

# Fluktuierende Phasengrenzen

Zufallsmatrizen und getriebene Grenzflächen – Aspekte der Kardar-Parisi-Zhang-Universalitätsklasse

Herbert Spohn

Die statistische Mechanik des Nichtgleichgewichts ist ein weites Feld. Im Mittelpunkt steht die Dynamik vieler Freiheitsgrade, wobei der Zufall eine wichtige Rolle spielt. Laminare Strömungen sind Teil der Flüssigkeitsmechanik. Vollentwickelte Turbulenz ist aber ein zentrales Problem der Statistischen Physik. In meinem Artikel beleuchte ich nur eine winzige Ecke dieses vielfältigen Gebiets, nämlich die Dynamik von Phasengrenzflächen bzw. speziell eindimensionale Phasengrenzen in einem zweidimensionalen Volumen.

Ein prototypisches Beispiel für solche Phasengrenzen ist das Anwachsen eines Clusters (Abb. 1). Kazumasa Takeuchi hat das Experiment 2009 im Rahmen seiner Dissertation entwickelt und durchgeführt [1]. Seine brillante Idee war es, eine metastabile Phase (dort DSM1 genannt) durch einen dünnen Film eines turbulenten Flüssigkeitskristalls zu realisieren. Die Dimensionen der Flüssigkeitsschicht betragen  $16 \text{ mm} \times 16 \text{ mm} \times 12 \text{ }\mu\text{m}$ . Die Kristallstäbchen stehen im Mittel senkrecht. Der Film ist zweidimensional statistisch homogen und isotrop. Ein Punktcluster der stabilen Phase (DSM2) entsteht durch einen gut fokussierten Laserpuls. Dieser Nukleus wächst, weil sich am Rand des Clusters DSM1 in DSM2 umwandelt (Abb. 1). Der umgekehrte Prozess ist stark unterdrückt. Abstrahiert vom konkreten Experiment untersuchen wir eine Phasengrenzfläche, die durch den Kontakt zwischen einer stabilen und metastabilen Phase realisiert ist. Das müssen nicht unbedingt thermodynamische Phasen sein, sondern es kann sich auch um stationäre, räumlich homogene Nichtgleichgewichtszustände handeln. Betrachtet vom Standpunkt der stabilen Phase lässt sich die Dynamik als Anlagerungsprozess interpretieren, vergleichbar mit dem Eden-Wachstum und ballistischer Deposition [2,3]. Unser Interesse gilt den statistischen Eigenschaften der sich dynamisch entwickelnden Formfluktuationen.

Zunächst wenden wir uns der theoretischen Beschreibung zu. Der genaue mikroskopische Ablauf eines Nukleationsschritts ist ziemlich verwickelt und im Einzelnen nicht voll verstanden. Zur Beschreibung der Formfluktuationen auf mesoskopischer Skala sollten aber solche feine Details kaum eine Rolle spielen. Das ist ganz in der Tradition der Statistischen Mechanik, bei der anhand vereinfachter Modelle die zugrundeliegende Physik verstanden und analysiert

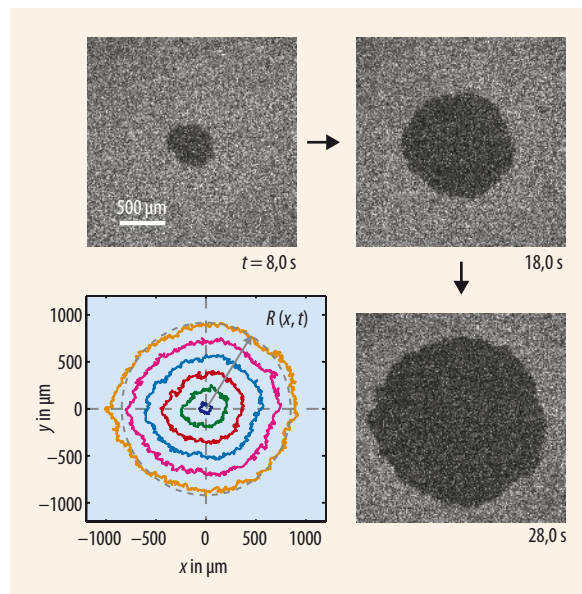


Abb. 1 Das stabil-metastabile Clusterwachstum bei punktförmigem Nukleus lässt sich an einem dünnen Film von turbulentem Flüssigkeitskristall untersuchen.

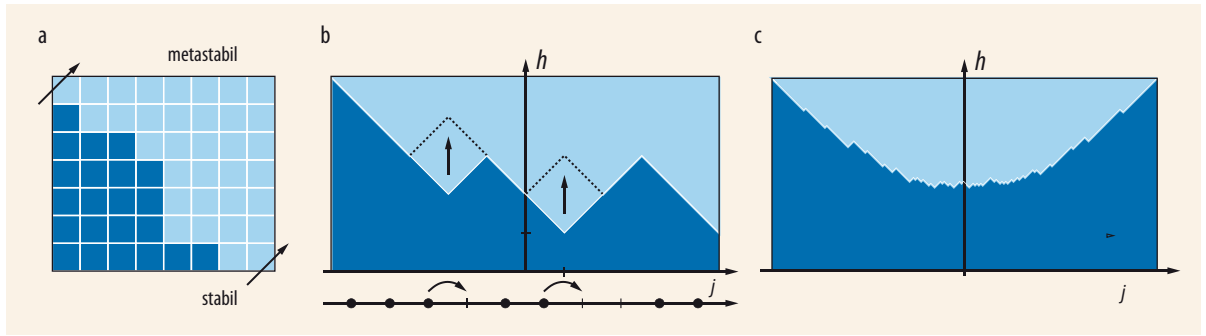
wird. Wir zerlegen also die Fläche in ein Gitter quadratischer Pixel. Die momentane Grenze zwischen den Phasen sei als eine nach rechts unten orientierte Linie dargestellt (Abb. 2a). Der Bereich links unten ist die stabile und der Bereich rechts oben die metastabile Phase. Jedes Pixel ist entweder stabil (**s**) oder metastabil (**m**). An der Grenzlinie kann sich ein **m**-Pixel in ein **s**-Pixel umwandeln, falls zwei **s**-Pixel direkt benachbart sind. Nach dieser Nukleation ist die Grenzlinie noch immer nach rechts unten orientiert. Drehen wir das Bild um  $45^\circ$ , ist die Grenzlinie durch eine Höhenfunktion  $h(j, t)$  festgelegt. Angelagert wird nur an den lokalen Minima

## KOMPAKT

- Phasengrenzflächen können durch den Kontakt zwischen einer stabilen und metastabilen Phase entstehen.
- Auf mesoskopischer Skala kann die Phasengrenze durch eine Höhenfunktion mit zufälliger Dynamik modelliert werden. In der KPZ-Näherung ergibt sich eine stochastische Feldtheorie. Für exakte Lösungen eignen sich diskrete Modelle.
- Die Theorie sagt vorher, dass die Universalitätsklasse von den Anfangsbedingungen abhängt. Das Experiment bestätigt dies.

Prof. Dr. Herbert Spohn, TU München, Boltzmannstr. 3, 85748 Garching – Preisträgerartikel anlässlich der Verleihung der Max-Planck-Medaille 2017 auf der Jahrestagung der DPG in Münster

Abb. 2 Anhand des Single-step-Modells lässt sich die Grenzliniendynamik analysieren.



von  $h(j,t)$ , und zwar jeweils unabhängig mit Rate 1. Da die Höhendifferenzen nur die Werte  $\pm 1$  annehmen, ist das Modell auch als „single-step“ bekannt. Die Höhendifferenzen lassen sich als ein stochastisches Teilchensystem interpretieren (Abb. 2b). Man definiert die Höhendifferenz  $-1$  als besetzt mit einem Teilchen und die Höhendifferenz  $+1$  als leer. Dann springen die Teilchen mit Rate 1 nach rechts, wobei eine Doppelbesetzung verboten ist. Die Dynamik dieser Teilchen ist als total asymmetrischer Ausschlussprozess (TASEP) bekannt. Als Verallgemeinerung sind zusätzlich Sprünge nach links mit Rate  $p$  möglich, wie zuvor unter Berücksichtigung der Einfachbesetzung. Im Bild der Grenzlinie werden lokale Minima mit Rate 1 aufgefüllt und lokale Maxima mit Rate  $p$  evaporiert. Der symmetrische Fall  $p = 1$  ist speziell. Die systematische Wachstumsgeschwindigkeit verschwindet. Physikalisch entspricht dies einer Kontaktlinie zwischen zwei stabilen Phasen.

Der Mathematiker Kurt Johansson hat das zentrale Problem der Höhenfluktuationen teilweise gelöst [4]. Dazu nimmt er an, dass anfänglich die metastabile Phase nur den positiven Quadranten ausfüllt. Das mittlere Höhenprofil ist dann parabolisch:  $h(j,t) \approx (1/2)t + (1/2t)j^2$  für  $|j| < t$  (Abb. 2c). Für die TASEP-Höhe bei Null gilt

$$h(0,t) \approx v_\infty t - (\Gamma t)^{1/3} \xi_{\text{GUE}}, \quad (1)$$

wobei  $\xi_{\text{GUE}}$  eine GUE Tracy-Widom verteilte Zufallsvariable ist (Infokasten 1). Die asymptotische Wachs-

tumsgeschwindigkeit  $v_\infty$  und die Zeitskala  $\Gamma^{-1}$  sind modellabhängig. Der Skalenexponent  $1/3$  und die Zufallsamplitude  $\xi_{\text{GUE}}$  gelten aber universell. Für den TASEP mit Dichte  $1/2$  bei Null gilt  $v_\infty = 1/2$  und  $\Gamma = 1/2$ . Alternativ dazu kann man flache Anfangsbedingungen wählen, nämlich alternierend  $h(j,0) = 0$  für gerades und  $h(j,0) = 1$  für ungerades  $j$ . Dann gilt immer noch Gleichung (1). Überraschenderweise ist aber die Zufallsamplitude jetzt GOE Tracy-Widom-verteilt (Infokasten 1).

Bei dem visuellen Vergleich von Abb. 2c mit dem experimentellen Takeuchi-Cluster ist zu beachten, dass die Krümmungen entgegengesetzte Vorzeichen haben. In beiden Fällen vergrößert sich der Krümmungsradius mit der Zeit, und nur das Vorzeichen der fluktuierenden Amplitude in Gl. (1) hängt von der Krümmung ab. Insofern ist zu erwarten, dass die experimentellen und theoretischen Formfluktuationen quantitativ übereinstimmen.

Wie Abb. 2c zeigt, sind auch die räumlichen Fluktuationen bei festem  $t$  interessant [5]. Für diese gilt in der Nähe des Minimums

$$h(j,t) \approx \frac{t}{2} - \left(\frac{t}{2}\right)^{1/3} (\mathcal{A}(w) - w^2), \quad j = 2\left(\frac{t}{2}\right)^{2/3} w. \quad (2)$$

Die Korrelationen variieren auf der Skala  $t^{2/3}$  und werden quantitativ durch den Airy-Prozess  $\mathcal{A}(w)$  beschrieben (Infokasten 1). Der Airy-Prozess ist stationär mit Zweipunktfunktion  $\langle \mathcal{A}(w)\mathcal{A}(w') \rangle - \langle \mathcal{A}(0) \rangle^2 \approx |w-w'|^{-2}$ . Exakte asymptotische Formeln wie (1) und (2) sind ein

### TRACY-WIDOM-VERTEILUNGEN UND BROWNSCHE DYNAMIK VON DYSON

Wir betrachten die  $N \times N$ -Matrix  $X$  mit unabhängigen komplex Gauß-verteilten Matrixelementen,  $\langle X_{ij} \rangle = 0$ ,  $\langle |X_{ij}|^2 \rangle = 1$ ,  $\langle X_{ij}^2 \rangle = 0$ , und setzen  $A = (1/\sqrt{2N})(X + X^*)$ .  $A$  ist eine GUE-Zufallsmatrix mit Wahrscheinlichkeitsdichte  $\exp[-(1/2) \text{tr}(A^2)]$ . Die zufälligen Eigenwerte von  $A$  sind  $\lambda_1 < \dots < \lambda_N$ , wobei die Skalierung von  $A$  so gewählt wurde, dass  $\lambda_{j+1} - \lambda_j = \mathcal{O}(1)$ . Im Limes  $N \rightarrow \infty$  gilt für den größten Eigenwert

$$\lambda_N \approx 2N + N^{1/3} \xi_{\text{GUE}}. \quad (i)$$

Die Zufallsvariable  $\xi_{\text{GUE}}$  ist bestimmt durch die GUE Tracy-Widom-Verteilungsfunktion

$$\mathbb{P}(\xi_{\text{GUE}} \leq s) = \det(1 - P_s K_{\text{Ai}} P_s). \quad (ii)$$

Die Operatoren wirken hier auf  $L^2(\mathbb{R}, dx)$ ,  $P_s$  projiziert auf das Intervall  $[s, \infty)$  und  $K_{\text{Ai}}$  ist der Airy-Operator mit dem Integralkern  $K_{\text{Ai}}(x,y) = \int_0^\infty d\lambda \text{Ai}(x+\lambda) \text{Ai}(y+\lambda)$ . Für  $X$  reell erhält man die GOE Tracy-Widom-Verteilung. Sie ist wie oben definiert, wobei  $K_{\text{Ai}}$  durch den Operator mit Integralkern  $\text{Ai}(x+y)$  zu ersetzen ist.

Dyson betrachtet eine matrixwertige Langevin-Gleichung mit der Eigenschaft, dass bezüglich  $\exp[-(1/2) \text{tr}(A^2)]$  die Bedingung des detaillierten Gleichgewichts erfüllt ist. Die Dynamik der Eigenwerte definiert dann die Brownsche

Bewegung von Dyson. Bei festen Endpunkten gibt es eine einfache Konstruktion. Dazu betrachten wir  $N$  Brownsche Brücken  $\{b_j(s), |s| \leq t, j = 1, \dots, N\}$  mit  $b_j(-t) = 0 = b_j(t)$  bedingt auf  $b_j(s) < b_{j+1}(s)$  für alle  $s \in (-t, t)$ .  $\{b_j(s), j = 1, \dots, N\}$  für festes  $s$  sind dann verteilt wie die Eigenwerte einer skalierten GUE-Zufallsmatrix. Für die oberste Brownsche Bewegung gilt

$$b_N(t^{2/3}w) \approx 2t + t^{1/3}(\mathcal{A}(w) - w^2) \quad (iii)$$

im Limes  $t \rightarrow \infty$  mit dem Airy-Prozess  $\mathcal{A}(w)$  wie in (2).

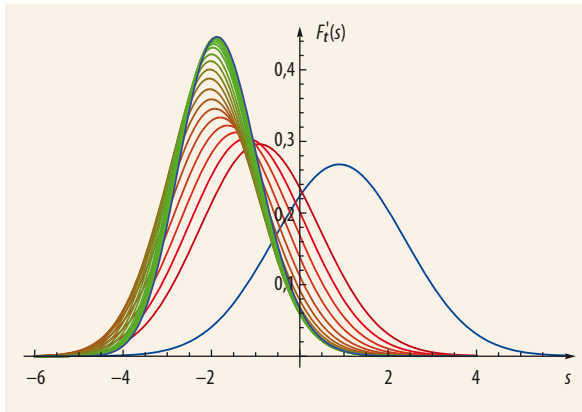


Abb. 3 Zeitabhängige Wahrscheinlichkeitsdichten nach Gl. (4): Ganz rechts ist die Gauß-Dichte für kurze Zeiten und links in grün die asymptotische GUE-Tracy-Widom-Dichte zu sehen.

starker Hinweis auf eine verborgene mathematische Struktur. De facto ist der TASEP Bethe-integrabel, wie auch seine Verallgemeinerung mit  $p > 0$ . Eine detaillierte Analyse erhärtet die Verknüpfung zu quantenintegrablen Systemen (Infokasten 2) und zur Darstellungstheorie von symmetrischen Gruppen, insbesondere zu Macdonald-Polynomen [6].

Andere Bereiche der Statistischen Mechanik haben gezeigt, dass es oft von Vorteil ist, Bewegungsgleichungen in der Form einer stochastischen Feldtheorie zu schreiben. Auf der mesoskopischen Skala betrachten wir dazu eine Höhenfunktion  $h(x,t)$  mit  $x \in \mathbb{R}$ . Die Höhe  $h$  ändert sich in der Zeit durch zufällige Anlagerungs- bzw. Abschmelzungsprozesse. Diese bewirken zwei deterministische Änderungen. Zum einen werden Höhengradienten ausgeglichen, ein Effekt, den der Diffusionsterm  $\partial_x^2 h(x,t)$  beschreibt. Zusätzlich ergibt sich eine systematische Wachstumsgeschwindigkeit, die im Allgemeinen neigungsabhängig ist. Das isotrope Wachstum im Experiment hat beispielsweise eine Neigungsabhängigkeit wie  $(1 + (\partial_x h)^2)^{1/2}$ . Vereinfacht wählen wir aber die Wachstumsgeschwindigkeit quadratisch als  $(\partial_x h(x,t))^2$ . Der noch verbleibende Zufall wird als raumzeitlich weißes Rauschen  $\xi(x,t)$  modelliert. Damit erhalten wir die Langevin-Gleichung

$$\partial_t h = \frac{1}{2} \lambda (\partial_x h)^2 + \frac{1}{2} \partial_x^2 h + \xi, \quad (3)$$

wobei die Einheiten so gewählt sind, dass als Parameter nur die Kopplungskonstante  $\lambda \in \mathbb{R}$  auftaucht. Ein möglicherweise vorhandener Term linear im Gradienten lässt sich durch eine Galilei-Transformation eliminieren. Wie aus der Skalierung von Gl. (3) abzulesen ist, werden höhere Potenzen von  $\partial_x h$  in der Tat durch den quadratischen Term dominiert. Der Fall  $\lambda = 0$  entspricht dem symmetrischen Single-step-Modell, also einer Kontaktlinie zwischen zwei stabilen Phasen. Gl. (3) ist dann linear, und die Fluktuationen der Grenzlinie wachsen an wie  $t^{1/4}$  mit einer Gauß-verteilten Zufallsamplitude. Die Stabil-stabil-Kontaktlinie verhält sich also qualitativ ganz verschieden von der getriebenen Grenzlinie, für welche die Nichtlinearität  $(\partial_x h)^2$  relevant ist. Insbesondere lässt sich das

großskalige Verhalten nicht durch Störungstheorie in  $\lambda$  berechnen.

Gl. (3) ist die berühmte Kardar-Parisi-Zhang-Gleichung (KPZ) in einer Raumdimension [7]. Auf kleiner Skala kann man den nichtlinearen Term vernachlässigen. Dann entspricht  $x \mapsto h(x,t)$  einer Brownschen Bewegung,  $\partial_x h(x,t)$  ist lokal weißes Rauschen und der quadratische Term bleibt als Produkt von  $\delta$ -Funktionen undefiniert. Deswegen untersucht Martin Hairer [8] die Renormierung der KPZ-Gleichung (3) im ultravioletten Limes. Unter anderem dafür wurde er 2014 mit der Fields-Medaille ausgezeichnet.

Für eine makroskopisch gekrümmte Grenzfläche ist es gelungen, eine exakte Lösung der KPZ-Gleichung (3) zu finden [9]. Idealisiert startet man von einer Grenzlinie in der Form einer spitzen Nadel. Diese verbreitert sich zu einer Parabel  $-x^2/2\lambda t$  plus Fluktuationen. Die erzeugende Funktion der Höhe hat die Form

$$\left\langle \exp\left[-\exp\left(\lambda h(0,t) + \frac{1}{24} \lambda^3 t - \left(\frac{|\lambda|t}{2}\right)^{1/3} s\right)\right]\right\rangle = \det(1 - P_s K_t P_s) \quad (4)$$

mit dem zeitabhängigen Airy-Operator  $K_t$  [4]. Die Asymptotik (1) ergibt sich in Übereinstimmung mit der Universalitätshypothese (Abb. 3).

Eine experimentelle Überprüfung der Vorhersagen in [4, 5] hat einige Zeit in Anspruch genommen. Das Takeuchi-Experiment lässt sich unter physikalisch identischen Bedingungen vielfach wiederholen [1]. Damit steht pro Experiment ein Datensatz von etwa  $10^5$  Stichproben zur Verfügung. Realisiert wird ein anfänglicher Punktcluster, der im Mittel kreisförmig anwächst. Man misst den Radius vom Mittelpunkt des Clusters (Abb. 1). In einem weiteren Experiment ist der Kondensationskeim linienförmig. In Abb. 4 ist rechts ein Ausschnitt des oberen Teils des anwachsenden linienförmigen Clusters zu sehen. Die zugehörigen Plots zeigen, dass die Verteilung der Zufallsamplitude qualitativ von den Anfangsbedingungen abhängt, wie von der

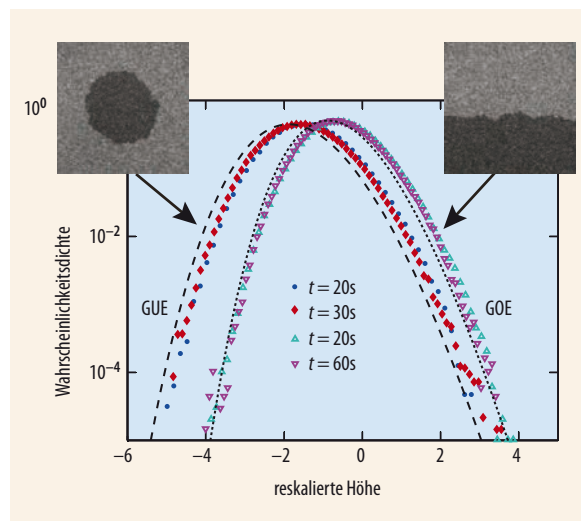


Abb. 4 Im Histogramm der reskalierten Höhe für kreisförmiges (gefüllte Symbole) und linienförmiges (offene Symbole) Wachstum sind die theoretischen Tracy-Widom GUE- und GOE-Verteilungen gestrichelt eingefügt.

Theorie bereits vorhergesagt. Allerdings konvergiert das erste Moment ziemlich langsam, und die zeitliche Asymptotik stellt sich nur näherungsweise ein. Bei der Auswertung werden zunächst die nicht-universellen Koeffizienten so genau wie möglich bestimmt. Damit sind die Skalen von  $h$ ,  $x$  und  $t$  festgelegt, und der Plot in **Abb. 4** enthält keine weiteren Fitparameter [1].

Wie es aussieht, ist damit der vorläufige Höhepunkt eines erfolgreichen Unterfangens erreicht. Die KPZ-Gleichung hat aber ihren Auftritt in noch weiteren zunächst unerwarteten Anwendungen. Als erste wichtige Einsicht lässt sich die KPZ-Gleichung durch die Cole-Hopf-Transformation  $Z(x,t) = \exp(\lambda h(x,t))$  linearisieren mit dem Ergebnis

$$\partial_t Z = \frac{1}{2} \partial_x^2 Z + \lambda \xi Z, \tag{5}$$

also einer Diffusionsgleichung mit multiplikativem Rauschen. Die Familie der  $n$ -ten Momente von  $Z$  wird durch das attraktive Lieb-Liniger Delta-Bose-Gas mit  $n$  Teilchen auf  $\mathbb{R}$  bestimmt, ebenfalls ein Bethe-integrables System. Ein erster Auftritt resultiert aus der Pfadintegraldarstellung

$$Z(x,t) = \int \exp\left[-\int_0^t ds \left(\frac{1}{2} \dot{x}(s)^2 - \lambda \xi(x(s), s)\right)\right] \times Z(x(0), 0) \delta(x(t) - x) \tag{6}$$

als Lösung der linearen Gl. (5). Integriert wird über alle Pfade  $s \mapsto x(s)$ ,  $0 \leq s \leq t$ , mit Endpunkt  $x(t) = x$  und zu spezifizierender Anfangsbedingung  $Z(x,0)$ . Die Energie des Pfades hat einen elastischen und einen potentiellen Anteil.  $Z$  ist die Zustandssumme

und  $h = \lambda^{-1} \log Z$  die zufällige freie Energie. Dies ist das Modell eines gerichteten Polymers in dem Zufallspotential  $-\lambda \xi(x,t)$ . Das ursprünglich dynamische Problem übersetzt sich damit in ein statisches Problem aus der statistischen Mechanik von ungeordneten Systemen. Unser Interesse sind die Fluktuationen der freien Energie. Der „Volumen“anteil proportional zu  $t$  ist selbstmittelnd und im Wesentlichen unabhängig von den Randbedingungen. Die Proportionalitätskonstante ist gerade die Wachstumsgeschwindigkeit der KPZ-Gleichung. Bezüglich Gl. (6) typische Pfade fluktuieren auf der Skala  $t^{2/3}$ , für die sich die Beiträge von elastischer und potentieller Energie gerade die Waage halten. Die spitze Nadel als Anfangsbedingung der KPZ-Gleichung entspricht  $Z(x,0) = \delta(x)$ . Gleichung (4) gilt deswegen für die zufällige freie Energie bei zwei festen Endpunkten,  $x(0) = 0 = x(t)$ . Flache Anfangsbedingungen,  $h(x,0) = 0$ , ergeben  $Z(x,0) = 1$ . Jetzt muss man also über alle Anfangspunkte  $x(0)$  bei festem Endpunkt  $x(t) = 0$  mitteln, wodurch sich die Verteilung der universellen Amplitude ändert. Dies macht plausibel, warum sich in **Abb. 4** die linke und rechte Verteilung unterscheiden.

In der Originalarbeit [7] wird Gl. (3) in beliebiger Dimension geschrieben, wobei  $\partial_x$  durch  $\nabla_x$  zu ersetzen ist (siehe z. B. [2,3,10]). Exakte Lösungen stehen nicht zur Verfügung, stattdessen sind numerische Simulationen notwendig. Die Untersuchungen in 1+1 Dimensionen lehren allerdings, dass im Vergleich zu Momenten volle Wahrscheinlichkeitsverteilungen ausgesprochen informativ sind. In dem physikalisch relevanten Fall von 2+1 Dimensionen gilt immer noch die Asymptotik (1). Allerdings fällt der dynamische Skalenexponent  $1/3$  auf einen Wert nahe bei 0,24. Bei festem Endpunkt gibt es drei Klassen von Anfangsbedingungen – punktförmig, linienförmig und flächenförmig [10], mit drei unterschiedlichen asymptotischen Höhenverteilungen.

Etwas indirekter tritt die eindimensionale KPZ-Gleichung auch in anderen Bereichen auf. Als ein Beispiel diskutieren wir eine eindimensionale Flüssigkeit mit Hamiltonscher Funktion

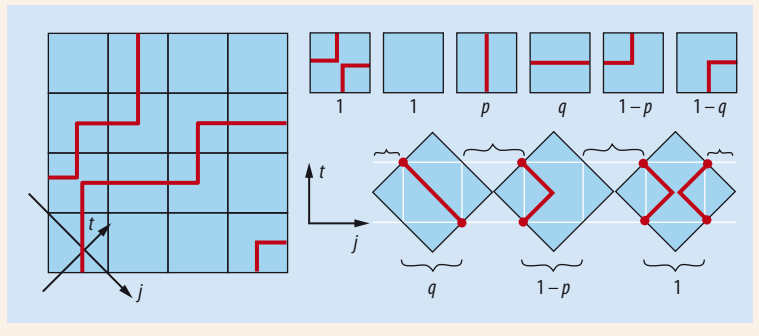
$$H = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} p_j^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq N} V(q_i - q_j). \tag{7}$$

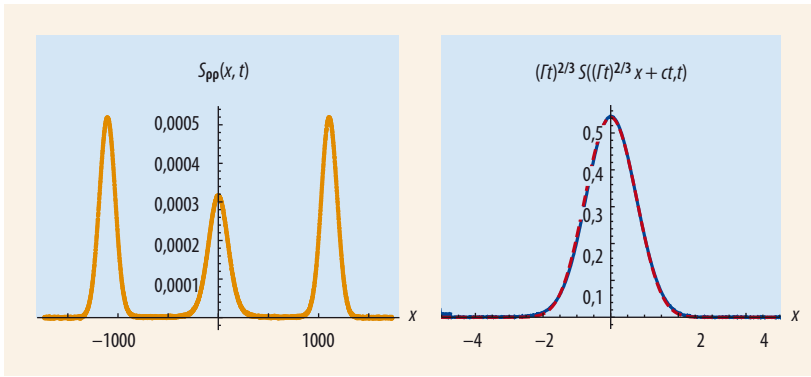
$q_j, p_j$  sind Ort und Impuls des  $j$ -ten Teilchens und  $V$  ist ein kurzreichweitiges Potential mit  $V(x) = V(-x)$ . Die lokalen Erhaltungsgrößen der Flüssigkeit sind Teilchendichte  $\rho(x,t)$ , Impuls  $v(x,t)$  und Gesamtenergie  $e(x,t)$  als Funktionen auf dem Phasenraum. Bis auf die wenigen Potentiale mit integrierbarer Dynamik sind keine weiteren lokalen Erhaltungsgrößen zu erwarten. Entsprechend ist der thermische Zustand durch Temperatur, chemisches Potential und mittlere Geschwindigkeit charakterisiert. Ein zentrales Problem ist die Berechnung der Strukturfunktion  $\langle \rho(x,t) \rho(0,0) \rangle$  und der analogen dynamischen Korrelationen für die weiteren Erhaltungsgrößen. Hierbei ist die Teilchendichte  $\rho(x,t)$  durch die Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichungen bestimmt, und  $\langle \cdot \rangle$  bezeichnet den

### 6-VERTEX-MODELL AM KPZ-PUNKT

Die KPZ-Gleichung charakterisiert auch Eigenschaften von zufälligem Pflastern der Ebene. Auf dem Quadratgitter betrachten wir ein Ensemble von Rechts-oben-Linien, die sich berühren, aber nicht kreuzen dürfen. Dadurch ergeben sich quadratische Kacheln mit 6 unterschiedlichen Mustern. Gepflastert wird unter der Nebenbedingung von fortlaufenden Linien. Das Gewicht einer Linienkonfiguration ist das Produkt der einzelnen Kachelgewichte. Die Gewichte  $(1,1,p,q,1-p,q)$ ,  $0 \leq p, q \leq 1$ , definieren den KPZ-Punkt. Die diagonale Transfermatrix des 6-Vertex-Modells ist dann eine Mar-

kov-Kette mit Zustandsraum  $\{0,1\}^Z$ . Im ersten Schritt werden Zweierblöcke gebildet. Jeder Block wird unabhängig gemäß den Vertexgewichten ausgewürfelt, zum Beispiel 01 geht über nach 10 mit Wahrscheinlichkeit  $q$  und 10 nach 10 mit Wahrscheinlichkeit  $1-p$ . Im nächsten Schritt wird die Zerlegung in Zweierblöcke um eine Einheit versetzt etc. Diese Transfermatrix ist eine diskretisierte Version des ASEP. Die Eigenvektoren und Eigenwerte der Transfermatrix lassen sich mit Hilfe des Bethe-Ansatzes bestimmen. Für die so gewählten Parameter ist das 6-Vertex-Modell in der KPZ-Universalitätsklasse.





**Abb. 5** MD-Simulation einer eindimensionalen Flüssigkeit mit Wechselwirkungspotential  $V, V(x) = \infty$ , falls  $0 \leq |x| \leq \frac{1}{2}$ ,  $V(x) = 1$  falls  $\frac{1}{2} < |x| \leq 1$  und  $V(x) = 0$  sonst, für  $N = 4096$  und  $t = 1024$ . Das Volumen ist  $L = 5104$ , die Dichte  $\rho = 0,80$ , die inverse Temperatur  $\beta = 2$ , der Druck  $P = 1,20$  und die adiabatische Schallgeschwindigkeit  $c = 2,17$ . Links sieht man die drei Peaks der Dichtekorrelation. Rechts ist der Peak der Schallwelle gefittet mit dem Skalensexponenten  $2/3$  und der Skalenfunktion  $f_{\text{KPZ}}$  zu sehen.

thermischen Mittelwert. **Abb. 5** zeigt das Ergebnis einer Molekulardynamiksimulation mit 4096 Teilchen [11]. Die anfängliche kleine Störung der Dichte bei Null erzeugt Anregungen, die sich in der Form von drei Peaks mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Ein Anteil ist bei Null lokalisiert. Der entsprechende Peak skaliert für große Zeiten wie  $(\Gamma t)^{-3/5} f_0((\Gamma t)^{-3/5} x)$ , wobei  $f_0$  die Lévy-Verteilung mit Fourier-Transformierter  $\hat{f}_0(k) = \exp(-|k|^{5/3})$  ist. Zusätzlich werden zwei einzelne links- und rechtslaufende Wellen generiert, die sich beide mit der Schallgeschwindigkeit  $c$  bewegen. Ihre Form skaliert wie  $(\Gamma t)^{-2/3} f_s((\Gamma t)^{-2/3}(x \pm ct))$  mit einem Exponenten, der bereits auf die KPZ-Gleichung hindeutet.

In der Tat lässt sich die Skalenfunktion  $f_s$  mit Hilfe der KPZ-Gleichung berechnen. Da die Flüssigkeit drei Erhaltungsgrößen besitzt, muss die KPZ-Gleichung auf drei Komponenten verallgemeinert werden. Allerdings entkoppelt die Schallwelle für große Zeiten und wird näherungsweise durch  $\partial_x h(x, t)$  beschrieben. In Gl. (3) wählen wir deswegen zufällige Anfangsbedingungen, sodass  $\partial_x h(x, 0)$  weißes Rauschen mit Korrelator  $\langle \partial_x h(x, 0) \partial_x h(x', 0) \rangle = \delta(x - x')$  ist. Unter der KPZ-Gleichung ist diese Verteilung stationär. Im Langzeit-Limes gilt für die raumzeitliche Korrelation

$$\langle \partial_x h(x, t) \partial_x h(0, 0) \rangle \simeq (\Gamma t)^{-2/3} f_{\text{KPZ}}((\Gamma t)^{-2/3} x), \quad (8)$$

wobei  $\Gamma = \sqrt{2} |\lambda|$  und  $f_{\text{KPZ}}$  durch eine mehr oder weniger explizite Formel definiert ist. Als ein Ergebnis der nichtlinearen fluktuierenden Hydrodynamik [12] gilt  $f_s = f_{\text{KPZ}}$ .

Die Herleitung von  $f_s = f_{\text{KPZ}}$  benutzt ganz wesentlich lokale Erhaltungsgrößen und sollte deswegen auch auf nichtintegrierbare Quantenflüssigkeiten anwendbar sein. Allerdings darf die Temperatur nicht zu klein sein, weil sonst die nichtklassische Grundzustandsstruktur sichtbar wird. Die KPZ-Universalitätsklasse beschreibt auch die Formfluktuationen von Kristallfacetten, die Statistik von lokalen Lyapunov-Exponenten und die Verschränkungsentropie eindimensionaler Quantensysteme. Ein Ende von Anwendungen der KPZ-Gleichung ist nicht abzusehen.

\*

Bei dieser Gelegenheit bedanke ich mich in chronologischer Reihenfolge bei Joachim Krug, Leh-Hun Gwa, Michael Prähofer, Patrik Ferrari, Tomohiro Sasamoto,

Sylvain Prolhac, Christian Mendl und Thomas Weiss für die inspirierende Zusammenarbeit. Nur gemeinsam haben wir zum Verständnis der Dynamik von Grenzflächen beigetragen.

### Literatur

- [1] K. A. Takeuchi und M. Sano, J. Stat. Phys. **147**, 853 (2012)
- [2] A.-L. Barabasi und H. E. Stanley, Fractal Concepts in Surface Growth, Cambridge University Press (1995)
- [3] J. Krug, Adv. Phys. **46**, 139 (1997)
- [4] K. Johansson, Commun. Math. Phys. **209**, 437 (2000)
- [5] M. Prähofer und H. Spohn, Phys. Rev. Lett. **84**, 4882 (2000) und J. Stat. Phys. **108**, 1071 (2002)
- [6] A. Borodin und I. Corwin, Probab. Theory Relat. Fields **158**, 225 (2014)
- [7] M. Kardar, G. Parisi und Y.-C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **56**, 889 (1986)
- [8] M. Hairer, Annals Math. **178**, 559 (2013)
- [9] Dieses Ergebnis wurde unabhängig und zeitgleich von drei Gruppen erzielt: G. Amir, I. Corwin und J. Quastel, Comm. Pure Appl. Math. **64**, 466 (2011); P. Calabrese, P. Le Doussal und A. Rosso, Europhys. Lett. **90**, 200002 (2010); T. Sasamoto und H. Spohn, Nuclear Phys. B **834**, 523 (2010)
- [10] T. Halpin-Healy und K. Takeuchi, J. Stat. Phys. **160**, 794 (2015)
- [11] C. Mendl und H. Spohn, Phys. Rev. E **90**, 012147 (2014)
- [12] H. Spohn, in: S. Lepri (Hrsg.), Springer Lecture Notes in Physics, Band 921, S. 107 (2016)

### DER AUTOR

**Herbert Spohn** studierte Physik an der Universität Stuttgart und der LMU München, an der er auch promovierte. Als Postdoktorand arbeitete er bei Joel Lebowitz an der Yeshiva University und bei Elliott Lieb an der Princeton University. Nach einem Heisenberg-Stipendium wurde er 1982 an der LMU zum Professor für Theoretische Festkörperphysik ernannt. Fünfzehn Jahre später wechselte er an die benachbarte TUM auf einen Lehrstuhl für Mathematische Physik. Seine Forschungen wurden mit dem Dannie Heineman Prize for Mathematical Physics (AIP und APS), dem Leonard Eisenbud Prize for Mathematics and Physics (AMS), der Georg-Cantor-Medaille der DMV und dem Henri-Poincaré-Prize (IAMP) ausgezeichnet. 2011 erhielt er den Docteur Honoris Causa de L'Université Paris-Dauphine.



DPG / Greiner