen daher auch von der klassischen Maxwellschen Beschreibung des Lichts aus. Dennoch ist der Teilchen-Welle-Dualismus auch für das Laserlicht von entscheidender Bedeutung, wie Hermann Haken 1964 zuerst zeigte, dicht gefolgt von parallelen Arbeiten in den USA. Als Diplomand und

## KOMPAKT

- Der Unterschied zwischen Laserlicht und gewöhnlichem Licht lässt sich im Rahmen einer spontanen Symmetriebrechung erklären.
- Um Phasenübergänge zwischen Fließgleichgewichten, wie sie für einen Laser charakteristisch sind, zu beschreiben, muss man die Thermodynamik verallgemeinern.
- Eine erweiterte Gross-Pitaevskii-Gleichung erlaubt es, Eigenschaften eines Atomlasers wie die minimale Linienbreite zu berechnen.

Prof. Dr. Robert Graham, Fachbereich Physik, Universität Duisburg-Essen, Lotharstraße 1, 47048 Duisburg – Preisträgerartikel anlässlich der Verleihung der Max-Planck-Medaille 2009 auf der 73. Jahrestagung der DPG in Hamburg.

Doktorand war ich Mitglied in Hakens international als „Stuttgart school“ bekannter Gruppe, die sich intensiv mit der mikroskopischen quantenmechanischen Theorie des Lasers beschäftigte [1].

## Spontane Symmetriebrechung an der Laserschwelle

Während meiner Promotion [2] setzte sich in der Physik immer mehr die Idee der spontanen Symmetriebrechung durch, z. B. in der Hochenergiephysik bei der spontan gebrochenen chiralen Symmetrie, und in der Landauschen Theorie der Phasenübergänge 2. Ordnung. So lag es im Zug der Zeit, dass ich die Ursachen für die qualitativen Unterschiede von Laserlicht zu gewöhnlichem Licht in einer spontanen Symmetriebrechung suchte. Ein einfaches sehr anschauliches Beispiel für eine solche Symmetriebrechung ist das Auftreten von Ferromagnetismus, wenn Eisen unter seine Curie-Temperatur abkühlt. Innerhalb der Weisschen Domänen richten sich die Spins der ungepaarten Elektronen in den nicht vollständig besetzten Schalen der Eisenatome spontan in eine beliebige Vorzugsrichtung aus und brechen damit die Rotationssymmetrie ihres Hamilton-Operators ohne äußere Einwirkung. Bei der Beschreibung eines Lasers ist eine ähnliche spontane Selbstorganisation erkennbar, z. B. im Wellenbild bei der phasengerechten induzierten Emission des Lichts durch die angeregten Atome, gestartet durch ein zufällig und spontan emittiertes erstes Wellenpaket. Im Teilchenbild des gleichen Vorgangs handelt es sich um die spontane Ansammlung von vielen Photonen im gleichen Zustand, die vergleichbar ist zu deren Bose-Einstein-Kondensation.

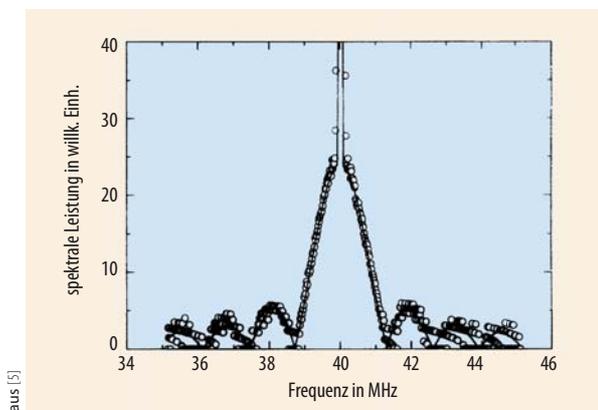
Das Phänomen der Bose-Einstein-Kondensation hat Einstein bekanntlich schon 1923 vorhergesagt als Phasenübergang in einem Bose-Gas im thermodynamischen Gleichgewicht bei hinreichend tiefer Temperatur, selbst für den Fall der vollständigen Abwesenheit von Wechselwirkung zwischen den Bosonen, allein bedingt durch deren Austauschsymmetrie. Allerdings

galt diese Vorhersage Einsteins gerade nicht für masselose Photonen, also Licht, sondern setzte ausdrücklich seine zuvor gegebene Verallgemeinerung von Boses Idee für massive Teilchen voraus, für die (jedenfalls nichtrelativistisch) ein Teilchenzahlerhaltungsgesetz gilt. Ohne ein solches Erhaltungsgesetz kann es im thermischen Gleichgewicht keine Bose-Einstein-Kondensation geben. Dann würden Bosonen bei tiefer Temperatur einfach absorbiert werden und verschwinden, und die Zahl der Teilchen würde sich damit auf die jeweilige Temperatur einstellen. Damit entfällt der Zwang zur Kondensation. Warum können wir dennoch von Bose-Einstein-Kondensation im Laser mit seinen masselosen Photonen reden? Die Antwort ist in diesem Fall die Abwesenheit des thermischen Gleichgewichts. Photonen verschwinden zwar aus dem Laser durch irreversible Emission in die Umgebung, doch werden sie mittels eines Pumpprozesses, der für die Anregung der Laseratome sorgt, und nachfolgender induzierter Emission bei der Laserfrequenz auch ständig wieder nachgeliefert. Es handelt sich also um kein thermisches Gleichgewicht, sondern um ein Fließgleichgewicht, um einen stationären Zustand, auf den Einsteins Analyse des thermodynamischen Gleichgewichts nicht direkt anwendbar ist. Ein solches System ist stets an mehrere Energiereservoirs gekoppelt, die einen Energiefluss im System aufrecht erhalten. Ein sehr viel komplexeres dynamisches Verhalten wird damit möglich. Doch manche Phänomene verlaufen dennoch analog zu den aus Gleichgewichtssystemen bekannten, wie eben das der spontanen Symmetriebrechung.

Bei der Bose-Einstein-Kondensation massiver Teilchen ist es die globale Eichsymmetrie, welche spontan gebrochen wird. Wie jeder Symmetrie in der Physik entspricht auch dieser nach dem Noetherschen Theorem ein Erhaltungssatz – in diesem Fall für die Teilchenzahl  $N$ , die gemäß Noether auch gleichzeitig der Generator der zugrundeliegenden Symmetriegruppe ist, hier der  $U(1)$ -Gruppe einer globalen Eichsymmetrie. Der zum Phasenübergang gehörende Ordnungsparameter ist die makroskopische Wellenfunktion des Bose-Einstein-Kondensats mit beliebiger, aber fester und im Ruhesystem des Kondensats räumlich konstanter Phase, die nicht invariant ist unter den  $U(1)$ -Transformationen, also die Symmetrie bricht.

Beim Laser fehlen dieser Erhaltungssatz und die zugehörige globale Eichsymmetrie. Stattdessen ist es die zeitliche Translationsinvarianz, die ein stationär gepumpter Laser hat, welche durch die kohärente periodische Oszillation des Lasers spontan gebrochen wird, jedenfalls teilweise. Genauer gesagt ist es wieder eine  $U(1)$ -Gruppe, eine Untergruppe der zeitlichen Translationsgruppe. Noethersche Erhaltungsgröße und Generator dieser Symmetrie ist der Hamilton-Operator, der Ordnungsparameter ist die Amplitude des Laserfeldes mit beliebiger aber fester Phase (der Laser-Mode), die sich unter der gebrochenen  $U(1)$ -Gruppe transformiert.

Scharfe Phasenübergänge (und zugehörige scharfe spontane Symmetriebrechungen) können strikt nur im thermodynamischen Limes auftreten, d. h. im Li-



**Abb. 1** Spektrum eines einmodigen He-Ne-Lasers ( $\lambda = 3,39 \mu\text{m}$ ) im Grenzfall schwach reflektierender Spiegel (Reflektivität nur 8 %). Der Laser hat hier eine Ausgangsleistung von 280  $\mu\text{W}$ . Die kohärente Linie in der Mitte charakterisiert die Lasermode, das Kondensat, und würde sich in den gewählten Einheiten der Abbildung bis zur Höhe von 9000 erstrecken.

mes unendlich großer Systeme bei endlich gehaltener Dichte extensiver Größen. In allen endlichen Systemen dagegen müssen über hinreichend große Zeiten oder Abstände hinweg Fluktuationen die auf kleineren Skalen spontan gebrochen erscheinende Symmetrie wieder herstellen. Dies gilt auch im Fließgleichgewicht. Beim Laser kannte man schon lange vor diesen Überlegungen (Schawlow und Townes 1956 [3] und genauer Haken 1964 [4]) die langsame zeitliche Diffusion der Phase  $\varphi$  des Laserfeldes

$$\langle (\varphi(t) - \varphi(0))^2 \rangle = D_\varphi |t| \quad (1)$$

mit einer Diffusionsrate  $D_\varphi$ , die proportional ist zum Verhältnis der Emissionsraten von spontan und induziert emittierten Laserphotonen in der Laser-Mode. Diese Diffusion stellt auch hier über den Zeitraum  $D_\varphi^{-1}$  hinweg, der mit der induzierten Emissionsrate der Photonen im thermodynamischen Limes gegen unendlich geht, die spontan gebrochene Symmetrie wieder her. **Abb. 1** zeigt das Resultat einer Messung des Emissionsspektrums eines He-Ne-Lasers [5].

Im thermodynamischen Limes handelt es sich also tatsächlich um einen Phasenübergang und zwar des Typs, der heute genauer als Quantenphasenübergang bezeichnet wird [6]. Es sind dies Phasenübergänge, die durch Quantenfluktuationen (wie hier die Spontanemission) getrieben werden, nicht durch thermische Fluktuationen (die hier tatsächlich vernachlässigbar sind). Quantenphasenübergänge können daher selbst noch bei vernachlässigbar kleiner Temperatur auftreten, und ihr Kontrollparameter ist statt der Temperatur ein Systemparameter (wie hier die Stärke, mit welcher der Laser gepumpt wird). Kritisches Verhalten mit den entsprechenden kritischen Exponenten<sup>1)</sup> tritt in diesem Fall als Funktion des Systemparameters auf. Und noch ein weiterer Aspekt macht den Übergang, den wir hier betrachten, zu einem Quantenphasenübergang. Dies ist die Tatsache, dass die optische Phase des Kondensats und dessen Stärke, d. h. Phase und Photonenzahl im Kondensat, komplementäre Größen sind, deren Realisierung a priori unbestimmt ist und erst durch die Art der durchgeführten Messung festgelegt wird. So bestimmen Interferenzexperimente die optische Phase bzw. sie legen diese überhaupt erst fest [7], und Photonenzählexperimente bestimmen die Photonenzahlstatistik.

Eine Vielzahl von weiteren interessanten Fragen knüpft an die hier skizzierte besondere Betrachtungsweise des Lasers an, insbesondere nahm hier das große von Hermann Haken ins Leben gerufene Gebiet der Synergetik mit Anwendungen weit über die Physik hinaus seinen Anfang [8]. Doch schon für die Physik selbst ist die Behandlung von Fließgleichgewichten eine theoretisch besonders interessante Frage.

## Thermodynamik für Fließgleichgewichte

Um Phasenübergänge zwischen Fließgleichgewichten in möglichst enger Anlehnung an solche zwischen thermodynamischen Gleichgewichtszuständen be-

schreiben zu können, braucht man eine Verallgemeinerung der Thermodynamik für Fließgleichgewichte. Es wäre hilfreich, wenn man auch für Fließgleichgewichte Extremalprinzipien angeben könnte, analog etwa zum Prinzip der maximalen Entropie oder der minimalen freien Energie für das thermodynamische Gleichgewicht abgeschlossener bzw. im isothermen Energieaustausch stehender Systeme. Es erscheint plausibel, dass es derartige Extremalprinzipien auch für makroskopische Fließgleichgewichte geben sollte. Sowohl die bekannten Extremalprinzipien der klassischen Dynamik, wie das Gaußsche Prinzip oder das Hamiltonsche Prinzip der extremalen Wirkung, als auch die genannten Extremalprinzipien der Thermodynamik haben ihren Ursprung in der Existenz von Fluktuationen. Letzere sind zwar in den Prinzipien selbst noch nicht manifest, doch sie beschränken deren Gültigkeit jeweils auf einen Limes, den klassischen bzw. den thermodynamischen Limes.

Die genannten Fluktuationen sind gewissermaßen der eigentliche physikalische Grund für die Extremalprinzipien, weil erst sie es den so beschriebenen Systemen erlauben, das Extremum zu identifizieren und einzunehmen, gewissermaßen durch Abtasten von dessen Umgebung. Die extremalisierten Größen wie z. B. die Wirkung oder die Entropie sind es daher auch gerade, welche die Stärke der jeweiligen Fluktuationen regieren, in der Formel von Boltzmann und Einstein für thermodynamische Wahrscheinlichkeiten, beziehungsweise in der von Dirac und Feynman für die Wahrscheinlichkeitsamplituden von Trajektorien.

Fließgleichgewichte werden durch Dynamiken mit quantenmechanischen und/oder klassischen Fluktuationen beschrieben. Auch hier lassen sich oft klassische und thermodynamische Limes definieren, sodass hier ebenfalls Extremalprinzipien existieren sollten. Dennoch scheint deren Existenz wiederum aus einem ganz anderen Grund fraglich, nämlich wegen der unauflösbaren Mischung von reversibler und irreversibler Dynamik in Fließgleichgewichten. Dies ist der entscheidende physikalische Unterschied sowohl zur klassischen Dynamik, z. B. zur analytischen Mechanik, in der nur rein reversible Bewegungen mit dem Hamiltonschen Prinzip zu beschreiben sind, als auch zur Gleichgewichts-Thermodynamik, die auf einer klaren Unterscheidung von reversiblen und irreversiblen Prozessen aufbaut. So ist im thermodynamischen Gleichgewicht für die makroskopischen Variablen eines Systems keinerlei irreversible, wohl aber noch reversible Dynamik möglich. Die Boltzmann-Einstein-Formel  $W \sim \exp S$  beschreibt dann nur reversible Fluktuationen. Es ist dies das für thermodynamische Gleichgewichte fundamentale Prinzip des detaillierten Gleichgewichts, das seinen statistischen Ursprung in der Zeitumkehrsymmetrie der mikroskopischen Bewegungsgesetze hat [9], sowie in den Randbedingungen wie z. B. denen für ein abgeschlossenes System, die mit der Einstellung eines thermodynamischen Gleichgewichts verträglich sein müssen. Diese für Extremalprinzipien offenbar wesentliche Vorausset-

1) Hier vollständig gegeben durch die Molekularfeldtheorie wegen der Langreichweitigkeit der optischen Wechselwirkung der Laseratome.

zung der Reversibilität der Dynamik bzw. der Reversibilität der Gleichgewichte in der Thermodynamik ist bei Fließgleichgewichten nicht erfüllt.

Eine wichtige Klasse von stationären Zuständen, in denen die Voraussetzungen für detailliertes Gleichgewicht in der Regel nicht vorliegen, sind Grenzzyklen mit Fluktuationen. Hierzu gehört auch ein stationär gepumpter Laser im Ein-Moden-Betrieb oder in einem komplizierteren periodisch pulsierenden Betrieb, mit seinen spontan emittierten Quantenfluktuationen. Noch kompliziertere Beispiele ohne detailliertes Gleichgewicht sind stationäre Zustände auf verrauschten seltsamen Attraktoren. Auch hierfür bietet die Quantenoptik z. B. mit dem Chaos in Lasern Beispiele, die durch das Hereinspielen quantenmechanischer Aspekte zusätzlich interessant sind [10]. Doch auch in der klassischen Physik bieten etwa die Reaktionskinetik oder die Hydrodynamik eine Fülle von Beispielen.

Gibt es also eine verallgemeinerte Thermodynamik für solche Fließgleichgewichte? Seit Anfang der Siebzigerjahre des letzten Jahrhunderts befasste ich mich mit dieser Frage und die Antwort lautet: ja [11]. Ausgangspunkt ist eine dynamische Beschreibung der Fluktuationen, z. B. durch eine Master-Gleichung für diskrete oder kontinuierliche stochastische Prozesse. In letzterem Fall besagt die Wahrscheinlichkeitserhaltung, dass

$$\partial W/\partial t + \partial g^v/\partial q^v = 0$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $W(q,t)$  und der Wahrscheinlichkeitsstromdichte  $g^v(q,t)$ . Im stationären Zustand wird die Wahrscheinlichkeitsdichte  $W_{st}(q)$  zeitunabhängig. Dies ist selbst dann der Fall, wenn es sich um einen solchen stationären Zustand handeln sollte, der (im thermodynamischen Limes) die zeitliche Translationsinvarianz bricht, da Fluktuationsprozesse analog zur Phasendiffusion im Laser die zeitliche Translationsinvarianz im stationären Ensemble auf großen Zeitskalen wieder herstellen. Gemäß der Boltzmann-Einsteinschen Vorschrift lässt sich eine zeitunabhängige effektive innere Entropie  $S(q)$  als Funktion der makroskopischen Variablen  $q$  definieren gemäß  $S(q) \sim \ln W_{st}(q)$ . Obwohl ein System im stationären Zustand diese Entropie laufend produziert, folgt aus der Stationaritätsbedingung, dass diese auch ständig in gleichem Maße an die Umgebung abgeführt wird, sodass sie zeitunabhängig bleibt.

Die Wahrscheinlichkeitsstromdichte  $g^v(q)$  wird im stationären Zustand quellenfrei, doch sie verschwindet im Allgemeinen nicht. Sie definiert dann eine stationäre Driftrate  $r^v(q)$  vermöge  $r^v(q) = g_{st}^v(q)/W_{st}(q)$  [12], deren Quellen und Senken die jeweils durch die Drift bedingte Entropieänderung gerade kompensieren. Der folgenden Diskussion sei nun aus Gründen der Konkretheit eine Master-Gleichung in der Form einer Fokker-Planck-Gleichung zugrunde gelegt, für die die Stromdichte  $g^v(q)$  ein Drift- und ein Diffusionsglied hat

$$g^v(q) = K^v(q) W - \frac{1}{2} Q^{vu}(q) \frac{\partial W}{\partial q^u} \quad (2)$$

mit  $Q^{vu}(q) = Q^{uv}(q)$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Dem entspricht eine Aufspaltung des Driftvektors  $K^v(q) = r^v(q) + 1/2 Q^{vu}(q) \partial S/\partial q^u$  in einen Potentialanteil und einen Rest, der gerade durch die stationäre Driftrate gegeben ist, die im Allgemeinen noch reversible und irreversible Anteile unter der mikroskopisch definierten Zeitumkehrtransformation enthält. Wie schon ausgeführt, ist dies das entscheidend Neue im Vergleich zu thermodynamischen Gleichgewichten.

Um nun den Zusammenhang von Fluktuationen und Extremalprinzip für diesen Fall zu sehen, ist es nützlich, die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte durch ein Funktionalintegral auszudrücken.

$$P(q|q_0, t) = \int D\mu[q] \exp \int_{q(0)=q_0}^{q(t)=q} L(q, \dot{q}) d\tau \quad (3)$$

mit der Entropieproduktion durch Fluktuationen

$$L = -\frac{1}{2} \left( \dot{q}^v - r^v(q) - \frac{1}{2} Q^{vu} \frac{\partial S}{\partial q^u} \right) Q_{vu} \left( \dot{q}^\lambda - r^\lambda(q) - \frac{1}{2} Q^{\lambda k} \frac{\partial S}{\partial q^k} \right). \quad (4)$$

Zur Vereinfachung der Darstellung sei angenommen, dass das Inverse  $Q_{vu}(q)$  der Diffusionsmatrix  $Q^{vu}(q)$  überall existiert. Zeitabhängige Mittelwerte und Korrelationsfunktionen und deren charakteristische Funktionale lassen sich mithilfe von (3) und (4) durch Funktionalintegrale darstellen. Wahrscheinlichste Wege, die für kleine Fluktuationen dominieren, genügen einem Extremalprinzip und den daraus resultierenden Differentialgleichungen 2. Ordnung mit  $L$  als Lagrange-Funktion. Zwei besonders wichtige spezielle Klassen von solchen Wegen maximaler Fluktuationsentropie  $\int L d\tau$  genügen sogar Differentialgleichungen von nur 1. Ordnung. Sie entstehen aus den Euler-Lagrange-Gleichungen zu  $L$  durch Mitvariation des Endpunkts bzw. des Anfangspunktes. Im ersten Fall sind dies also Wege, die die Relaxation aus einem gegebenen beliebigen Anfangszustand  $q_0$  in den stationären Endzustand beschreiben. Sie folgen dem deterministischen Limes der Dynamik  $\dot{q}^v = K^v(q) = r^v + 1/2 Q^{vu} \partial S/\partial q^u$  und haben eine positive deterministische Entropieproduktion  $1/2 Q^{vu} \partial S/\partial q^v \partial S/\partial q^u$  und verschwindende Fluktuationsentropie  $\int L d\tau = 0$ . Im zweiten Fall sind dies Wege, die eine Fluktuation von einem Zustand des stationären Ensembles in einen gegebenen beliebigen Endzustand beschreiben unter negativer Fluktuationsentropieproduktion

$$L = -1/2 Q^{vu} \partial S/\partial q^v \partial S/\partial q^u < 0.$$

Solche Wege genügen den Differentialgleichungen  $\dot{q}^v = r^v - 1/2 Q^{vu} \partial S/\partial q^u$ . Diese Fluktuationsdynamik ist also nicht die Zeitumkehrung der Relaxationsdynamik. Die allgemeine fluktuierende Dynamik im stationären Zustand ist demzufolge eine Abfolge von mehr oder weniger klar ausgeprägten Relaxations- und Fluktuationsphasen, bei denen die stationäre Driftrate  $r^v(q)$  stets weiterläuft, während die generalisierte Kraft  $1/2 Q^{vu} \partial S/\partial q^u$  entweder das System zu höherer innerer Entropie treibt oder durch Vorzeichenwechsel zeitlich begrenzte Exkursionen zu Zuständen unterhalb der

Maximalentropie ermöglicht. In zeitabhängigen Experimenten oder numerischen Simulationen der zur Stromdichte (2) stochastisch äquivalenten Langevin-Gleichungen lassen sich diese nicht zeitumkehrsymmetrischen Fluktuations- oder Relaxationsphasen der stochastischen Dynamik unschwer erkennen.

### Vom Bose-Einstein-Kondensat zu Atomlasern

Während sich Laser als Bose-Einstein-Kondensate verstehen lassen, sobald die Beschränkung auf Systeme im thermodynamischen Gleichgewicht soweit gelockert wird, dass auch stationäre Zustände zugelassen sind, so gilt auch die Umkehrung: Bose-Einstein-Kondensate im thermischen Gleichgewicht werden zu Lasern, wenn nur für einen Teilchenfluss durch das Kondensat gesorgt wird. Dies erfordert sowohl einen geeigneten Auskopplungsmechanismus aus dem Kondensat als auch einen geeigneten Pumpprozess. Dieser enge Zusammenhang zwischen Bose-Einstein-Kondensat und Laser wird in jüngerer Zeit eindrucksvoll belegt durch die Entwicklung des Atomlasers. Sie begann bereits kurz nach der ersten Realisierung der atomaren Bose-Einstein-Kondensate bosonischer Isotope der Alkaliatome in Magnetfallen, am häufigsten von <sup>87</sup>Rb oder <sup>23</sup>Na. Die Entwicklung ist hier längst noch nicht abgeschlossen [13, 14].

Auskopplungsmechanismen für Atomlaser sind im Prinzip sehr einfach. Sie reichen von einem einfachen Abschalten der Magnetfalle, analog zum Q-switching beim optischen Laser, bis zur Umorientierung der Spins auf einen nicht mehr in der Falle gebundenen Zustand, entweder durch Einstrahlen eines Mikrowellenfeldes oder durch einen optischen Raman-Übergang, der den ausgekoppelten Atomen außerdem einen wohldefinierten Impuls zuteilen kann. Letztere Rolle übernimmt sonst nur das Gravitationsfeld, in dem die Atome im Laserstrahl fallen. Im Detail hat der Auskopplungsprozess im Atomlaser einen viel stärkeren Einfluss auf die Qualität des resultierenden Teilchenstrahls als im optischen Laser. Der Grund ist die Dispersion von Materiewellen  $\omega = \hbar k^2/2m$ . Die spektrale Breite  $\Delta\omega$  der ausgekoppelten Atomwellen hat daher Einfluss auf die räumliche Propagation und kann zu räumlichen Verzerrungen der Phase der Materiewelle führen. Höchste präzise Kontrolle über das Fallenpotential und über den Auskopplungsprozess sind daher unabdingbar.

Bei allen bisherigen Experimenten zum Atomlaser musste auf ein kontinuierliches Pumpen verzichtet werden, da ein wirkungsvoller Mechanismus noch nicht zur Verfügung stand. Doch wurde ein solcher Mechanismus nun kürzlich von der „Atom Laser Group“ der ANU vorgeschlagen [15] (Abb. 2), womit eine weitere wichtige Hürde bei der Entwicklung des Atomlasers genommen wurde. Während die Linienbreite bisheriger Atomlaser durch die Lebensdauer des Kondensats Fourier-limitiert, d. h. durch die Auskopplungsrate bestimmt war, ist es nun denkbar, einen

Atomlaser im stationären Betrieb laufen zu lassen. Wie beim optischen Laser stellt sich dann die Frage, was die prinzipiellen Grenzen der Linienbreite sind. Um sie zu beantworten, muss die Gross-Pitaevskii-Gleichung, welche das Bose-Einstein-Kondensat ohne Ein- und Auskopplung oder Fluktuationen beschreibt, erweitert werden [16]. Diese Fluktuationen sind zum einen thermischer Natur und werden verursacht durch die Ankopplung an ein Teilchenreservoir. Zum anderen bewirkt der mit einem Auskopplungsprozess der relativen Rate  $\gamma$  verbundene Teilchentransport durch das Kondensat ein zusätzliches Schrotrauschen der Zeitableitung der Teilchenzahl gemäß

$$dN_0/dt = \gamma (\langle N_0 \rangle - N_0) + F_{N_0}(t).$$

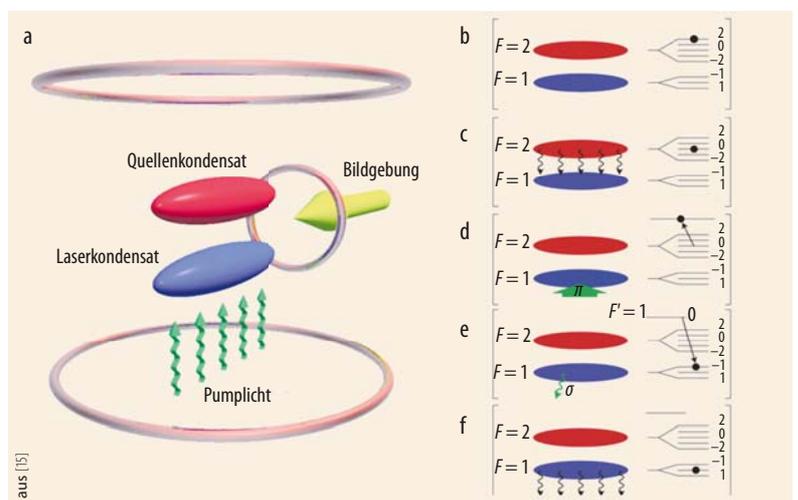
Dabei hat der Rauschterm einen verschwindenden Mittelwert und ist zeitlich nur sehr kurzreichweitig korreliert  $\langle F_{N_0}(t) F_{N_0}(0) \rangle = \gamma \langle N_0 \rangle \delta(t)$ . Die durch entsprechende Transport- und Fluktuationsterme erweiterte Gross-Pitaevski-Gleichung wird zu einer Langevin-Gleichung für die komplexe Amplitude  $\alpha_0$  des Bose-Einstein-Kondensats

$$\dot{\alpha}_0 = -\left(\frac{i}{\hbar} + \frac{1}{2\mu\tau_c}\right) \frac{\partial F}{\partial \alpha_0} - \frac{\gamma}{2} \alpha_0 + \Gamma(t) \tag{5}$$

mit  $N_0 = |\alpha_0|^2$ . Die gesamte Langevin-Kraft  $\Gamma(t)$  für Pump- und Auskopplungsprozess hat dabei den Mittelwert 0 und die Korrelationsfunktion

$$\langle \Gamma(t) \Gamma^*(0) \rangle = \left(\frac{k_B T}{\tau_c \mu} + \gamma\right) \delta(t). \tag{6}$$

Neben diesem Fluktuationsglied enthält (5) ein Glied mit der Pumprate  $1/\tau_c$  und eines mit der Auskopplungsrate  $\gamma$ , die beide zusammen das Fließgleichge-



**Abb. 2** An der Australian National University gelang es, den ersten gepumpten Atomlaser zu realisieren (a, vgl. Abb. S. 43 rechts). Die beiden horizontalen und die vertikale Spule sorgen für das magnetische Fallenpotential und das einzu-strahlende Mikrowellenfeld (grüne Pfeile). Die Atome im Quellenkondensat im maximal ausgerichteten und daher gebundenen Zustand  $F=2, m_f = 2$  (b) werden durch ein Mikrowellenfeld in den ungebundenen Zustand  $F=2, m_f = 0$  umgeklappt. Sie sind daher nicht mehr ge-

binden und fallen (c). Ein optisches Feld regt die Atome in einen  $F'=1$ -Hilfszustand an (d), von wo aus sie, jetzt im Laserkondensat angekommen, in den ( $F=1, m_f = 1$ )-Zustand induziert durch das Kondensatfeld reemittieren. Dies geschieht so, dass der inzwischen aufgenommene Impuls wieder abgegeben wird (e). Nun klappen sie von dort durch ein weiteres Mikrowellenfeld in den ungebundenen Zustand ( $F=1, m_f = 0$ ) um und werden damit ausgekoppelt (f).

wicht des Atomlasers festlegen. Die freie Energie  $F$  der Kondensat-Mode ist bereits aus der ursprünglichen Gross-Pitaevskii-Gleichung des Kondensats bekannt,

$$F = -\mu |\alpha_0|^2 + \frac{g}{2} |\alpha_0|^4 \quad (7)$$

mit dem chemischen Potential  $\mu$  und der Wechselwirkungskonstanten  $g$  proportional zur s-Wellen-Streulänge. Das chemische Potential, das hier so eingeht wie der Pumpparameter beim optischen Laser, bestimmt die mittlere Zahl von Atomen im Kondensat.

Die zur Langevin-Gleichung (5) gehörende stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte lässt sich geschlossen in der Form  $W \sim \exp S(\alpha_0, \alpha_0^*)$  mit der effektiven Entropie

$$S(\alpha_0, \alpha_0^*) = a |\alpha_0|^2 - \frac{1}{2} b |\alpha_0|^4, \quad (8)$$

angeben, mit dem Pumpparameter

$$a = \frac{1 - \tau_c \gamma}{\frac{k_B T}{\mu} + \tau_c \gamma} \quad (9)$$

und dem Sättigungsparameter

$$b = \frac{g}{k_B T + \mu \tau_c \gamma}. \quad (10)$$

Der Atomlaser operiert oberhalb seiner Schwelle, wenn die Pumprate  $1/\tau_c$  die Auskopplungsrate  $\gamma$  übersteigt. Die mittlere Atomzahl im Kondensat lässt sich für geringe Fluktuationen durch den Wert von  $N_0$  im Maximum der effektiven Entropie (8) nähern und ergibt sich zu

$$\langle N_0 \rangle \approx (1 - \tau_c \gamma) \mu / g. \quad (11)$$

Ebenso wie beim optischen Laser lässt sich nun aus einer Gleichung wie (5) die Phasendiffusion im stationären Zustand und damit die minimale Linienbreite des Atomlasers bestimmen. Weit oberhalb der Schwelle ist die zeitabhängige Amplitude  $\alpha_0(t)$  des Kondensats gut stabilisiert und variiert nur noch aufgrund von Änderungen ihrer Phase gemäß

$$\alpha_0 \approx \sqrt{\langle N_0 \rangle} \exp[i\mu \tau_c \gamma t / \hbar + i\varphi(t)] \quad (12)$$

mit der diffundierenden Phase  $\varphi(t)$ , deren Varianz

$$\langle (\varphi(t) - \varphi(0))^2 \rangle \approx D_\varphi |t| \quad (13)$$

proportional zur Zeit  $t$  wächst mit der Diffusionsrate

$$D_\varphi = \left( \gamma + \frac{k_B T}{\mu} \frac{1}{\tau_c} \right) \frac{1}{\langle N_0 \rangle}. \quad (14)$$

Die so vorhergesagte minimale Linienbreite des Atomlasers, die durch Lichtstreuexperimente wie in [17] gemessen werden könnte, beträgt dementsprechend  $\Delta\nu = 1/2 D_\varphi$ . Man erkennt an (14), wie für  $T \rightarrow 0$  das Rauschen des Auskopplungsprozesses die Linienbreite bestimmt, während das thermische Rauschen ähnlich wie in einem Maser die Linienbreite dominiert falls  $k_B T \gg \mu \gamma \tau_c$ .

Überhaupt ist die Langevin-Gleichung (5) insgesamt äquivalent zu der eines optischen Ein-Moden-Lasers, deren korrespondierende Fokker-Planck-Gleichung im Detail von Hans Risken und Mitarbeitern gelöst und ausgewertet wurde [18]. Sie fanden eine hervorragende Übereinstimmung zum Experiment. Die dort gewonnenen theoretischen Ergebnisse zur Linienbreite und zur Statistik der emittierten Bosonen lassen sich dank

dieser Äquivalenz auf den Atomlaser übertragen. Allerdings darf man dabei nicht aus dem Auge verlieren, dass der einmal emittierte Laserstrahl nun aus sehr langsamen nichtrelativistischen, massiven Teilchen bzw. den zu diesen dualen Materiewellen besteht. Diese verhalten sich nicht nur vollkommen anders als Photonen, sondern ihre Teilchenzahl bzw. Intensität liegen zudem weit unter den für optische Laser typischen Werten. Die mit Atomlasern durchzuführenden Experimente und eventuelle Anwendungen unterscheiden sich daher stark von denen für optische Laser [14] und bleiben ein interessantes Feld für die Zukunft.

**Literatur**

[1] H. Haken, Laser Theory, Handbuch der Physik, Hrsg. S. Flügge, Band XXV/2c, Springer Verlag Berlin (1970)  
 [2] R. Graham und H. Haken, Z. Physik **213**, 420 (1968); **235**, 166 (1970); **237**, 31 (1970)  
 [3] A. L. Schawlow und C. H. Townes, Phys. Rev. **112**, 1940 (1958)  
 [4] H. Haken, Z. Physik **181**, 96 (1964)  
 [5] S. J. M. Kuppens, M. P. van Exter und J. P. Woerdman, Phys. Rev. Lett. **72**, 3815 (1994)  
 [6] S. Sachdev, Quantum Phase Transitions, Cambridge Univ. Press (1999)  
 [7] J. Javanainen und S. M. Yoo, Phys. Rev. Lett. **76** (1996)  
 [8] H. Haken und R. Graham, Synergetik – die Lehre vom Zusammenwirken, Umschau **6**, 191 (1971); H. Haken, Synergetics, An Introduction, Springer Verlag, Berlin (1983)  
 [9] De Groot und P. Mazur, Non-equilibrium Thermodynamics, North-Holland, Amsterdam (1962); N.G. van Kampen, Stochastic Processes in Physics and Chemistry, North-Holland, Amsterdam (1981)  
 [10] M. Dörfle und R. Graham, Phys. Rev. **A27**, 1096 (1983); R. Graham, Phys. Rev. Lett. **53**, 2020 (1984)  
 [11] R. Graham, in: Workshop on Functional Integration, E. Tirapegui und J. P. Antoine (Hrsg.), Plenum, New York (1980); R. Graham, in: Noise in Nonlinear Dynamical Systems, F. Moss und P. V. E. McClintock, Vol. 1, Theory of Continuous Fokker-Planck Systems, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1989)  
 [12] K. Tomita und H. Tomita, Progr. Theor. Phys. **51**, 1731 (1974)  
 [13] M.-O. Mewes et al., Phys. Rev. Lett. **78**, 582 (1997); M. R. Anderson et al., Science **275**, 637 (1997); B. P. Anderson und M. A. Kasevich, Science **282**, 1686 (1998); I. Bloch et al., Phys. Rev. Lett. **82**, 3008 (1999); E. W. Hagley et al., Science **283**, 1706 (1999); N. P. Robins et al., Nature Physics **4**, 731 (2008)  
 [14] E. W. Hagley et al., Optics and Photonics News, May 2001  
 [15] N. P. Robins et al., Nature Physics **4**, 731 (2008)  
 [16] R. Graham, Phys. Rev. Lett. **81**, 5262 (1998); J. of Mod. Opt. **47**, 2615 (2000); Phys. Rev. **A62** 023609 (2000)  
 [17] M. Saba et al., Science **307**, 1945 (2005)  
 [18] H. Risken, in Progress in Optics Vol. VIII, hrsg. von E. Wolf, North-Holland, Amsterdam, 239 (1970)

**DER AUTOR**

**Robert Graham** studierte und promovierte an der Universität Stuttgart. Nach Stellen als Visiting Research Scientist an der New York University und als wissenschaftlicher Rat und Professor an der Universität Stuttgart übernahm Graham im Jahr 1975 eine Professur für Theoretische Physik an der Universität-Gesamthochschule Essen (heute Universität Duisburg-Essen), die er noch heute innehat, inzwischen als Emeritus.



G. Prager