

Extrem gesucht

Die Optimierung von Suchzeiten ist verknüpft mit der Vorhersage extremer Ereignisse.

1) Für die wissenschaftliche Praxis sind die den Lévy-Flügen verwandten so genannten Lévy Walks realistischer [6].

Bei der Pilzsuche im Wald möchte man den Korb möglichst schnell mit leckeren Pilzen füllen. Doch wie sucht man effizient nach diesen Köstlichkeiten, wenn man nicht weiß, wo sie wachsen (Abb. 1)? Diese Frage ist nicht nur für Pilzsucher relevant. Sie spielt auch eine zentrale Rolle, um zu verstehen, wie weiße Blutzellen effizient Erreger neutralisieren, welche Flugzeiten Albatrosse bei der Nahrungssuche hinter sich bringen oder wie sich die Jagd nach U-Booten optimieren lässt [1–3]. Bei der Suche nach einer theoretischen Antwort auf diese Frage ist Marie Chupeau, Olivier Bénichou und Raphaël Voituriez aus Paris nun ein Durchbruch gelungen [4].

Im gesellschaftlichen Bereich ist die Entwicklung effizienter Suchstrategien als „Operations Research“ etabliert, die mathematische Optimierung von Organisationsproblemen. Beispiele sind die Suche nach Lawinenopfern, Schiffbrüchigen oder Minen. In Biologie und Ökologie ist „Search Research“ [5] über die letzten zwei Jahrzehnte in den Brennpunkt gerückt. Die neue Disziplin der „Movement Ecology“ untersucht Strategien der Nahrungssuche – von Insekten in Blumenwiesen über tauchende Fische bis hin zu Affen,

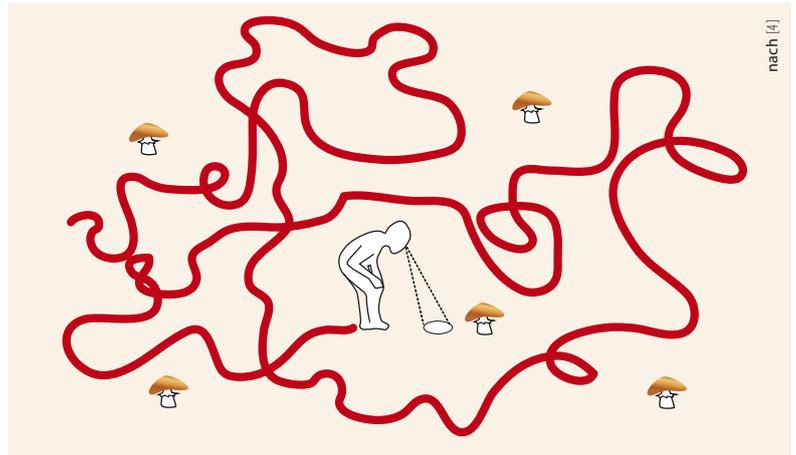


Abb. 1 Gesucht sind die Standorte aller zufällig verteilten Pilze in einem vorgegebenen Bereich. Die Zeit, alle Pilze auf-

zuspüren, ist nur dann minimal, wenn die Suchzeit für einen Pilz minimiert wurde.

die sich durch den Urwald hangeln [3]. Besonders populär ist dabei die Lévy-Hypothese [1]. Sie besagt, dass für zufällig verteilte, ruhende, wiederauffüllbare Nahrungsquellen geringer Dichte besonders lange Lévy-Flüge die Suchzeit minimieren.¹⁾ Für eine Hummel, die in einer Wiese nach seltenen Blumen sucht, sind die Fluglängen ℓ idealerweise nach einem Potenzgesetz verteilt: $P(\ell) \sim \ell^{-1-\mu}$ mit einem Exponenten $0 < \mu < 2$.

Vor über sechzig Jahren bewiesen Gnedenko und Kolmogorow mathematisch, dass solche Lévy-Verteilungen einem zentralen Grenzwertsatz gehorchen [6]. Dieser verallgemeinert den zentralen Grenzwertsatz für Gauß-Verteilungen, der erklärt, warum sich Brownsche Bewegung in einer Vielzahl physikalischer Phänomene beobachten lässt. Lévy-Flüge sind effizienter als Brownsche Bewegung, um weit verteilte Nahrungsquellen aufzuspüren. Gauß-Verteilungen fallen für lange Fluglängen schneller ab als Potenzgesetze, was eine kleinere Wahrscheinlichkeit für weite Sprünge bedeutet. Brownsche Bewegung ist dagegen besser geeignet bei höherer Dichte der Nahrungsquellen. Die empirische Überprüfung der Lévy-Hypothese ist jedoch umstritten. In der Literatur wird nicht nur der experimentelle

Nachweis von Lévy-Verteilungen durch die Analyse biologischer Daten kontrovers diskutiert [7]. Auch deren Interpretation zur Optimierung von Suchzeiten ist unklar. Bei einem Affen im Urwald, der nur bestimmte Früchte frisst, bleibt fraglich, ob dessen Lévy-Sprünge durch die Verteilung der dazugehörigen Baumart bedingt sind oder ob sie eine evolutionär adaptierte, genetisch verankerte Überlebensstrategie darstellen [6].

Theoretisch ist die Lévy-Hypothese bis heute nicht bewiesen. Ursprünglich war sie durch Computersimulationen motiviert [1]. Für bestimmte Zufallsbewegungen lassen sich „Mean First Passage Times“ (MFPT) analytisch ausrechnen: Diese Zeiten benötigt ein sich zufällig bewegendes Punktteilchen, um zum ersten Mal eine bestimmte Grenze zu überschreiten, was als das Aufspüren einer Nahrungsquelle zu deuten ist [2, 3]. Die Theorie der MFPT beschreibt allerdings nur, wie schnell etwa eine Hummel eine einzige Blume findet. Sie kann nicht erklären, mit welcher Strategie ein Insekt viele oder alle Blumen aufsucht.

Um dieses Problem zu lösen, haben sich die Pariser Theoretiker des mathematischen Konzeptes der „Cover Time“ bedient, was in etwa „Überdeckungszeit“ bedeutet. Diese

Dr. Rainer Klages, MPI für Physik komplexer Systeme, Dresden und School of Mathematical Sciences, Queen Mary Univ. London, UK

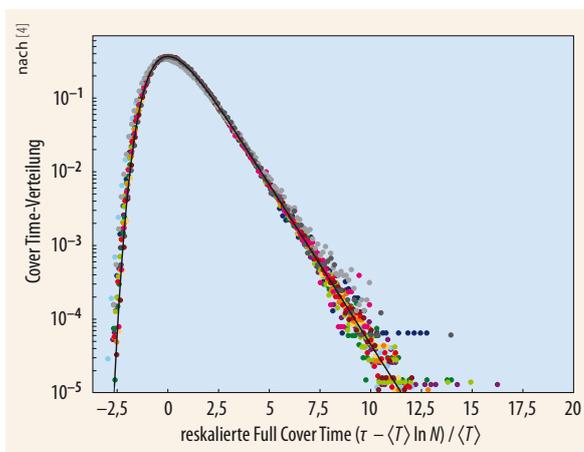


Abb. 2 Analysiert man verschiedene Zufallsprozesse (farbige Punkte) in unterschiedlichen Dimensionen durch Monte-Carlo-Simulationen, fallen alle Statistiken für die Suche nach Knoten in einem Netzwerk auf dieselbe theoretisch berechnete Masterkurve (durchgezogene Linie).

Zeit benötigt ein Teilchen, um M beliebige Knoten in einem aus N Verknüpfungspunkten bestehenden Netzwerk aufzusuchen. Zur Modellierung eines biologischen Systems werden die M Knoten als Futterquellen identifiziert. Die zufälligen Flüge erfolgen entlang der vordefinierten Verbindungslinien zwischen den Knoten des vorgegebenen Netzwerkes. Dabei zeigte sich, dass für eine Vielzahl generischer Zufallsbewegungen die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Cover Time die universelle Form

$$P(x) = \frac{1}{p!} \exp(-(p+1)x - e^{-x})$$

annimmt, mit $p = N - M$ und $x = \tau / \langle T \rangle - \ln N$ für $N, M \rightarrow \infty$ (Abb. 2).

Die „Partial Cover Time“ $\tau = \tau(M, N)$ ist die Zeit, die nötig ist, um M beliebige Knoten des Netzwerkes aufzusuchen, und wird im Fall von $M = N$, wenn alle Knoten besucht werden, zur „Full Cover Time“. $\langle T \rangle$ ist der Mittelwert der MFPT zu einem gegebenen Knoten gemittelt über alle Startbedingungen. In der Theorie extremer Ereignisse ist diese Verteilung als Gumbel-Verteilung wohlbekannt. Sie modelliert, mit welcher Wahrscheinlichkeit z. B. Erdbeben, Sturmfluten oder Börsencrashes stattfinden.

Dieses Resultat lässt sich durch ein einfaches Modell verstehen [8]: Auf einem Netzwerk aus N Knoten besucht man zufällig einen Knoten mit der Wahrscheinlichkeit $1/N$. Diesen Prozess wiederholt man, bis M beliebige Knoten gefunden sind. Eine einfache Rechnung liefert, dass für $N, M \rightarrow \infty$ die Verteilung der partiellen Cover Time τ die obige Gumbel-Verteilung ist, wie für alle anderen in [4] untersuchten Zufallsprozesse. Die Wahrscheinlichkeit, einen der verbliebenen $N - M$ Knoten zu finden, muss für alle letzten Knoten dieselbe sein. Dieses einfache Argument erklärt, warum die Verteilung der Partial Cover Time in diesem Grenzfall eine universelle Form hat. Sie wird allerdings durch die Statistik der MFPTs bestimmt, was zu einer erstaunlichen Schlussfolgerung führt. Kennt man die kleinste MFPT für

die Suche nach einer einzelnen Nahrungsquelle, so optimiert man damit gleichzeitig die Suche nach beliebig vielen Nahrungsquellen. Für den Pilzsucher sind die Konsequenzen unerwartet. Nutzt er irgendeine Suchstrategie, kann er die Suchzeit aufgrund der universellen Statistik nicht optimieren, weil die letzten Pilze immer extrem schwer zu finden sind. Kennt der Pilzsucher allerdings die optimale Suchstrategie, um den ersten Pilz zu finden, so kann er darüber die Suche nach allen optimieren. Leider ist die Suche nach der optimalen Strategie für den ersten Pilz ein nichttriviales Problem [2, 3].

Offen bleibt, inwieweit sich diese Theorie auf räumlich kontinuierliche Dynamiken, die nicht auf Netzwerken stattfinden, übertragen lässt. Im Hinblick auf nahrungssuchende biologische Organismen stellt sich die Frage, wie robust diese Resultate sind. Biologisch relevante Bedingungen, die nicht durch die Theorie abgedeckt werden, wie z. B. Dynamiken mit „Gedächtnis“, bei denen einzelne Schritte nicht unabhängig voneinander sind, könnten die Universalität der Statistik zerstören.

Rainer Klages

- [1] G. Viswanathan, M. da Luz, E. Raposo und H. Stanley, *The Physics of Foraging*, Cambridge University Press, Cambridge (2011)
- [2] O. Bénichou, C. Loverdo, M. Moreau und R. Voituriez, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 81 (2011)
- [3] V. Méndez, D. Campos und F. Bartumeus, *Stochastic Foundations in Movement Ecology*, Springer, Berlin (2014)
- [4] M. Chupeau, O. Bénichou und R. Voituriez, *Nat. Phys.* **11**, 844 (2015)
- [5] M. Shlesinger, *Nature* **443**, 281 (2006)
- [6] V. Zaburdaev, S. Denisov und J. Klafter, *Rev. Mod. Phys.* **87**, 483 (2015)
- [7] M. Buchanan, *Nature* **453**, 714 (2008)
- [8] E. Barkai, *Nat. Phys.* **11**, 807 (2015)