

■ Moiré-Schmetterlinge in Graphen

Messungen des Quanten-Hall-Effektes in Graphen auf hexagonalem Bornitrid zeigen experimentelle Signaturen von Hofstadter-Schmetterlingen.

Im Jahr 1976 veröffentlichte Douglas Hofstadter seinen berühmten Artikel über die „Energieniveaus und Wellenfunktionen von Bloch-Elektronen in rationalen und irrationalen Magnetfeldern“ [1]. Dabei betrachtete er folgendes, konzeptionell einfaches, aber äußerst interessantes Problem: Wie verändern sich die Energie-Eigenwerte von Elektronen in einem zweidimensionalen Quadratgitter, wenn man senkrecht zur Ebene ein externes Magnetfeld anlegt, das ausreichend groß gewählt ist, sodass der magnetische Fluss durch die Einheitszelle des Gitters ϕ von ähnlicher Größenordnung wie ein Flussquantum $\phi_0 = h/e$ ist? Für Hofstadter war das eine rein akademische Frage, da man für die experimentelle Untersuchung seiner Vorhersagen im Labor unerreichbare Magnetfelder der Größenordnung 10^5 T benötigte. Bemerkenswerterweise hat das resultierende Eigenwertproblem eine besonders ästhetische Lösung, wenn der Parameter $\alpha = \phi/\phi_0$ eine rationale Zahl p/q ist. Unter dieser Voraussetzung ähnelt das Spektrum einem Schmetterling und zeigt fraktalen Charakter. Hofstadter versuchte in seinem Artikel, die Rolle der irrationalen Werte von Magnetfeldern in diesem physikalischen Problem besser zu verstehen, die natürlich – im mathematischen Sinne – dicht in der Menge der rationalen Werte der möglichen Magnetfelder liegen.

Fasziniert durch die Schönheit der resultierenden Spektren gab es einige Jahre später Experimente in nanostrukturierten periodischen Potentialen, mit deren Gitterkonstante und Magnetfeldern um ein Tesla der oben erwähnten Parameter α nahe der Eins liegt. Dadurch ließen sich erste experimentelle Signaturen von Hofstadter-Schmetterlingen in zweidimensionalen Elektronenstrukturen sichtbar machen [2, 3]. Die Gitterkonstante dieser künstlichen Gitterstrukturen war nun mit etwa 100 nm rund

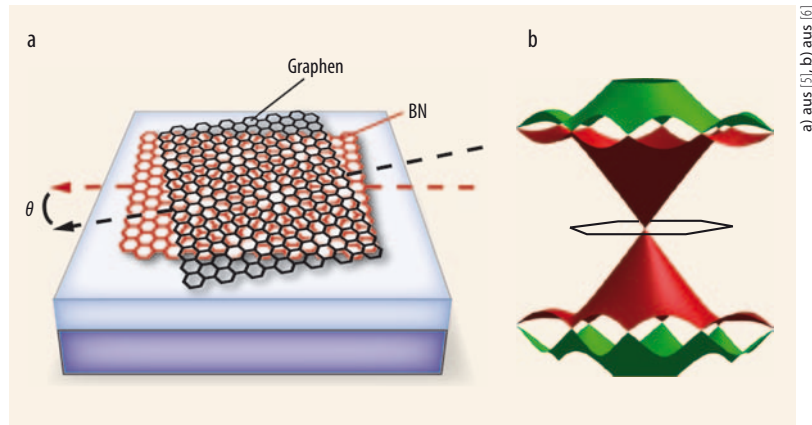


Abb. 1 Liegt eine Graphenlage auf hexagonalem Bornitrid (BN), das eine ähnliche Gitterstruktur hat, ergibt sich abhängig vom Rotationswinkel θ ein Moiré-Gitter mit einer größeren Gitterkonstante

1000-mal größer als typische Werte von natürlichen Festkörpern. Das führte zwar zur prinzipiellen Beobachtbarkeit des Phänomens, aber auch zu dem Problem, dass bei den relevanten – recht kleinen – Magnetfeldern schon geringe Unordnung den Quanten-Hall-Effekt schwer beobachtbar macht.

Um der experimentellen Messung von Hofstadter-Schmetterlingen ein weiteres Stück näher zu kommen, bedarf es also neuartiger Systeme, die besonders rein sind und eine Untergitterstruktur mit einer Gitterkonstante von weniger als 100 nm aufweisen. Hier kommt Graphen ins Spiel.^{+) Platziert man ein- oder zweilagiges Graphen auf hexagonalem Bornitrid (hBN), das wie Graphen eine Honigwabengitterstruktur hat, entsteht ein Moiré-Muster, denn die Gitterkonstanten von Graphen und hBN unterscheiden sich nur um 1,8 % und die beiden Gitter liegen im Experiment nie perfekt entlang einer kristallographischen Achse hoher Symmetrie aufeinander. Das Zusammenspiel dieser beiden sehr ähnlichen Lagen führt somit zu einem neuen Gitter, dem Moiré-Gitter (**Abb. 1a**), das bei optimaler Ausrichtung von Graphen und hBN eine Gitterkonstante von etwa 10 nm haben kann. Dem-}

te als Graphen (a). In einer möglichen Bandstruktur des Moiré-Gitters entstehen zusätzliche sekundäre Dirac-Punkte bei höheren Energien am Rand seiner Brillouin-Zone (schwarzes Sechseck, b).

entsprechend war zu erwarten, Moiré-Schmetterlinge in diesem System beobachten zu können [4]. Kurioserweise ist das nun gleich drei Gruppen gleichzeitig gelungen: an der Columbia University (um Philip Kim) [5], der University of Manchester (um Andre Geim und Kostya Novoselov) [6] und am MIT (um Raymond Ashoori und Pablo Jarillo-Herrero) [7].

Ähnlich, aber nicht gleich

Die drei Arbeiten zeigen Gemeinsamkeiten und Unterschiede, da sie entweder Monolagen- [6, 7] oder aber Bilagen-Graphen [5] auf hBN untersuchten. In allen drei Fällen haben die Forscher die aus Graphen und hBN kombinierte Schicht nanostrukturiert und mit Elektroden versehen, um die Elektronendichte in der Graphenschicht zu variieren und Transporteigenschaften zu studieren. Dabei spielt der Rotationswinkel θ zwischen Graphen und hBN eine wichtige Rolle (**Abb. 1a**). Nur wenn Graphen und hBN nahezu deckungsgleich aufeinander liegen, ergibt sich ein Übergitter mit einer um etwa einen Faktor fünfzig größeren Gitterkonstante als in Graphen. Interessanterweise führt in Transportexperimenten das Zusammenspiel zwischen Moiré-Potential und externem

^{+) B. Trauzettel, Physik Journal, Juli 2007, S. 39}

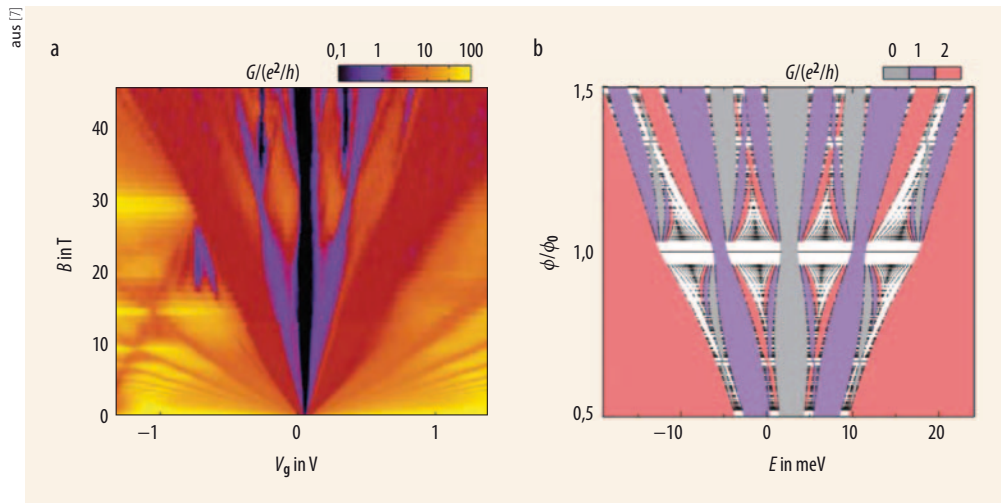


Abb. 2 Die experimentelle Zweipunktmessung des Leitwertes G ist hier als Funktion des Magnetfeldes B und der Gatterspannung V_g aufgetragen. Lineare Strukturen entsprechen gefüllten Bändern mit quantisiertem Leitwert (a). Das theoretisch berechnete Energiespektrum, der Hofstadter-Schmetterling, ergibt sich als Funktion des magnetischen Flusses ϕ durch die Moiré-Einheitszelle für das 0-te Landau-Niveau bei entsprechender Farbkodierung für den zu erwartenden Leitwert (b).

Magnetfeld zu charakteristischen Signaturen, die sich auf die Physik des Hofstadter-Schmetterlings zurückführen lassen.

Wie lässt sich dieses Zusammenspiel besser verstehen? Bekanntermaßen streuen Elektronen im Festkörper am periodischen Kristallpotential, was die Bandstruktur der elektronischen Zustände bestimmt. Dabei können Energielücken oder auch nur Berührungspunkte zwischen zwei oder mehreren Bändern auftreten. In Graphen beispielsweise berühren sich Valenz- und Leitungsband an den Dirac-Punkten im Spektrum.[†] Werden nun zwei periodische Gitter überlagert, wie beispielsweise die von Graphen und hBN in den Arbeiten [5, 6, 7], können prinzipiell zusätzliche charakteristische Berührungspunkte auftreten (Abb. 1b). Alle drei Experimente haben durch Widerstandsmessungen solche sekundären Dirac-Punkte als Funktion der Gatterspannung bestätigt, was neben der Rasterkraft-Mikroskopie eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Periode des Moiré-Gitters bietet.

Eine andere Modifikation der Bandstruktur besteht, wenn Elektronen in einem starken externen Magnetfeld Zyklotronbewegungen ausführen, was zur Bildung diskreter Landau-Niveaus führt. In besonders reinen zweidimensionalen Elektronensystemen resultiert daraus der Quanten-Hall-Effekt, der durch quantisierte Stufen in der Hall-Leitfähigkeit σ_{xy} charakterisiert ist. Der ganzzahlige Quanten-Hall-

Effekt wurde sowohl in Monolagen- als auch in Bilagen-Graphen gemessen und zeigt Graphen-spezifische Signaturen.[†] Das zusätzliche Moiré-Potential bereichert das Spektrum noch mehr, da nun der magnetische Fluss durch die Einheitszelle des Moiré-Gitters von ähnlicher Größenordnung wie ein Flussquantum sein kann. Interessanterweise lässt sich in diesem Fall das Auftreten von spektralen Bandlücken aus einem Elektronendichte-Magnetfeld-Diagramm ersehen, dem eine diophantische Gleichung zugrunde liegt: $(n/n_0) = t(\phi/\phi_0) + s$. Hierbei sind s und t ganze Zahlen und n_0 ist die reziproke Fläche der Einheitszelle des Moiré-Gitters. Immer wenn die diophantische Gleichung erfüllt ist, liegt die Fermi-Energie in einer Bandlücke. Diese Bedingung hat die Linien in Abbildung 2 zum Ergebnis, die Bereiche unterschiedlich quantisierter Leitwerte gegeneinander abgrenzen. s und t sind dabei topologische Quantenzahlen. Interessanterweise steht t in einem direkten Zusammenhang zur quantisierten Hall-Leitfähigkeit $\sigma_{xy} = t(e^2/h)$. Die diophantische Gleichung beschreibt die quantisierte Änderung von t , wenn man beispielsweise bei konstantem Magnetfeld die Elektronendichte n variiert. Wie in Abbildung 2 deutlich zu erkennen ist, kann sich dann t nicht monoton ändern, was eine direkte Konsequenz des Zusammenspiels von Magnetfeld und periodischem Potenzial ist.

Während alle drei Experimente die oben beschriebenen Signaturen

des Hofstadter-Schmetterlings beobachteten, berichtet nur eine Arbeit von einer endlichen Bandlücke von einigen meV im elektronischen Spektrum in Abwesenheit eines externen Magnetfeldes [7]. Da das hBN die A,B-Untergittersymmetrie des Graphen bricht, lässt sich durchaus erwarten, eine endliche Bandlücke zu finden. Diesbezüglich gab es auch verschiedene theoretische Vorhersagen [8, 9] mit interessantem Anwendungspotenzial für Graphen-Quantenpunkte [10]. Trotzdem ist das Auftreten der Bandlücke in nur einem der drei Experimente erstaunlich. Somit bleibt zu klären, was der Mechanismus ist, der zu dem Öffnen der Bandlücke im MIT-Experiment geführt hat und warum er in den anderen Experimenten an der Columbia University und in Manchester weniger wichtig zu sein scheint.

Patrik Recher und Björn Trauzettel

- [1] D. R. Hofstadter, Phys. Rev. B **14**, 2239 (1976)
- [2] T. Schlösser et al., Europhys. Lett. **33**, 683 (1996)
- [3] C. Albrecht et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 147 (2001)
- [4] R. Bestritzer und A. H. MacDonald, Phys. Rev. B **84**, 035440 (2011)
- [5] C. R. Dean et al., Nature **497**, 598 (2013)
- [6] L. A. Ponomarenko et al., Nature **497**, 594 (2013)
- [7] B. Hunt et al., Science, online 16. Mai 2013; DOI: 10.1126/science.1237240
- [8] G. Giovannetti et al., Phys. Rev. B **76**, 073103 (2007)
- [9] M. Kindermann, B. Uchoa und D. L. Miller, Phys. Rev. B **86**, 115415 (2012)
- [10] P. Recher, J. Nilsson, G. Burkard und B. Trauzettel, Phys. Rev. B **79**, 085407 (2009)

Prof. Dr. Patrik Recher, Institut für Mathematische Physik, TU Braunschweig, Mendelssohnstraße 3, 38106 Braunschweig;
Prof. Dr. Björn Trauzettel, Institut für Theoretische Physik und Astrophysik, Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg