

# Klassifizierung symmetriegeschützter topologischer Phasen

Das Zusammenspiel von Symmetrie und Topologie führt zu vielen neuartigen Phasen der Materie.

Frank Pollmann und Andreas Schnyder

Sowohl beim Quanten-Hall-Effekt als auch in topologischen Isolatoren treten an der Oberfläche leitende („metallische“) Zustände auf, die zu außergewöhnlichen Eigenschaften führen. Die Ursache dieser Zustände liegt in der Topologie der Wellenfunktionen im Inneren des Materials, wobei zwischen Symmetrie und Topologie ein kompliziertes Wechselspiel herrscht.

Materie ist aus einfachen elementaren Bausteinen aufgebaut, den Atomen. Die Wechselwirkungen zwischen ihnen führen zu verschiedenen Phasen mit oft sehr unterschiedlichen Eigenschaften. So kann Wasser zum Beispiel je nach Temperatur und Druck fest oder flüssig sein. Im Allgemeinen lassen sich die verschiedenen Phasen bezüglich ihrer Symmetriebrechung unterscheiden und klassifizieren. Wassereis bricht beispielsweise die kontinuierlichen Translations- und Rotationssymmetrien des Raumes. In einem Magneten bricht die geordnete Ausrichtung der Elektronenspins die Spinrotationssymmetrie sowie die Zeitumkehrinvarianz. Dabei gibt es für jede geordnete Phase eine makroskopische Größe, die den Grad der Ordnung beschreibt, den Ordnungsparameter. Für kontinuierliche Phasenübergänge lässt sich eine effektive Feldtheorie für den Ordnungsparameter herleiten, welche die universellen Eigenschaften der Phasen in der Nähe des Phasenübergangs beschreibt. Alleine die Symmetrien und die Dimensionalität des Systems bestimmen die Form dieser Ginsburg-Landau-Theorie.

Mit dem Quanten-Hall-Effekt (QHE) wurde 1980 jedoch eine neuartige Phase entdeckt, die sich nicht durch Symmetriebrechung beschreiben lässt [1]. Der QHE tritt auf, wenn ein zweidimensionales Elektronengas bei sehr niedrigen Temperaturen einem sehr starken Magnetfeld ausgesetzt wird. Dabei nimmt der Hall-Widerstand nur ganzzahlige Bruchteile der Größe  $h/e^2$  an. Die hochpräzise Quantisierung rührt daher, dass Topologie der Bandstruktur und Hall-Widerstand direkt zusammenhängen [2]. In den letzten Jahren wurden viele weitere Phasen gefunden, in denen die Topologie eine entscheidende Rolle spielt [3–5]. Neben Spinketten mit ganzzahligem Spin zählen dazu insbesondere topologische Isolatoren wie  $\text{Bi}_2\text{Se}_3$  oder  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ , bei denen die topologischen Eigenschaften aufgrund einer durch die Spin-Bahn-Kopplung induzierten Bandinversion entstehen. Charakteristisch für topolo-

gische Phasen sind Randzustände mit besonderen Eigenschaften, die durch gewisse Symmetrien geschützt werden. So haben topologische Isolatoren beispielsweise eine metallische Oberfläche, die unempfindlich ist gegenüber Streuung an Verunreinigungen, solange gewisse Symmetrien (z. B. die Zeitumkehrinvarianz) erhalten bleiben.

## Quantenphasen und Topologie

Üblicherweise führen thermische Fluktuationen bei endlichen Temperaturen  $T$  zu Phasenübergängen. Tatsächlich können sie aber auch bei  $T=0$  K auftreten, obwohl an diesem Punkt alle thermischen Fluktuationen komplett ausgefroren sind [6]. Dann induzieren Quantenfluktuationen, die eine Konsequenz der Heisenbergschen Unschärferelation sind, sog. Quantenphasenübergänge, wenn Parameter im System verändert werden. Bei diesen Übergängen ändert sich die Grundzustandswellenfunktion abrupt. Die Ginsburg-Landau-Theorie lässt sich direkt auf viele Quantenphasen übertragen.

Ein häufig untersuchtes Beispiel im Kontext von Quantenphasenübergängen ist das transversale Ising-Modell. Es beschreibt wechselwirkende lokale Spinfreiheitsgrade, die sich auf den Gitterplätzen eines Kristalls befinden und nach oben oder unten zeigen können. Der Hamilton-Operator enthält einen ferromagnetischen Wechselwirkungsterm (benachbarte Spins möchten in die gleiche Richtung zeigen) zwischen zwei benachbarten Spins und ein transversales

### KOMPAKT

- Topologische Phasen, die z. B. beim Quanten-Hall-Effekt (QHE) auftreten, weisen Randzustände mit besonderen Eigenschaften auf, die durch gewisse Symmetrien geschützt werden.
- Diese Phasen lassen sich durch ganzzahlige topologische Invarianten charakterisieren, beim QHE durch die Chern-Zahl, die proportional zur Hall-Leitfähigkeit ist.
- Verschiedene topologische Invarianten gehören zu unterschiedlichen Äquivalenzklassen symmetriegeschützter topologischer Phasen.
- Während die Klassifizierung in wechselwirkungsfreien Systemen abgeschlossen ist, fehlt bei Systemen mit Wechselwirkung noch ein vollständiges Verständnis.

Dr. Frank Pollmann, Max-Planck-Institut für die Physik komplexer Systeme, Noethnitzer Str. 38, 01187 Dresden; Dr. Andreas Schnyder, Max-Planck-Institut für Festkörperforschung, Heisenbergstr. 1, 70569 Stuttgart – Preisträgerartikel anlässlich der Verleihung des Walter-Schottky-Preises 2015 auf der DPG-Jahrestagung in Berlin.

Magnetfeld (flippt den Zustand eines Spins). Dieses System hat eine sog.  $\mathbb{Z}_2$ -Symmetrie: Beide Terme sind symmetrisch bezüglich eines globalen Spinflips, also einer Symmetrieeoperation, die alle Spins gleichzeitig umkehrt. Wenn der ferromagnetische Term dominiert, ist der Grundzustand zweifach entartet und enthält parallel ausgerichtete Spins, die nach oben oder unten zeigen. Diese Grundzustände brechen die Symmetrie bezüglich eines globalen Spinflips. Wenn das transversale Magnetfeld dominiert, ist der Grundzustand ein spinpolarisierter Zustand, bei dem alle Spins in die Richtung des Feldes zeigen. Dieser nicht entartete Grundzustand ist symmetrisch bezüglich des globalen Spinflips. Zwischen diesen beiden Phasen tritt ein durch Quantenfluktuationen induzierter Quantenphasenübergang auf, den wir wieder direkt mithilfe der Ginsburg-Landau-Theorie verstehen können: Es gibt eine Phase mit einer spontan gebrochenen Spinflipsymmetrie (Ferromagnet) und eine symmetrische Phase (Paramagnet).

Im QHE treten nun ebenfalls verschiedene Quantenphasen auf, wenn sich das Magnetfeld ändert. Diese entziehen sich allerdings der Ginsburg-Landau-Theorie und lassen sich nicht durch spontane Symmetriebrechung unterscheiden. Stattdessen benötigen wir hier eine neue „topologische“ Charakterisierung der Phasen. Die topologische Invariante, welche nur ganzzahlige Werte annehmen kann, ist ein Integral über die Berry-Krümmung in der magnetischen Brillouin-Zone – die sog. Chern-Zahl, welche direkt proportional zur Hall-Leitfähigkeit ist (Infokasten „Chern-Isolator“). Die Quanten-Hall-Phasen zeichnen sich durch eine von Null verschiedene Chern-Zahl aus. Hier zeigt sich

unmittelbar der Zusammenhang zur Topologie: Die Chern-Zahl entspricht dem Geschlecht einer Fläche im Gauss-Bonnet-Theorem (Infokasten „Topologische Äquivalenzklassen ...“).

## Topologie und Symmetrie

Die Entdeckung von topologischen Isolatoren mit Spin-Bahn-Kopplung wie  $\text{Bi}_2\text{Se}_3$  hat gezeigt, dass topologische Quantenphasen viel verbreiteter sind als bisher angenommen und dass zwischen Symmetrie und Topologie ein kompliziertes Wechselspiel herrscht. Wie in der Ginsburg-Landau-Theorie sind die Symmetrien ein wichtiges Prinzip, um topologische Phasen zu verstehen und zu klassifizieren. Allerdings werden die Phasen nun nicht nach der gebrochenen Symmetrie klassifiziert, sondern *ungebrochene* Symmetrien sind von entscheidender Bedeutung für die Definition von topologischen Phasen. So ist es z. B. möglich, in Abwesenheit der Zeitumkehrinvarianz einen topologischen Isolator mit Spin-Bahn-Kopplung adiabatisch in einen topologisch trivialen Zustand zu verformen, ohne dass sich die Bandlücke schließt. Wir können also einen Parameter im System verändern und dieses in einen einfachen atomaren Isolator umformen, ohne einen Phasenübergang zu durchlaufen. Da die Zeitumkehrinvarianz hier unerlässlich ist, werden solche topologischen Phasen oft „symmetriegeschützt“ genannt.

Für die Klassifizierung von symmetriegeschützten topologischen Phasen ist es nützlich, Äquivalenzklassen von Systemen (Bandstrukturen) bezüglich bestimmter Symmetrien einzuführen. Zwei Systeme (oder Bandstrukturen), die im Volumen isolierend sind und bestimmte Symmetrien besitzen, heißen topologisch äquivalent, falls eine adiabatische Interpolation zwischen den beiden Systemen existiert, welche die Symmetrien nicht bricht und die Bandlücke im Volumeninneren nicht schließt. Verschiedene Äquivalenzklassen lassen sich durch topologische Invarianten unterscheiden (z. B. die Chern-Zahl, Infokasten), welche die globale Phasenstruktur der Wellenfunktionen messen. Diese topologischen Invarianten verändern sich nicht unter adiabatischen Transformationen des Systems.

Eine wichtige Konsequenz der Klassifizierung ist die Existenz von lückenlosen (metallischen) Moden an der Oberfläche des Materials (Infokasten „Topologische Äquivalenzklassen ...“) [3–5]. Das Auftreten dieser Oberflächenzustände hängt mit der Topologie der Wellenfunktionen im Volumeninneren des Materials zusammen und folgt im Wesentlichen aus der Quantisierung der topologischen Invarianten. Um dies zu verstehen, stellen wir uns eine Oberfläche eines topologischen Materials mit Chern-Zahl  $C = 1$  vor und betrachten, wie sich die topologische Invariante verändert auf dem Weg vom Inneren zum Äußeren des Materials, wo  $C = 0$  ist. Irgendwo auf diesem Weg muss sich die Energielücke schließen, weil sich  $C$  sonst nicht ändern kann. Daher muss es an der Oberfläche, wo sich die Energielücke schließt, metallische Zustände

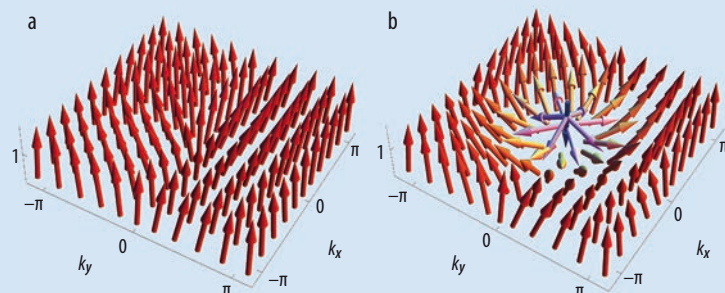
### CHERN-ISOLATOR

Der Chern-Isolator ist wahrscheinlich das einfachste Beispiel eines topologischen Isolatoren. Dieser Isolator ist im Wesentlichen eine auf dem Gitter diskretisierte Version des Quanten-Hall-Zustandes und lässt sich durch ein einfaches Zwei-Band-Modell beschreiben,

$$H(\mathbf{k}) = \mathbf{d}(\mathbf{k}) \cdot \vec{\sigma} + \varepsilon_0(\mathbf{k}) \mathbb{1},$$

wobei  $d_x(\mathbf{k}) = \sin k_x$ ,  $d_y(\mathbf{k}) = \sin k_y$ ,  $d_z(\mathbf{k}) = 2 + M - \cos k_x - \cos k_y$ , und  $\vec{\sigma}$  der Vektor der Pauli-Matrizen ist. Dieses Modell

beschreibt zwei verschiedene topologische Phasen, die sich durch die Chern-Zahl  $C$  und die Phasenstruktur der Wellenfunktion unterscheiden. Letztere lässt sich durch den normierten Vektor  $\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{k}) = \mathbf{d}(\mathbf{k})/|\mathbf{d}(\mathbf{k})|$  darstellen. Für  $M > 0$  ist der Isolator in einer trivialen Phase mit  $C=0$  und einer trivialen Textur in  $\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{k})$  (Abb. a). Für  $-4 < M < 0$  ist der Isolator in einer topologisch nicht-trivialen Phase mit  $C=1$  und einer Skyrmion-Textur in  $\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{k})$  mit chiralen Randzuständen (Abb. b).



Periodensystem topologischer Phasen											
AZ-Klasse \ d	T	C	S	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
AIII	0	0	1	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
AI	+	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
BDI	+	+	1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
D	0	+	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$
DIII	-	+	1	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0
AII	-	0	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$
CII	-	-	1	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0
C	0	-	0	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0
CI	+	-	1	0	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0

Tab.1 In diesem „Periodensystem“ gibt die Kopfzeile die Raumdimension  $d$  des Isolators bzw. Supraleiters an. Die zehn Altland-Zirnbauer-Symmetrieklassen A, AIII, ..., CI (linke Spalte) unterscheiden sich durch die Anwesenheit (+,-) oder Abwesenheit (0) von Zeitumkehrinvarianz (T), Teilchen-Loch-Symmetrie (C) und chiraler Symmetrie (S). Die verschiedenen topologischen Phasen innerhalb einer AZ-Symmetrieklasse lassen sich durch eine ganzzahlige ( $\mathbb{Z}$ ) oder binäre Invariante ( $\mathbb{Z}_2$ ) unterscheiden. „0“ bedeutet, dass es nur eine topologisch triviale Phase gibt.

geben. Diese Korrespondenz zwischen von Null verschiedenen topologischen Invarianten und lückenlosen Oberflächenzuständen existiert in allen topologischen Materialien.

### Klassifizierung von topologischen Isolatoren und Supraleitern

Systeme mit Symmetrien lassen sich in topologische Äquivalenzklassen unterteilen, mit Hilfe eines zehnfachen Klassifikationssystems, das nicht nur für topologische Isolatoren, sondern auch für Supraleiter gilt [8–10]. Dies liegt daran, dass die Quasiteilchen-Anregungen im Inneren eines Supraleiters (oder einer Supraflüssigkeit) eine Energielücke haben. Um in einem Supraleiter ein Quasiteilchen zu erzeugen, muss nämlich ein Cooper-Paar aufgebrochen werden, was Energie kostet. Das zehnfache Klassifikationsverfahren beruht auf globalen Symmetrieeigenschaften, d. h. nicht-räumlichen Symmetrien, die lokal im Ortsraum operieren. Insgesamt gibt es drei solche Symmetrien, nämlich Zeitumkehrinvarianz, Teilchen-Loch-Symmetrie und die chirale Symmetrie.

Betrachten wir als erstes die Zeitumkehrsymmetrie. In der Quantenmechanik wird sie durch einen anti-unitären Operator  $T = K U_T$  beschrieben, wobei  $U_T$  eine unitäre Matrix ist und  $K$  die komplexe Konjugation. Für den Ein-Teilchen-Hamiltonian  $H(\mathbf{k})$  gilt bei Transformation durch  $T$ :

$$T^{-1} H(-\mathbf{k}) T = + H(\mathbf{k}). \tag{1}$$

Ebenso gilt für die Teilchen-Loch-Symmetrie und den zugehörigen anti-unitären Operator  $C = K U_C$

$$C^{-1} H(-\mathbf{k}) C = - H(\mathbf{k}). \tag{2}$$

Die chirale Symmetrie wird dagegen durch einen unitären Operator definiert, der mit dem Ein-Teilchen-Hamiltonian anti-kommutiert,

$$S^{-1} H(\mathbf{k}) S = - H(\mathbf{k}). \tag{3}$$

In vielen Fällen entspricht die chirale Symmetrie  $S$  einer Kombination aus Zeitumkehr- und Teilchen-Loch-Symmetrie, d. h.  $S \propto T C$ .

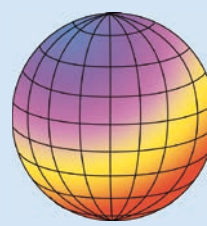
Der Hamiltonian  $H(\mathbf{k})$  kann bezüglich der Zeitumkehr- und Teilchen-Loch-Symmetrie auf drei verschiedene Weisen transformieren: (i)  $H(\mathbf{k})$  ist nicht symmetrisch bezüglich  $T$  (oder  $C$ ); (ii)  $H(\mathbf{k})$  ist invariant unter  $T$  (oder  $C$ ) mit  $T^2 = +1$  (oder  $C^2 = +1$ ); (iii)  $H(\mathbf{k})$  ist symmetrisch bezüglich  $T$  (oder  $C$ ) mit  $T^2 = -1$  (oder  $C^2 = -1$ ). Daher gibt es  $3 \times 3 = 9$  Fälle, wie  $H(\mathbf{k})$  durch  $T$  und  $C$  transformieren kann. Für acht dieser Fälle ist die An- oder Abwesenheit der chiralen Symmetrie  $S$  vollständig durch die Symmetriebedingungen von  $T$  und  $C$  bestimmt. Wenn jedoch Zeitumkehr- und Teilchen-Loch-Symmetrie gebrochen sind, gibt es die zusätzliche Möglichkeit, dass  $S \propto TC$  noch vorhanden ist. Insgesamt existieren also zehn Fälle, wie  $H(\mathbf{k})$  durch  $T$ ,  $C$  und  $S$  transformieren kann – diese definieren die zehn Altland-Zirnbauer-Symmetrieklassen (AZ, erste vier Spalten der Tabelle) [11–13].

#### TOPOLOGISCHE ÄQUIVALENZKLASSEN UND TOPOLOGISCHE INVARIANTEN

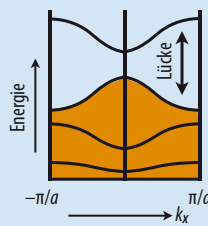
Geschlossene orientierbare Flächen sind durch ihr Geschlecht  $g$  klassifiziert, d. h. durch die Anzahl der „Löcher“ (oder „Henkel“). Das Geschlecht  $g$  ist eine topologische Invariante. Für die Oberfläche einer Kugel oder Schüssel gilt  $g = 0$ , für einen Torus oder eine Tasse  $g = 1$  (Abb. a). Das Gauss-Bonnet-Theorem besagt, dass das Integral der Gauss'schen Krümmung  $\kappa$  über eine geschlossene Fläche  $(1-g)$  ergibt, da  $g = 1 - 1/4\pi \int_S \kappa dA$  [7].

In Analogie dazu lassen sich Materialien, die im Volumeninneren isolierend sind (Bandstrukturen mit einer Bandlücke), topologisch klassifizieren. Verschiedene Äquivalenzklassen unterscheiden sich durch eine topologische Invariante, z. B. die Chern-Zahl  $C$ . Ähnlich wie das Geschlecht  $g$  einer Oberfläche lässt sich  $C$  als ein Integral der Berry-Krümmung  $F_n$  über die Brillouin-Zone (BZ) schreiben  $C = 1/(2\pi) \sum_n \int_{BZ} F_n d^2k$ . Phasen mit von Null verschiedenen Chern-Zahlen sind durch lückenlose Oberflächenzustände charakterisiert (rote Linie in der Bandstruktur, Abb. b).

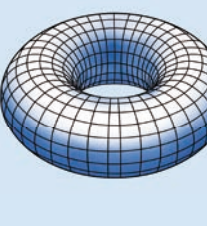
$g=0$



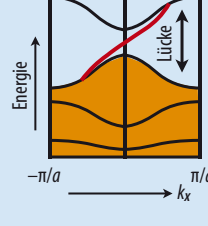
$C=0$



$g=1$



$C=1$



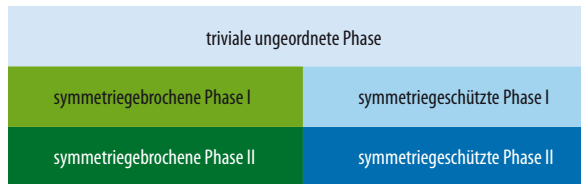


Abb. 1 Beispiel eines schematischen Phasendiagramms für ein 1D-System in der Präsenz von gewissen Symmetrien

Je nach Raumdimension  $d$  und AZ-Symmetrieklasse gibt es nun unterschiedlich viele topologische Äquivalenzklassen (Spalten 5 bis 12 der Tabelle). Zum Beispiel entspricht die Menge der Äquivalenzklassen für die Klasse A in Dimension  $d=2$  (dazu gehört der Quanten-Hall-Zustand) der Menge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ . In  $d=3$  gibt es jedoch für die Klasse A nur eine topologische Äquivalenzklasse, nämlich die triviale. Daher gibt es keinen Quanten-Hall-Effekt in drei Dimensionen. Für die Klasse AII in  $d=2$  und  $d=3$ , zu welcher der topologische Isolator mit Spin-Bahn-Kopplung gehört, gibt es genau zwei topologische Äquivalenzklassen, eine triviale und eine nicht-triviale. Für topologische Supraleiter und Supraflüssigkeiten gilt, dass die B-Phase von supraflüssigem  $^3\text{He}$  zur Klasse DIII in  $d=3$  gehört, der chirale p- bzw. d-Wellen-Supraleiter zur Klasse D bzw. C in  $d=2$ . Letztere beide sind möglicherweise in  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  bzw.  $\text{SrPtAs}$  realisiert. Darüber hinaus enthält die Klassifizierung neue topologische Zustände, die noch auf ihre experimentelle Realisierung warten. So existiert z. B. für die Klasse CI in  $d=3$  [14] ein theoretisches Modell für einen topologischen Supraleiter; man kennt jedoch noch kein Material, das durch dieses Modell beschrieben wird.

Zusammenfassend stellen wir fest, dass es für jede Raumdimension  $d$  genau fünf AZ-Symmetrieklassen gibt mit topologisch nicht-trivialen Phasen. Für drei dieser Klassen sind die topologischen Phasen durch eine ganzzahlige Invariante  $\mathbb{Z}$  charakterisiert; für die übrigen zwei existiert eine binäre Invariante  $\mathbb{Z}_2$ . Da die Klassifizierung periodisch ist in  $d$  (mit Periode 2 für die Klassen A und AIII bzw. Periode 8 für die übrigen), wird dieses oft als „Periodensystem der topologischen Phasen“ bezeichnet.

## Klassifizierung von Phasen mit Wechselwirkungen

Während die topologischen Quantenphasen in wechselwirkungsfreien Systemen bereits komplett klassifiziert sind, fehlt bisher ein komplettes Verständnis von Systemen mit Wechselwirkungen. Dies ist insbesondere in zwei und drei Dimensionen der Fall, weil in wechselwirkenden Vielteilchensystemen sehr komplexe emergente Phasen entstehen können. Um das Konzept der symmetriegeschützten topologischen (SPT) Phasen zu veranschaulichen, diskutieren wir hier nur 1D-Systeme im Detail. Für diesen Fall haben wir ein sehr tiefes Verständnis aller möglichen symmetrischen und symmetriegebrochenen Phasen für gegebene Symmetrien (Abb. 1).

Wir nehmen nun an, dass der betrachtete Hamilton-Operator invariant bezüglich einer Symmetriegruppe  $G_H$  ist. Dies können zum Beispiel globale Spinrotationen oder aber Gittersymmetrien (wie Spiegelsymmetrie) sein. Dann können wir im Wesentlichen zwischen zwei Klassen von nicht-trivialen Phasen unterscheiden: symmetriegebrochene und SPT-Phasen. Bei den symmetriegebrochenen Phasen ist die Symmetrie des Grundzustandes  $|\psi_0\rangle$  niedriger als die des Hamilton-Operators ( $G_{\psi_0} < G_H$ ). Dieser Fall lässt sich komplett mit Hilfe der Landau-Theorie der spontanen Symmetriebrechung beschreiben. Ein Beispiel ist die ferromagnetische Phase im transversalen Ising-Modell. Die wesentliche Idee bei der Klassifizierung der SPT-Phasen beruht auf einer mathematischen Klassifizierung der Darstellungen der Symmetrie am Rand des Systems. Für eine gegebene Symmetriegruppe können wir verschiedene projektive Darstellungen finden (Info-kasten „Projektive Darstellungen ...“).

Wir betrachten nun Systeme, in denen die Darstellungen der Symmetrien im Volumen immer linear sind. Das ist z. B. bei Spinsystemen der Fall, wenn die Freiheitsgrade pro Platz immer einen ganzzahligen Spin haben. Dann können die Darstellungen am Rand entweder ebenfalls linear sein (triviale Phase) oder eben in einer projektiven Darstellung (topologische Phase). Verschiedene SPT-Phasen lassen sich dann mithilfe der zweiten Gruppenkohomologie  $H_2[G, U(1)]$  klassifizieren [15, 16]. Dies ist ein Werkzeug der Mathematik, das inäquivalente projektive Darstellungen voneinander unterscheidet.

Ein Beispiel, an dem sich das Konzept relativ anschaulich erläutern lässt, ist der nach Affleck, Kennedy, Lieb und Tasaki benannte Zustand mit einer  $SO(3)$ -Spinrotationssymmetrie (Abb. 2). Während es im Bulk nur Anregungen mit ganzzahligem Spin gibt ( $S=0, 1, 2, \dots$ ), befinden sich an den beiden Enden der Kette gebrochene Anregungen mit halbzahligem Spin ( $S=1/2, 3/2, \dots$ ). Die ganzzahligen Spins im Bulk erzeugen lineare und die halbzahligen am Rand projektive Darstellungen der Spinrotationssymmetrie.

## PROJEKTIVE DARSTELLUNGEN UND GRUPPENKOHOMOLOGIE

Es sei  $G$  eine Gruppe mit Gruppenelementen  $g_i \in G$ . Dann sind die Matrizen  $U(g_i)$  eine projektive Darstellung von  $G$ , wenn

$$U(g_i) U(g_j) = \omega(g_i, g_j) U(g_i g_j),$$

wobei  $\omega(g_i, g_j) \in U(1)$  ein Satz von Phasenfaktoren darstellt, welcher gewisse Konsistenzbedingungen erfüllt. Gilt für alle Phasenfaktoren  $\omega(g_i, g_i) = 1$ , so ist die Darstellung linear. Eine Transformation  $\tilde{U}(g_i) = \beta(g_i) U(g_i)$ ,  $\beta(g_i) \in U(1)$  der Darstellungen generiert einen neuen Satz von Phasenfaktoren:

$$\tilde{\omega}(g_i, g_j) = (\beta(g_i g_j) / \beta(g_i) \beta(g_j)) \omega(g_i, g_j).$$

Zwei projektive Darstellungen sind äquivalent, wenn sich  $\tilde{U}(g)$  und  $U(g)$  auf diese Weise ineinander umformen lassen. Äquivalente projektive Darstellungen von  $G$  sind durch die zweite Homotopiegruppe  $H_2[G, U(1)]$  klassifiziert.

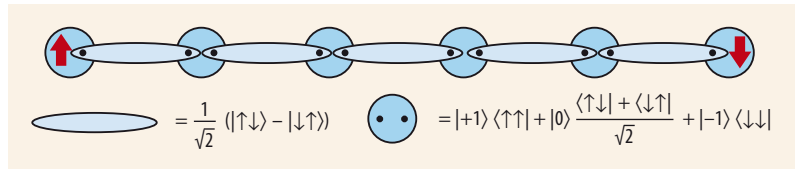
Auch wenn die Klassifizierung auf einem sehr mathematischen Zugang beruht, führen die projektiven Darstellungen am Rand zu symmetriegeschützten, lückenlosen Anregungen, die sich im Experiment bemerkbar machen. So lassen sich z. B. in Messungen der Magnetisierung in Spin-1-Systemen wie Mg-dotiertem  $\text{Y}_2\text{BaNiO}$  die Spin-1/2-Freiheitsgrade am Rand nachweisen. Außerdem können nichtlokale Ordnungsparameter [17] existieren, die man z. B. in optischen Gittern direkt messen kann.

Die Phasen in 1D-Spinsystemen haben kein direktes Analogon in der Klassifizierung von wechselwirkungsfreien Systemen. Ein Beispiel, in dem wir direkt den Einfluss von Wechselwirkungen auf die Klassifizierung untersuchen können, ist die BDI-Klasse in 1D. Ohne Wechselwirkungen gibt es eine  $\mathbb{Z}$ -Klassifizierung (Tabelle), die mit Wechselwirkungen auf  $\mathbb{Z}_8$  zusammenbricht [18, 19].

## Ausblick und Zusammenfassung

In den letzten Jahren hat die Forschung über topologische Materialien beeindruckende Fortschritte gemacht. So ist es z. B. kürzlich gelungen, den anomalen Quanten-Hall-Effekt (Chern-Isolator) in dotiertem  $(\text{Bi,Sb})_2\text{Te}_3$  experimentell nachzuweisen [20]. Während die grundlegenden Eigenschaften von nicht-wechselwirkenden topologischen Systemen theoretisch relativ gut verstanden sind, sind noch große Anstrengungen nötig, um die experimentellen Systeme zu verbessern und neue topologische Materialien zu finden. Damit sich die vorhergesagten unkonventionellen Transportphänomene der Oberflächenzustände messen lassen, müssen die topologischen Materialien so rein sein, dass diese Systeme im Volumeninneren wahrhaft isolierend sind. Hinsichtlich der Theorie gilt es, das Verständnis von fraktionellen topologischen Phasen und symmetriegeschützten wechselwirkenden Phasen in Raumdimension  $d > 1$  zu verbessern. Auch das interessante Zusammenspiel zwischen sog. intrinsischer topologischer Ordnung mit gebrochenen Anregungen und Symmetrie muss noch besser untersucht werden. Außerdem ist die vollständige Klassifikation von nicht-wechselwirkenden Systemen bezüglich allen (magnetischen) Raumgruppensymmetrien ein wichtiges Projekt für zukünftige Forschungsarbeiten.

Zahlreiche Aspekte und Eigenschaften von topologischen Materialien konnten wir aus Platzgründen nicht erwähnen. Dazu gehören mögliche technologische Anwendungen der perfekt leitenden Rand- und Oberflächenzustände von topologischen Systemen, z. B. in neuen Computerchips mit extrem niedrigem Stromverbrauch. Topologische Supraleiter oder Heterostrukturen zwischen topologischen Isolatoren und Supraleitern könnten neuartige Quantencomputer ermöglichen. Ein wichtiger erster Schritt zur Realisierung wäre das Schalten der Randströme durch elektrische oder magnetische Felder, was die Herstellung eines „topologischen Transistors“ ermöglichen würde [21].



**Abb. 2** Diagrammatische Darstellung der Haldane-Phase mit  $S=1$  als Beispiel einer 1D-Symmetriegeschützten Phase. Darin sind die lokalisierten  $S=1$ -Spins

(blaue Kreise) in zwei  $S=1/2$  aufgespaltenen Spalten. Die virtuellen  $S=1/2$ -Spins formen dann Singulets (hellblaue Ellipsen) mit den benachbarten Spins.

## Literatur

- [1] K. von Klitzing, Rev. Mod. Phys. **58**, 519 (1986)
- [2] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale und M. den Nijs, Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982)
- [3] M. Z. Hasan und C. L. Kane, Rev. Mod. Phys. **82**, 3045 (2010)
- [4] X.-L. Qi und S.-C. Zhang, Rev. Mod. Phys. **83**, 1057 (2010)
- [5] C.-K. Chiu, J. C. Y. Teo, A. P. Schnyder und S. Ryu, arXiv:1505.03535
- [6] S. Sachdev, Quantum Phase Transitions, Cambridge University Press (1999)
- [7] M. Nakahara, Geometry, Topology and Physics, Hilger, Bristol (1990)
- [8] A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki und A. W. W. Ludwig, Phys. Rev. B **78**, 195125 (2008)
- [9] A. Kitaev, AIP Conf. Proc. **1134**, 22 (2009)
- [10] S. Ryu, A. P. Schnyder, A. Furusaki und A. W. W. Ludwig, New J. Phys. **12**, 065010 (2010)
- [11] M. R. Zirnbauer, J. Math. Phys. **37**, 4986 (1996)
- [12] A. Altland und M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. B **55**, 1142 (1997)
- [13] P. Heinzner, A. Huckleberry und M. R. Zirnbauer, Commun. Math. Phys. **257**, 725 (2005)
- [14] A. P. Schnyder, S. Ryu und A. W. W. Ludwig, Phys. Rev. Lett. **102**, 196804 (2009)
- [15] F. Pollmann, A. M. Turner, E. Berg und M. Oshikawa, Phys. Rev. B **81**, 064439 (2010)
- [16] Xie Chen, Zheng-Cheng Gu und Xiao-Gang Wen, Phys. Rev. B **83**, 035107 (2011)
- [17] F. Pollmann und A. M. Turner, Phys. Rev. B **86**, 125441 (2012)
- [18] A. M. Turner, F. Pollmann und E. Berg, Phys. Rev. B **83**, 075102 (2011)
- [19] L. Fidkowski und A. Kitaev, Phys. Rev. B **83**, 075103 (2011)
- [20] C.-Z. Chang et al., Science **340**, 167 (2013); C.-Z. Chang et al., Nat. Mater. **14**, 473 (2015)
- [21] J. Liu et al., Nat. Mater. **13**, 178 (2014)

## DIE AUTOREN

**Frank Pollmann** (links, mit DPG-Vorstandsmitglied Gertrud Zwicknagl) hat in Braunschweig studiert und am MPI für Physik komplexer System in Dresden bzw. an der TU

Ilmenau promoviert. Als Postdoc arbeitete er an der University of California in Berkeley und in Taipeh, seit 2011 leitet er eine Forschungsgruppe am MPI in Dresden.

**Andreas Schnyder** hat an der ETH Zürich studiert und dort 2007 auch promoviert. Als Postdoc war er an der University of California in Santa Barbara, bevor er an das MPI für Festkörperforschung nach Stuttgart ging, wo er seit 2009 eine Nachwuchsgruppe leitet.



Jan Röhl