

Der Quelle auf der Spur

Der direkte experimentelle Nachweis und die Analyse von Gravitationswellen sind möglich, wenn es gelingt, sie analytisch zu modellieren.

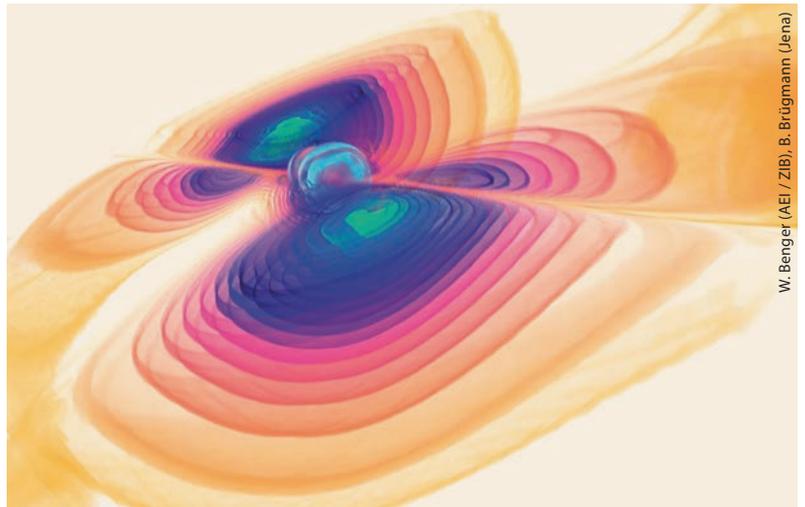
Gerhard Schäfer

Wenn Gravitationswellen direkt gemessen werden sollen, spielen Abstandsmessungen von einem Tausendstel des Protonendurchmessers und sogar darunter eine Rolle. Ein effizienter Algorithmus, der die erwarteten Gravitationswellensignale vom Untergrund der Detektoren trennt, ist für den Nachweis der Wellen unverzichtbar. Die analytische Modellierung von Gravitationswellen hilft dabei, die Parameter des Quellsystems der Welle zu bestimmen.

Fast genau hundert Jahre nach Einsteins epochaler Theorie der Gravitation und seinen Rechnungen zu Gravitationswellen [1] gelang am 14. September 2015 der erste direkte Nachweis einer Gravitationswelle [2]. Ohne Zweifel ist es damit nun möglich, die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) in vollem Umfang physikalisch zu nutzen. Dazu gehört es, Schwarze Löcher detailliert zu erforschen. Diese Objekte sind eine spektakuläre Vorhersage der ART und gleichzeitig die Quelle der bisher beobachteten Gravitationswellen. Diese wurden – analog zu anderen astronomischen Ereignissen wie Supernova-Explosionen – nach dem Datum ihrer Entdeckung GW150914 [3] und GW151226 [4] benannt. Um die winzigen Signale aufzufinden, waren analytische Modelle ausschlaggebend, welche die möglichen Gravitationswellen mathematisch beschreiben. Die Modellierung im Fall zweier verschmelzender Schwarzer Löcher wird im Folgenden erklärt.

Die Newtonsche Theorie beschreibt physikalische Vorgänge in Gravitationsfeldern mit bemerkenswerter Genauigkeit. Erst in „exotischen“ Bereichen, beispielsweise bei sehr großen Feldstärken, finden sich Abweichungen von dieser Beschreibung. Als Ausgangspunkt für die explizite analytische Lösung der Feldgleichungen der ART liegt es nahe, die Newtonschen Gleichungen zu verwenden [5]. Denn die Feldgleichungen der ART verallgemeinern die Newtonschen Potential- und Bewegungsgleichungen und gehen im Grenzfall einer unendlich großen Lichtgeschwindigkeit ($c \rightarrow \infty$) in diese über.

Für gebundene Binärsysteme impliziert das Newtonsche Virialtheorem, dass kinetische Energie und der Betrag der potentiellen Energie in der gleichen Größenordnung liegen, d. h. $v^2 \sim GM/r$. Dabei ist v die Relativgeschwindigkeit der beiden Massen und M deren Gesamtmasse. Der Abstand der Massen zueinander ist r , G bezeichnet die Newtonsche Gravitations-



W. Bengel (AEI / ZIB), B. Brügmann (Jena)

konstante. Für kleine Geschwindigkeiten und schwache Gravitationsfelder eignet sich ϵ als dimensionsloser Entwicklungsparameter mit $\epsilon \sim v^2/c^2 \sim GM/rc^2$ bis zu Werten von maximal $\epsilon \sim 1/10$ oder $v/c \sim 1/3$. Diese Entwicklung ist für die Dynamik nahe der Oberfläche von Neutronensternen ($\epsilon \sim 1/5$) oder nahe den Horizonten Schwarzer Löcher ($\epsilon \sim 1/2$) nicht mehr brauchbar und divergiert spätestens am Horizont eines Schwarzen Loches. Aber auch schon bei der letzten stabilen Kreisbahn eines Binärsystems ($\epsilon \sim 1/6$) divergiert die Entwicklung einiger Größen.

Um das Abstrahlen von Gravitationswellen beim Verschmelzen zweier Schwarzer Löcher vollständig zu beschreiben, ist also ein analytisches Verfahren nötig, das dynamisch bis in den Bereich stärkster Gravitationsfelder und größter Geschwindigkeiten

Verschmelzen zwei Schwarze Löcher, werden Gravitationswellen abgestrahlt, deren Form die Parameter des Quellsystems verrät.

KOMPAKT

- Die Signale von Gravitationswellen in erdgebundenen Detektoren sind so klein, dass ihre Form sehr genau bekannt sein muss, um sie vom Untergrund zu trennen.
- Die Numerische Relativitätstheorie ermöglicht es, die Wellenformen zu simulieren, die z. B. beim Verschmelzen zweier Schwarzer Löcher auftreten.
- Mithilfe dieser Rechnungen lassen sich analytische Modelle kalibrieren, aus denen sich die Wellenform allein aus den Parametern des Quellsystems ableitet.
- Der Vergleich der Messdaten mit den Ergebnissen der analytischen Modelle erlaubt es, Astronomie mit Gravitationswellen zu betreiben.

Prof. Dr. Gerhard Schäfer, Theoretisch-Physikalisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Max-Wien-Platz 1, 07743 Jena

hineinreicht. Startpunkt ist das Post-Newtonsche Näherungsverfahren, das während des Verschmelzens keine Ergebnisse liefert. Darauf aufbauend leitet sich die analytische Lösung des „effektiven Einkörperproblems“ ab. Zusammen mit Resultaten der rein rechnergestützten Numerischen Relativitätstheorie ergeben sich daraus Wellenformen, mit denen sich Gravitationswellen in den experimentellen Signalen aufspüren und analysieren ließen.

Von Newton zu Post-Newton

Unter dem Post-Newtonschen (PN) Näherungsverfahren der Feldgleichungen der ART versteht man deren formale Entwicklung nach Potenzen von $1/c$ mit der Bezeichnung n PN für die Ordnung $(1/c^2)^n$, d. h. es kommen auch halbzahlige Ordnungen vor [6]. Dabei handelt es sich nicht um eine analytische Entwicklung, da in höheren Ordnungen auch Terme der Form $(1/c^2)^n (\ln c)^m$ mit positiven ganzen Zahlen m auftreten. Physikalisch liegt das an der Selbstwechselwirkung des relativistischen Gravitationsfeldes: Wenn Gravitationswellen aus dem System auslaufen, rückstreuen sie am Newtonschen Gravitationsfeld des Systems. Das gilt auch in einer vollrelativistischen Rechnung – wobei hier dann mit der relativistischen Verallgemeinerung des Newtonschen Gravitationsfeldes gerechnet wird.

Einerseits besitzt die Newtonsche Gravitationstheorie nur eine einzige Potentialfunktion Φ mit der Massendichte ρ als Quelle. Die Newtonsche Massenstrom- oder Impulsdichte ρv (in kartesischen Koordinaten ρv_i , mit $i = 1, 2, 3$) und die Impulsstromdichte $\rho v_i v_j$ sind dagegen keine Quellen von Potentialfunktionen.¹⁾ Andererseits bilden die „Newtonschen“ Potential-

funktionen Φ_{ij} zusammen einen symmetrischen Tensor (Infokasten „Newtonsches Tensorpotential“) und enthalten bereits alle Informationen zu Gravitationswellen in führender Ordnung, falls in Verallgemeinerung der Poisson-Gleichung die relativistische Wellengleichung

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) \Phi_{ij} = 4\pi G \tau_{ij} \tag{1}$$

zur Anwendung kommt. Diese Form geht über das Ziel der Veranschaulichung hinaus [7]. Eine Fernzonenentwicklung der retardierten Lösung von Gl. (1) führt auf auslaufende Wellen.²⁾ Allerdings sind die Gravitationswellen der ART in führender Ordnung rein in den dimensionslosen Potentialfunktionen

$$h_{ij} = -\frac{4}{c^4} \Phi_{ij} \tag{2}$$

enthalten, die additiv (d. h. als Störterme) in die Metrik des dreidimensionalen Raumes eingehen. Gl. (2) macht deutlich, wie sehr die Newtonsche Theorie eine Konstante mit der Dimension Geschwindigkeit – die Lichtgeschwindigkeit c – benötigt: Im Grenzfalle der Newtonschen Theorie ($c \rightarrow \infty$) verschwinden die Potentialfunktionen h_{ij} ganz offensichtlich, und das Tensorpotential Φ_{ij} lässt sich nicht als physikalisches Potential h_{ij} darstellen.

Kreisbahnen um Schwarze Löcher

Verschmelzen zwei Schwarze Löcher miteinander, nähern sie sich auf spiralförmigen Bahnen einander an, und man spricht vom Einspiralen. Um den Ablauf zu verstehen und die Güte des PN-Verfahrens zu testen, ist es hilfreich, zunächst die Energie eines Teilchens der Masse m auf Kreisbahnen im Gravitationsfeld eines nichtrotierenden Schwarzen Loches der Masse M zu betrachten (Infokasten „Kreisbahnen um Schwarze Löcher“). Je kleiner die Masse des Teilchens, desto kleiner ist auch der Effekt des Einspiralens – der Grenzwert gehört zu einer verschwindenden Masse und legt die Struktur fest, über die hinweg Teilchen mit endlicher Masse einspiralen. Damit der Energieausdruck endlich und reell ist, muss $r > 3GM/c^2$ gelten. Nur für masselose Teilchen wie Photonen kann $r = 3GM/c^2$ sein. Dieser Wert legt die instabile Kreisbahn des Lichts um das Schwarze Loch in der Koordinatenebene der betrachteten Kreisbahnen fest (Lichtring). Bei $r = 6GM/c^2$ ist die Teilchenenergie minimal. Hier befindet sich die innerste bzw. letzte stabile Kreisbahn: Für $r \geq 6GM/c^2$ sind die Kreisbahnen der Teilchen stabil, und das Einspiralen erfolgt adiabatisch durch gravitative Strahlungsdämpfung. Im Bereich $3GM/c^2 < r < 6GM/c^2$ wird das Einspiralen durch die instabilen Kreisbahnen massiv verstärkt (Zusammensturz).

Die PN-Reihenentwicklung der Energiefunktion konvergiert zwar für $r > 3GM/c^2$. Die Konvergenz ist aber bereits bei $r = 6GM/c^2$ nicht mehr besonders gut ausgeprägt (Abb. 1). Hier liegt die effektive („Newtonsche“) Geschwindigkeit $v = c\sqrt{GM/rc^2}$ nahe an $0,4c$

1) In der Elektrodynamik sind Ladungsdichte und Stromdichte Quellen von Potentialfunktionen.

2) Der Schwerpunkt „Allgemeine Relativitätstheorie“ des Physik Journals im Juni 2015 behandelt auch die indirekten Nachweise von Gravitationswellen durch Strahlungsdämpfung [8].

NEWTONSCHES TENSORPOTENTIAL

Die übliche Newtonsche Potentialfunktion Φ gehorcht der bekannten skalaren **Poisson-Gleichung**

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

mit dem Laplace-Operator ∇^2 , der oftmals auch mit Δ bezeichnet wird, und der Massendichte ρ . Analog dazu gehorcht das in die Gravitationswellenphysik eingehende Tensorpotential Φ_{ij} auf Newtonscher Ebene bzw. in Newtonscher Näherung der **tensoriellen Potentialgleichung**

$$\nabla^2 \Phi_{ij} = 4\pi G \tau_{ij}.$$

Hierin ist z. B. für ideale Flüssigkeiten, die bei Neutronensternen wichtig sind [6], der **Quellterm** durch

$$\tau_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij} + t_{ij}$$

gegeben mit der Impulsstromdichte $\rho v_i v_j$, dem isotropen Drucktensor $p \delta_{ij}$ und dem **Spannungstensor** des Newtonschen Gravitationsfeldes

$$t_{ij} = \frac{1}{4\pi G} \left[(\nabla \Phi)_i (\nabla \Phi)_j - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \delta_{ij} \right].$$

Dieser Spannungstensor entspricht exakt dem Maxwell'schen Spannungstensor der Elektrostatik, wenn dieser mit der skalaren Potentialfunktion des elektrischen Feldes dargestellt wird. Bei Punktteilchen und bei inkohärenter Materie wie Staub entfällt der Drucktensor. Das gilt auch für Schwarze Löcher, deren Materie als Raumzeit-Singularität beschrieben wird.

und ist damit größer als der eingangs erwähnte Grenzwert des Entwicklungsparameters von $v \sim c/3$. Die lokale Geschwindigkeit \hat{v} auf dieser Kreisbahn hat den Wert $0,5c$. Auf dem Lichtring beträgt die effektive Geschwindigkeit knapp $0,6c$, die lokale Geschwindigkeit ist exakt c .

In Binärsystemen sind Kreisbahnen aufgrund der Abstrahlung von Gravitationswellen nicht stabil. Die Partner spiralen auf quasi-Kreisbahnen adiabatisch ein („Inspiral“-Phase), bis die letzte stabile Kreisbahn erreicht ist und der Zusammensturz („Plunge“-Phase) beginnt. Beim Vergleich des konservativen Anteils der Energie eines Binärsystems mit gleichen Massen in 4PN-Näherung – der höchsten Ordnung, die bis dato als Näherung für Binärsysteme erreicht wurde – zeigt sich, dass die letzte stabile Kreisbahn gegenüber dem Fall des Testteilchens zu höheren Frequenzen und stärkerer Bindung verschoben ist (Abb. 1). Für sehr verschiedene Massenwerte liegt die letzte stabile Kreisbahn in recht guter Näherung bei $r = 6GM/c^2$ und der Lichtring bei $r = 3GM/c^2$. Um den Lichtring setzt der Verschmelzungsprozess („Merger“-Phase) ein, der mit dem Ausschwingen („Ringdown“-Phase) des Gravitationsfeldes endet.³⁾ Weil die Bahndynamiken die Gravitationswellen erzeugen, spiegeln sich die Eigenschaften der Bahnen in den Gravitationswellenformen wider: Die (Grund-)Frequenz der Gravitationswelle f ist doppelt so groß wie die der Bahnbewegung, sodass mit der Kreisfrequenz der Bahnbewegung ω gilt: $f = \omega/\pi$. Nimmt also die Genauigkeit einer Bahn in gewisser PN-Näherung ab, wird auch die Modellierung der von ihr erzeugten Gravitationswelle unsicherer.

Schwarze Löcher im Doppelpack

Als kompakteste Objekte der ART sind Schwarze Löcher analytisch am Einfachsten zu behandeln. Außerdem sieht ihr Außenfeld genauso aus wie das Feld jedes Sterns, dessen innere Struktur vernachlässigbar ist. Das gilt insbesondere für nichtrotierende isolierte Neutronensterne. Diese deformieren sich aber in der Nähe anderer Sterne oder durch Eigenrotation stärker als ein Schwarzes Loch, sodass ein Punktteilchenmodell zu ihrer Beschreibung früher seine Gültigkeit verliert.

Mithilfe einiger Tricks lassen sich Schwarze Löcher als Komponenten von Binärsystemen mathematisch-analytisch beschreiben. Schwarze Löcher sind keine Punktteilchen, sondern besitzen durch ihren Ereignishorizont eine Ausdehnung. Der Lösungsansatz ähnelt der Bildladungsmethode, die es in der Elektrostatik gestattet, in gewissen Fällen mit virtuellen Punktladungen reale Felder von realen Ladungen zu berechnen. Belegt man zum Beispiel eine geschlossene Äquipotentialfläche um jede einzelne von zwei Punktladungen geeignet mit Ladung, so entfallen zur Beschreibung des Außenraums die Punktladungen: Die Feldlinien im Außenraum sehen aber weiterhin so aus, als ob zwei – nun virtuelle – Punktladungen sie erzeugen würden. Betrachtet man hingegen zwei

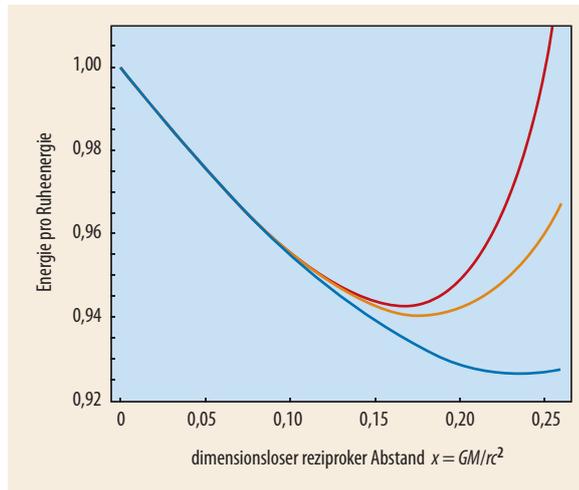


Abb. 1 Die Energie eines Testteilchens im Gravitationsfeld eines nichtrotierenden Schwarzen Loches erreicht ein Minimum, sobald die letzte stabile Kreisbahn erreicht ist (rot). Eine 4PN-Entwicklung beschreibt das Verhalten nicht exakt (orange). Zum Vergleich ist die 4PN-Entwicklung der stationären Energie eines Binärsystems zweier Schwarzer Löcher mit gleichen Massen gezeigt (blau).

geladene leitende Kugelschalen, benötigen diese in ihren Innenbereichen jeweils unendlich viele virtuelle Punktladungen, um das Außenfeld korrekt zu erzeugen [9]. Die virtuellen Punktladungen befinden sich als mathematische Konstrukte jeweils außerhalb des physikalischen Raumbereichs, in dem sich das elektrische Feld und seine wahren Quellen befinden.

Übertragen auf die Gravitation als Theorie der Raumzeit ist es daher notwendig, zu einer anderen, fiktiven Raumzeit überzugehen, in der sich die fiktiven Quellen als Punktmassen aufhalten. Diese Massen erzeugen in der fiktiven Raumzeit – einer flachen Raumzeit, die mit der physikalischen Raumzeit im räumlich Unendlichen übereinstimmt – ein Feld, das zum

3) Bei der Analyse von Gravitationswellensignalen spricht man im Allgemeinen nur von Inspirals-Merger-Ringdown-Wellenformen – die „Plunge“-Phase wird unter die „Inspiral“-Phase subsummiert [7].

KREISBAHNEN UM SCHWARZE LÖCHER

Die Energie E eines (Test-)Teilchens der Ruhemasse m auf einer Kreisbahn um ein Schwarzes Loch der Masse M mit $m \ll M$ ist als Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω koordinatenunabhängig, da nur die asymptotisch messbaren Größen Energie und Frequenz vorkommen. Vollrelativistisch enthält die Energie auch die Ruheenergie des Teilchens. Ist die Größe x durch $x = (1/c^2) (GM\omega)^{2/3} = GM/rc^2$ definiert, hat sie die Bedeutung einer dimensionslosen inversen Schwarzschildschen Radialkoordinate r . Als Funktion von x hat die Energie E die sehr einfache Gestalt

$$\frac{E}{mc^2} = \frac{1-2x}{\sqrt{1-3x}}$$

Dieser Energieausdruck besitzt ein Minimum bei $x = 1/6$, was gleichzeitig die innerste stabile Kreisbahn definiert. Durch die verschwindend kleine Masse des Teilchens entfällt das Einspiralen. Die Potenzreihenentwicklung bis zur 4PN-Ordnung (d. h. Ordnung $1/c^8$) lautet:

$$\frac{E}{mc^2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{27}{16}x^3 + \frac{675}{128}x^4 + \frac{3969}{256}x^5 + \mathcal{O}(x^6)$$

Weil die Energie durch mc^2 dividiert ist, geht die Entwicklung bis zur Ordnung $1/c^{10}$. Nur der Term $-x/2$ ist von Newtonscher Ordnung. In Binärsystemen geht m in die reduzierte Masse und M in die Gesamtmasse über.

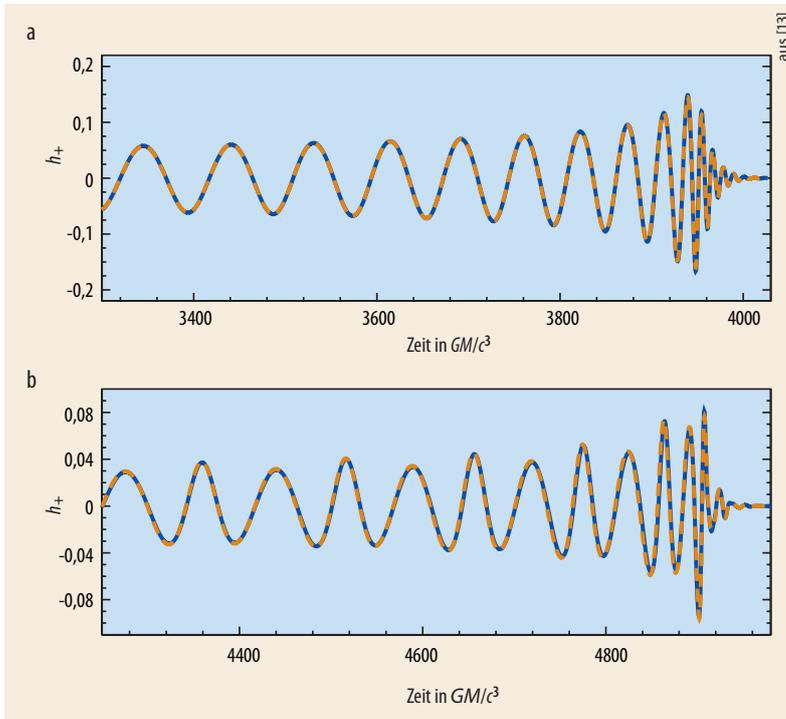


Abb. 2 Die h_+ -Wellenformen der Numerischen Relativitätstheorie (blau) stimmen sehr gut mit den Wellenformen überein, die sich aus dem analytischen EOBNR-Modell (orange) ergeben. Das gilt für ein Binärsystem Schwarzer Löcher mit gleichen Massen (a) ebenso wie für ein System mit Massenverhältnis 6:1 (b).

Metrik-Feld der physikalischen Raumzeit wird. So lassen sich Paare Schwarzer Löcher in der Tat beschreiben [10]. Allerdings reichen dafür dreidimensionale Dirac-Deltafunktionen nicht aus: Weil die Feldgleichungen der ART nichtlinear sind, kommt es mit dreidimensionalen Funktionen zu Integralen und Termen, die nicht endlich sind. Eine tragfähige Verallgemeinerung besteht darin, von drei- zu d -dimensionalen Raumschnitten in $(d+1)$ -dimensionalen Raumzeiten überzugehen und entsprechend d -dimensionale Dirac-Deltafunktionen zu verwenden. Der Limes nach $d = 3$ führt am Ende dieser Rechnung zu einem wohldefinierten endlichen Resultat. Dieses Verfahren ist als dimensionale Regularisierung aus der Quantenfeldtheorie bekannt [10]. Bereits auf der 3PN-Ebene kommt die dimensionale Regularisierung in einem Binärsystem zwingend zum Einsatz. Bis zur 4PN-Ebene ist es möglich, ein einzelnes Schwarzes Loch mittels einer Dirac-Delta-

4) Diese Punktmassen-Methode entspricht der sehr bedeutsamen „Puncture“-Methode aus der Numerischen Relativitätstheorie [11].

funktion zu beschreiben. Auf der 5PN-Ebene kommt die Gezeitendeformation von ausgedehnten Körpern ins Spiel, sodass hier auch mit Ableitungen der Dirac-Deltafunktion gearbeitet werden muss, was auch bei rotierenden Schwarzen Löchern der Fall ist.⁴⁾

Über Post-Newton hinaus

Die Dynamik eines Binärsystems zweier Schwarzer Löcher stellt auch im Schwerpunktsystem bei einer PN-Entwicklung ein kompliziertes Problem dar. Zu seiner Lösung empfiehlt es sich, mithilfe einer kanonischen Transformation zu einer deutlich einfacheren Einteilchendynamik überzugehen, deren Anwendungsbereich sogar das genäherte Problem übersteigt. Genau dieses leistet das effektive Einkörperproblem (Effective-One-Body Problem, EOB) [12]. Dieser Ansatz basiert auf der Tatsache, dass Hamilton-Funktionen unter kanonischen Transformationen im engeren Sinne ihren numerischen Wert beibehalten.

Zur Illustration der EOB-Dynamik kommen wir auf den Fall eines Testteilchens verschwindender Masse im Gravitationsfeld eines Schwarzen Loches zurück. In diesem Fall ist die Dynamik bestechend einfach, gilt auch für hohe Geschwindigkeiten und starke Gravitationsfelder und lässt sich unter Verwendung von Polynomen mathematisch beschreiben. Wenige zusätzliche polynomiale Terme erlauben es, diese einfache Dynamik mit derjenigen eines Binärsystems Schwarzer Löcher mittels einer kanonischen Transformation zu verbinden. Die so erhaltene EOB-Dynamik des Binärsystems ist gültig bis zum Lichtring. Dahinter beginnt die Verschmelzungsphase – sie endet mit dem Ausschwingen des Gravitationsfeldes des neu entstandenen finalen Schwarzen Loches. Die EOB-Dynamik kann auch diesen Bereich darstellen. Dazu ist es notwendig, die verallgemeinerte Schwarzschild-Metrik nochmals zu erweitern und sie am Lichtring an die so genannten Quasi-Normalmoden des Gravitationsfeldes eines gestörten Schwarzen Loches anzupassen.

Darüber hinaus ist in die so erweiterte EOB-Dynamik eine Reaktionskraft einzubauen, die es erlaubt, den Energieverlust durch die abgestrahlten Gravitationswellen zu erfassen. Diese Reaktionskraft entzieht dem System gerade so viel Bindungsenergie, wie es dem Energieverlust durch die abgestrahlten Gravitationswellen entspricht. Damit die analytische Lösung bestmöglich mit Resultaten der hochgenauen Numerischen Relativitätstheorie übereinstimmt, müssen einzelne Koeffizienten der EOB-Dynamik numerisch festgelegt werden. Daher heißt dieses Gravitationswellenmodell auch EOBNR-Modell [13].

Ein weiterer Zugang, der mit der EOB-Dynamik verwandt ist, erlaubt es, die Form der Gravitationswellen zu bestimmen, die beim Verschmelzen zweier Schwarzer Löcher abgestrahlt werden. Als Startpunkt dient die Idee, die Fourier-Transformation der Wellenformen einer PN-Entwicklung so zu verallgemeinern, dass sie sich mit den ausklingenden Schwingungen

Parameter der Quellsysteme bisher beobachteter Gravitationswellen		
	GW150914	GW151226
Anfangsgesamtmasse M in M_\odot	65,5 / 65,1 / 65,3	21,6 / 21,9 / 21,8
Primäre Masse m_1 in M_\odot	37,0 / 35,3 / 36,2	14,0 / 14,5 / 14,2
Sekundäre Masse m_2 in M_\odot	28,3 / 29,9 / 29,1	7,5 / 7,4 / 7,5
Massenverhältnis	0,77 / 0,85 / 0,81	0,54 / 0,51 / 0,52
Endmasse M_e in M_\odot	62,5 / 62,1 / 62,3	20,6 / 20,9 / 20,8
abgestrahlte Energie E_{rad} in $M_\odot c^2$	2,98 / 3,02 / 3,00	1,02 / 0,99 / 1,00
Leuchtkraftabstand R in Mpc	400 / 440 / 420	450 / 440 / 440
Rotverschiebung z der Quelle	0,086 / 0,094 / 0,090	0,096 / 0,092 / 0,094

Tab. Die Werte ergeben sich aus den analytischen EOBNR- und IMRPhenom-Modellen. Die Mittelwerte (fett) berücksichtigen die jeweiligen Messgenauigkeiten. Details zur Analyse sind in [15] beschrieben.

nach dem Verschmelzen verbinden lässt. Auch diese verallgemeinerten Wellenformen im Frequenzraum sind mithilfe der Numerischen Relativitätstheorie zu kalibrieren. Damit sind sie eine Hybridisierung aus PN-Entwicklung und Numerischer Relativitätstheorie, welche die EOB-Dynamik einbezieht [14]. Daher heißt dieses Gravitationswellenmodell „IMRPhenom-Modell“. Beide Modelle spielten eine wichtige Rolle beim Auffinden und Auswerten der gemessenen Gravitationswellensignale [15].

Explizite Form von Gravitationswellen

In der Elektrodynamik ist es üblich, Wellen explizit darzustellen, indem die Strahlung nach Multipolen entwickelt wird. Während die Entwicklung für elektromagnetische Wellen mit Dipolstrahlung beginnt, starten die Gravitationswellen der ART erst mit der Quadrupolstrahlung. Dieses Vorgehen fügt sich bestens in die PN-Entwicklung des Feldes in der Fernzone ein. Die Multipolentwicklung geht damit einher, nach Potenzen von (ω/c) zu entwickeln. Dabei steht ω für eine typische Kreisfrequenz der Quelle, sodass $(\omega/c)^l c^2$ die Ordnung des Massen- l -Pols und $(\omega/c)^l c$ die Ordnung des Massenstrom- l -Pols angibt. Die führende Multipolordnung ist der Massenquadrupol mit $l = 2$, wobei in der Entwicklung analog zu Gl. (2) der Faktor $1/c^4$ herausgezogen ist. Der Massenquadrupol lässt sich in führender PN-Ordnung mit

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{Rc^4} P_{ijkl}(\mathbf{n}) \ddot{Q}_{kl} \quad (3)$$

beschreiben, wobei nach Einsteinscher Summenkonvention über gleiche Indizes zu summieren ist. Dabei ist \mathbf{n} der Einheitsvektor in der Verbindungsrichtung von Quelle zu Beobachter, sodass $\mathbf{nR} = \mathbf{R}$ gilt, wenn R der Abstand beider ist. \ddot{Q}_{kl} ist die zweite zeitliche Ableitung des Newtonschen Massenquadrupoltensors, der aus $Q_{kl} = \int d^3x \rho (x_k x_l - \delta_{kl} x_j x_j / 3)$ folgt. Verwendet man die Newtonsche Gleichung der Massenerhaltung und die Newtonschen Bewegungsgleichungen, ergibt sich daraus die zweite zeitliche Ableitung zu $\ddot{Q}_{kl} = 2 \int d^3x (\tau_{kl} - \delta_{kl} \tau_{ij} / 3)$. Die τ_{ij} sind gerade die Quellterme des Newtonschen Tensorpotentials (Infokasten). Das Anwenden von $P(\mathbf{n})$ auf das Wellenfeld h_{ij} aus Gl. (2) projiziert das Wellenfeld algebraisch und zugleich spurfrei in die Ebene, die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Gravitationswelle ist. Damit gilt auch $h_{ij}^{TT} = P_{ijkl} h_{kl}$. Der Index TT erklärt sich aus den zugehörigen Begriffen „transversal“ und „tracefree“.⁵⁾

Die Spurfreiheit der Projektion ist eine wichtige Eigenschaft, um die Modellierung der Wellen in Zusammenhang mit den experimentellen Beobachtungen zu bringen. Im Experiment sind die Spiegel der Laserinterferometer-Detektoren für die erwarteten, sehr kleinen Auslenkungen horizontal frei beweglich. Ein Ausschlag weist daher den Anteil der transversalen Gravitationswelle nach, der in die Detektorebene projiziert auf die Spiegel wirkt. Die Spurfreiheit der

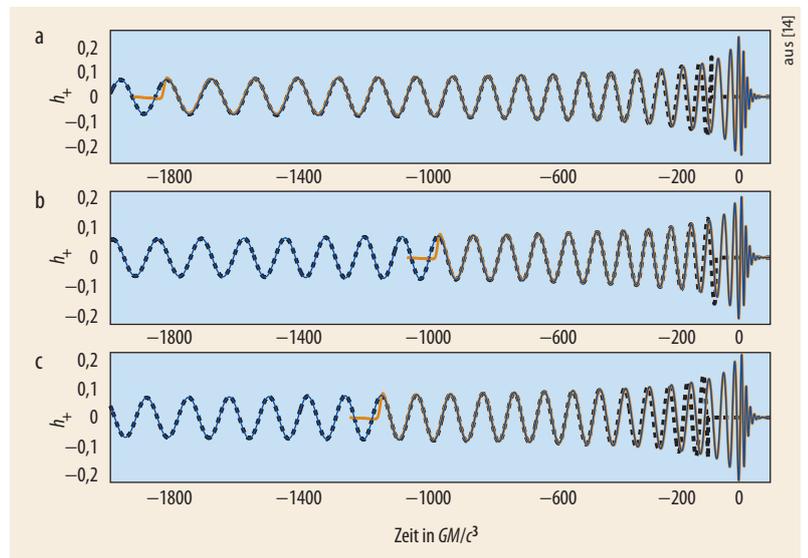


Abb. 3 Auch h_+ -Wellenformen, die mit dem IMRPhenom-Modell analytisch berechnet wurden (blau), stimmen sehr gut mit Ergebnissen der Numerischen Relativitätstheorie (orange) überein. Die Wellenform aus einer 3,5PN-Wellenentwicklung (schwarz gestrichelt) bricht für die Massenverhältnisse 1:1 (a), 2:1 (b) und 3:1 (c) wie erwartet ab, bevor das Verschmelzen einsetzt.

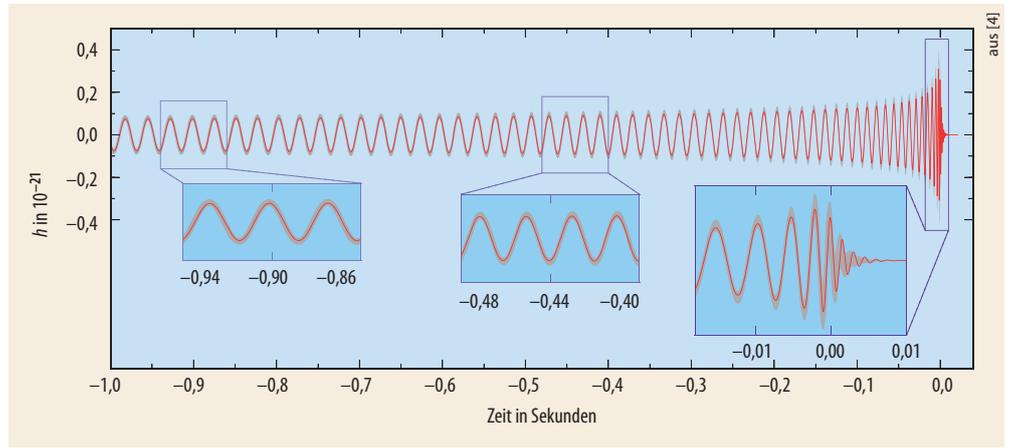
Projektion in der Modellierung induziert, dass frei bewegliche Testmassenanordnungen in der Polarisations Ebene flächenerhaltend deformieren. Dabei gibt es zwei Hauptdeformationsrichtungen: Die lineare (+)-Polarisation bezeichnet die Deformation in zwei vorgegebene, zueinander orthogonale Richtungen, die lineare (×)-Polarisation beschreibt die beiden dazu um 45 Grad gedrehten Richtungen. In der Polarisations Ebene ergeben sich damit relative Abstandsänderungen beispielsweise in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten x und y für (+)-Polarisation $\delta L_x - \delta L_y = h_+ L$ mit den Abständen $L = L_x = L_y$. Solche Abstandsänderungen zeichnen die Detektoren höchst empfindlich als h -Wellenformen auf.

Die analytischen Modelle beschreiben die Abstrahlung deutlich genauer als die „Newtonsche“ Wellenformel nach Gl. (3). Für den Inspiral-Merger-Ringdown-Prozess lassen sich z. B. die h_+ -Wellenformen sowohl mit dem EOBNR-Modell [13] als auch mit dem IMRPhenom-Modell [14] berechnen und mit Wellenformen aus der reinen Numerischen Relativitätstheorie vergleichen (Abb. 2 und Abb. 3). Beide analytischen Modelle und die numerischen Rechnungen stimmen hervorragend überein – unabhängig vom ausgewählten Massenverhältnis der beiden verschmelzenden Schwarzen Löcher. Außerdem zeigen sich deutliche Abweichungen zur Wellenform einer PN-Entwicklung, die neben der führenden Ordnung aus Gl. (3) weitere 3,5 Ordnungen mitnimmt. Insbesondere kann die PN-Entwicklung das Verschmelzen nicht beschreiben.

Im Gegensatz zu den numerischen Rechnungen erlauben es die analytischen Modelle, aus den gemessenen Gravitationswellensignalen auf die Parameter des Quellsystems rückzuschließen. Die eingehenden Massen und die abgestrahlte Energie beeinflussen ebenso wie der Abstand und die Rotverschiebung des Quellsystems die analytischen Wellenformen. Je präzi-

⁵⁾ Analog ergibt sich in der Elektrodynamik das transversale Vektorpotential: $A_i^T = P_{ik} A_k$.

Abb. 4 Aus den Messdaten des Signals der Gravitationswelle GW151226 lässt sich die h -Wellenform rekonstruieren (grau) und mit numerischen Simulationen vergleichen (rot). Die Formen stimmen hervorragend überein.



ser die Wellenform gemessen wurde, desto enger lassen sich aus der analytischen Berechnung die Parameter des Quellsystems eingrenzen. Aus den beiden Signalen GW150914 und GW151226 ergaben sich mit dem EOBNR- und dem IMRPhenom-Modell übereinstimmend sehr unterschiedliche Parameter für die zugrunde liegenden Quellsysteme (Tab.).⁶⁾ Da beide Modelle im Rahmen der Messgenauigkeiten gleichwertig sind, sollte als Ergebnis der Mittelwert beider Auswertungen gelten [15].

Im System der Detektoren werden Massenparameter M_D gemessen, die mit der kosmischen Rotverschiebung z des Quellsystems zu korrigieren sind, um die Massenparameter im Quellsystem M_{BS} zu bestimmen: $M_D = (1 + z) M_{BS}$. Aus der Massendifferenz des Binärsystems und der Masse des am Ende verbleibenden Schwarzen Loches ergibt sich die abgestrahlte Energie. Diese ist in beiden Fällen sehr groß, sodass sich die damit verbundene Strahlung trotz der großen Entfernung der beiden Quellsysteme zur Erde von über 400 Mpc bzw. 1,3 Milliarden Lichtjahren mit den empfindlichen Detektoren nachweisen ließ. Die sehr geringe Wechselwirkung der Gravitationswellen mit den Detektoren auf der Erde führte zu den erwartet winzigen relativen Abstandsänderungen h der Detektor-Spiegel pro gegenseitigem Spiegelabstand (Abb. 4).

Die analytische Modellierung von Gravitationswellen erlaubt es zukünftig zusammen mit noch empfindlicheren Detektoren, nicht nur das Verschmelzen Schwarzer Löcher zu analysieren, sondern auch andere Binärsysteme zu beobachten, die aus zwei Neutronensternen oder einem Neutronenstern und einem Schwarzen Loch bestehen. Damit öffnet sich das Tor zu einer Astronomie mit Gravitationswellen noch weiter. Dabei gibt es von theoretischer und experimenteller Seite noch Herausforderungen. So lässt sich der Kollaps schwerer Sterne zu Neutronensternen oder Schwarzen Löchern nur numerisch berechnen. Hier wird eine analytische Modellierung der numerisch berechneten Wellenformen zunächst als „Template“ für die Suche nach solchen Ereignissen in den Messdaten dienen. Dagegen reicht für die vielen existierenden Doppelsternsysteme mit stationären Bahnlaufzeiten von Stunden bis Minuten das PN-Näherungsverfahren allein aus, um die Form der abgestrahlten

Gravitationswellen zu berechnen. Für den Nachweis solcher niederfrequenten Signale bedarf es aber der Empfindlichkeit raumgestützter interferometrischer Detektoren. Gleiches gilt für Gravitationswellen, die beim Verschmelzen zweier Galaxien auftreten. Die LISA-Pathfinder-Mission erprobt aktuell die dazu notwendigen Schlüsseltechnologien.

Literatur

- [1] A. Einstein, Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Juni 1916, S. 688;
- A. Einstein, Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Feb. 1918, S. 154
- [2] B. P. Abbott et al., Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016)
- [3] T. W. Baumgarte, Physik Journal, April 2016, S. 16
- [4] B. P. Abbott et al., Phys. Rev. Lett. **116**, 241103 (2016)
- [5] M. Bartelmann, Physik Journal, Juni 2015, S. 27
- [6] T. Fließbach, Allgemeine Relativitätstheorie, Springer, Berlin, Heidelberg (2016)
- [7] T. W. Baumgarte, Physik Journal, Juni 2015, S. 39
- [8] M. Kramer und N. Wex, Physik Journal, Juni 2015, S. 31
- [9] W. R. Smythe, Static and Dynamic Electricity, McGraw-Hill, New York (1968)
- [10] P. Jaranowski und G. Schäfer, Phys. Rev. D **61**, 064008 (2000); T. Damour, P. Jaranowski und G. Schäfer, Phys. Lett. B **513**, 147 (2001)
- [11] S. Brandt und B. Brügmann, Phys. Rev. Lett. **78**, 3606 (1997)
- [12] A. Buonanno und T. Damour, Phys. Rev. D **59**, 084006 (1999); A. Buonanno und T. Damour, Phys. Rev. D **62**, 064015 (2000); T. Damour, P. Jaranowski und G. Schäfer, Phys. Rev. D **62**, 084011 (2000)
- [13] Y. Pan, A. Buonanno et al., Phys. Rev. D **84**, 124052 (2011); T. Damour, A. Nagar et al., Phys. Rev. D **83**, 024006 (2011)
- [14] P. Ajith, S. Babak et al., Phys. Rev. D **77**, 104017 (2008); Y. Pan, A. Buonanno et al., Phys. Rev. D **77**, 024014 (2008)
- [15] B. P. Abbott et al., Phys. Rev. X **6**, 041015 (2016)

DER AUTOR

Gerhard Schäfer (FV Gravitation und Relativitätstheorie) studierte Physik an der Universität Tübingen. Nach Promotion und Habilitation an der Universität Konstanz war er Heisenberg-Stipendiat am Observatoire de Paris-Meudon und am Max-Planck-Institut für Astrophysik in Garching. Anschließend forschte und lehrte er an der Universität Jena. Zur Wendezeit leitete er den FV Gravitation und Relativitätstheorie. Im Jahr 2003 war er Mitinitiator des SFB-TR7 Gravitationswellenastronomie. Für seine Verdienste rund um die Gravitationsphysik in Deutschland wurde er 2016 mit der DPG-Ehrendnadel ausgezeichnet.



6) ohne Angaben zu den Spins der Schwarzen Löcher