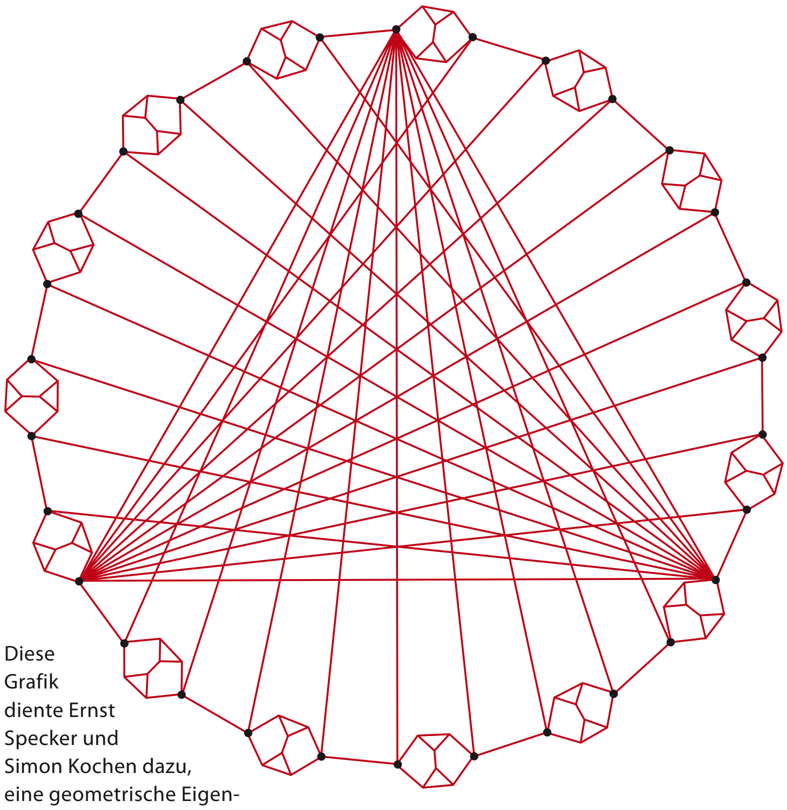
QUANTENPHYSIK

Auf den Kontext kommt es an

Was hat die Frage „Können wir alles wissen?“ mit der Quantenmechanik zu tun?

Otfried Gühne und Matthias Kleinmann

Die Quantenmechanik hat viele, scheinbar paradoxe Konsequenzen. Diese Tatsache hat zu Spekulationen darüber verleitet, ob es eine übergeordnete Theorie geben könnte, die im Einklang mit der klassischen Physik ist. Neben der Bellschen Ungleichung gibt es ein weitreichendes Theorem von Ernst Specker und Simon Kochen, das es ermöglicht, „klassische Modelle“ quantenmechanischer Systeme auszuschließen. Was als Nachdenken über die logische Struktur der Quantenmechanik begann, lässt sich nun auch im Experiment beobachten.



Diese Grafik diente Ernst Specker und Simon Kochen dazu, eine geometrische Eigenschaft von Vektoren im dreidimensionalen Raum zu beweisen. Diese Eigenschaft zeigt, dass die Quantenmechanik nicht so einfach durch eine klassische Theorie ersetzt werden kann.

Schon bei der Formulierung der Quantenmechanik in den 1920er-Jahren war den daran beteiligten Physikern bewusst, dass sich die neue Theorie von der klassischen Physik fundamental unterscheidet. Die Interferenz von Teilchen am Doppelspalt oder die Unschärferelationen galten als typische Quanteneffekte. Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen bemerkten 1935, dass bei räumlich getrennten Quantensystemen neuartige und überraschende Effekte auftauchen. In ihrem berühmten EPR-Paradoxon betrachteten sie zwei separierte Teilchen, die sich jedoch durch eine gemeinsame Wellenfunktion beschreiben lassen. Sie zeigten, dass man unter Umständen dem Ort und Impuls eines Teilchens einen Wert zuweisen kann, was der Quantenmechanik zu widersprechen scheint. Dies warf die Frage auf, ob die Quantenmechanik vollständig ist oder – so die Idee von Einstein, Podolsky und Rosen – eine komplexere deterministische Theorie mit weiteren Parametern sie ablösen könnte. Der Indeterminismus der Quantenmechanik würde sich dann aus unserem Unwissen über die zusätzlichen „verborgenen“ Parameter erklären.

John Bell konnte 1964 mit seiner bekannten Ungleichung zeigen, dass Modelle mit verborgenen Parametern nicht mit den Vorhersagen der Quantenmechanik verträglich sind. Hierbei machte er im Wesentlichen zwei Annahmen über klassische Modelle:

- *Realismus:* Der Wert einer messbaren Größe existiert unabhängig davon, ob die Messung tatsächlich stattfindet oder nicht.
- *Lokalität:* Die Messresultate an einem Teilchen hängen nicht von der Wahl der Messung an einem anderen, weit entfernten Teilchen ab.

Die Bellsche Ungleichung liefert ein klares, experimentell testbares Kriterium, um zwischen Quantenmechanik und klassischer Physik zu unterscheiden. Zahlreiche Experimente an verschränkten Teilchen haben in den letzten Jahren die Vorhersagen der Quantenmechanik bestätigt. Demnach ist zumindest

KOMPAKT

- Modelle mit verborgenen Parametern gehen davon aus, dass der Wert einer messbaren Größe auch bei Quantensystemen unabhängig von der Messung existiert.
- Die Bellsche Ungleichung bietet eine Möglichkeit, solche „klassischen“ Modelle mit verborgenen Parametern bei zwei oder mehr verschränkten Teilchen auszuschließen.
- Das Kochen-Specker-Theorem erlaubt es dagegen auch, den nichtklassischen Charakter einzelner Quantensysteme nachzuweisen.
- Die dabei eine Rolle spielende „Kontextualität“ lässt sich mittlerweile mit gefangenen Ionen oder Photonen experimentell untersuchen.

Prof. Dr. Otfried Gühne und **Dr. Matthias Kleinmann**, Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät, Universität Siegen, Walter-Flex-Str. 3, 57068 Siegen

 1617-9439/13/0202-25

A. Jaffe / A. Cabello

Abb. 1 Ernst Specker (1920 – 2011, links), hier im Juni 2009 mit Simon Kochen (Mitte) und Adán Cabello in Zürich, verbrachte praktisch seine gesamte akademische Laufbahn an der ETH Zürich und erzielte herausragende Resultate in der Logik, Topologie, Algebra und Kombinatorik. Er war vielseitig interessiert und verfasste auch ein Buch mit theologischen Betrachtungen.

eine der Annahmen von Realismus oder Lokalität nicht erfüllt.

Um eine Verletzung der Bellschen Ungleichungen zu beobachten, sind mindestens zwei Teilchen notwendig. Was aber, wenn man nur ein einzelnes Quantensystem untersucht? Lässt sich auch dann experimentell zwischen Quantenmechanik und klassischer Theorie unterscheiden? In der Tat hatte der Mathematiker Ernst Specker (**Abb. 1**) schon vor Bells Arbeit erkannt, dass die Messungen in der Quantentheorie eigenartige Eigenschaften aufweisen und dass diese dazu dienen können, klassische Modelle auszuschließen.

Ausgangspunkt waren seine Spekulationen Ende der Fünfzigerjahre darüber, ob es überhaupt möglich sei, alles zu wissen. Er bemerkte, dass es zu interessanten logischen Verwicklungen führen kann, wenn sich nicht alle logischen Aussagen gemeinsam entscheiden lassen. Dies führt zur so genannten Kontextualität, die sich an einem einfachen Beispiel zeigt: Betrachten wir drei Fragen, *A*, *B* und *C*, die jeweils mit „Ja" oder „Nein" beantwortbar sind, z. B. „Sind Sie in Deutschland geboren?", „Haben Sie ein Physik-Diplom?" und „Sind Sie DPG-Mitglied?". Ganz offensichtlich hängen die Antworten auf eine dieser Fragen nicht davon ab, welche anderen Fragen gemeinsam gestellt werden. Schließlich kann man ja auch alle drei Fragen gemeinsam stellen und dann sollte es ein konsistente Antwort für jede Frage geben. Diese Antwort ist dann nichtkontextuell, weil sie nicht vom Kontext, also den anderen gestellten Fragen abhängt.

Was jedoch, wenn es prinzipiell unmöglich wäre, *A*, *B* und *C* gemeinsam zu beantworten? Man müsste sich zum Beispiel entscheiden, ob man entweder *A* und *B oder A* und *C* stellt und könnte somit nicht so einfach herausfinden, ob die Antwort auf die Frage *A* von den anderen Fragen abhängt. Diese Situation, in der kontextuelle Antworten denkbar sind, widerspricht unserer Alltagserfahrung. Specker selbst hat sie mit einer lesenswerten Parabel über einen Propheten aus Assyrien veranschaulicht [1, 2].

Von der Logik zur Physik

Ernst Specker bemerkte, dass die eigenwillige Voraussetzung seiner zunächst rein logischen Spielerei in der Quantenmechanik gegeben ist: Wenn dort zwei Observablen nicht kommutieren, lassen sie sich nicht gemeinsam messen. Wenn man die Messungen als Fragen ansieht, bedeutet dies, dass nicht alle Fragen gleichzeitig beantwortbar sind; damit könnte die Antwort auf eine Frage davon abhängen, welche andere Frage gestellt wird. Specker gelang es, diese überraschende Situation in der Quantenmechanik in ein mathematisches Theorem zu übersetzen.

Der Weg dahin lässt sich anhand des Stern-Gerlach-Versuchs verdeutlichen: Hier lauten die zugehörigen Fragen „Hat der Spin des Teilchens den Wert $+\hbar/2$?" und „Hat der Spin des Teilchens den Wert $-\hbar/2$?" In der quantenmechanischen Beschreibung entspricht dies zwei Vektoren, $|\uparrow\rangle = |0\rangle$ und $|\downarrow\rangle = |1\rangle$, oder den korrespondierenden Projektoren, $P_+ = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| = |0\rangle\langle 0|$ bzw. $P_- = |\downarrow\rangle\langle\downarrow| = |1\rangle\langle 1|$. In höherdimensionalen Systemen (z. B. bei einem Spin-1-Teilchen) wird eine Messung durch drei oder mehr Vektoren beschrieben.

Insofern gleicht jeder Vektor einer Frage an das Quantensystem. Zwei orthogonale Vektoren (wie $|\uparrow\rangle = |0\rangle$ und $|\downarrow\rangle = |1\rangle$ im Stern-Gerlach-Versuch) stellen zwei Fragen dar, die gemeinsam entscheidbar sind, weil sie sich durch eine Messung einer entsprechenden Observablen gemeinsam beantworten lassen. Nun liefert die Messung einer Observablen immer genau ein Ergebnis. Wenn die Vektoren eine vollständige Basis bilden und somit alle Messausgänge einer Observablen beschreiben, muss daher genau eine Antwort „Ja" lauten. Weiterhin kann für zwei orthogonale Vektoren maximal eine Antwort „Ja" sein. Die Speckersche Frage nach der „Möglichkeit, alles zu wissen" entspricht in der Quantenmechanik folgender Formulierung: Ist es möglich, jedem Vektor eine Antwort „Ja" oder „Nein" zuzuweisen, sodass die genannten Bedingungen an die Antworten erfüllt sind?

Das Kochen-Specker-Theorem besagt, dass eine solche Zuweisung im Allgemeinen nicht möglich ist. Dies formulierte Specker bereits 1960 [1] und lieferte 1967 zusammen mit Simon Kochen einen vollständigen Beweis [3], den Adán Cabello später vereinfachte [4]. Die Grundidee ist einfach: Durch eine geschickt gewählte Basis lässt sich ein Satz von 18 Vektoren in einem vierdimensionalen Raum angeben und zeigen, dass für diese Vektoren eine Zuweisung unter der erläuterten Bedingung zu einem Widerspruch führt (**Infokasten** „Ein einfacher Beweis..."). Der kompliziertere Originalbeweis von Kochen und Specker benutzt 117 Vektoren in einem dreidimensionalen Raum (**Abb.** auf S. 25). Für zweidimensionale Quantensysteme wie beim Stern-Gerlach-Versuch ergibt sich kein Widerspruch: In zwei Dimensionen ist durch einen Vektor der dazu orthogonale Vektor eindeutig festgelegt, also existiert für eine Frage nur eine weitere Frage, die man gleichzeitig stellen kann.

Die Quadratur der Messung

Bislang war nur die Rede von Vektoren und den entsprechenden eindimensionalen Projektoren als Fragen an ein Quantensystem. Doch es lassen sich allgemeinere Observablen betrachten, für welche ein Messresultat einem mehrdimensionalen Projektor entspricht. Für dieses Szenario demonstrierten Asher Peres und David Mermin das Kochen-Specker-Resultat auf elegante Art und Weise [5, 6], die mittlerweile als Peres-Mermin-Quadrat (PMQ) bekannt ist. Ausgangspunkt ist folgendes Quadrat von Messgrößen:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_z \otimes \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \sigma_z & \sigma_z \otimes \sigma_z \\ \mathbb{1} \otimes \sigma_x & \sigma_x \otimes \mathbb{1} & \sigma_x \otimes \sigma_x \\ \sigma_z \otimes \sigma_x & \sigma_x \otimes \sigma_z & \sigma_y \otimes \sigma_y \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Hierbei handelt es sich um Messungen an einem vierdimensionalen System, das man sich am besten als System aus zwei Spin-1/2-Teilchen (oder zwei Qubits) vorstellen kann. Die Messungen gelten den Spins (bzw. den Pauli-Operatoren) der beiden Teilchen. So ist $A = \sigma_z \otimes \mathbb{1}$ eine Messung von σ_z am ersten Teilchen, und $\beta = \sigma_x \otimes \sigma_z$ entspricht der Observablen, bei der das Produkt von σ_x am ersten und σ_z am zweiten Teilchen gemessen wird. Dass die Observablen in jeder Spalte und in jeder Zeile kommutieren und deshalb gleichzeitig messbar sind, lässt sich nachrechnen. Betrachtet wird nun das Produkt aller Zeilen und Spalten,

$$\mathcal{P} = Z_1\, Z_2\, Z_3\, S_1\, S_2\, S_3, \qquad (2)$$

wobei Z_1 das Produkt der Messergebnisse der Observablen der ersten Zeile A, B, C darstellt und S_1 das entsprechende Produkt für die erste Spalte A, a, α etc. Welchen Wert kann dieses Produkt annehmen? Jede Observable im PMQ hat entweder den Wert +1 oder –1. In dem Produkt $\mathcal{P}$ kommt jede Observable jedoch genau zweimal vor, und zwar in genau einer Zeile und einer Spalte. Deshalb muss das gesamte Produkt $\mathcal{P} = +1$ sein, unabhängig davon, welche Werte die einzelnen Messungen annehmen.

Quantenmechanisch gesehen resultiert aus dem Produkt der Operatoren in der ersten Zeile der Einsoperator, d. h. $ABC = \mathbb{1}$ und somit $Z_1 = 1$. Dasselbe gilt für alle anderen Zeilen und Spalten, außer für die letzte Spalte: Hier ergibt das Produkt aufgrund der Kommutatoreigenschaften der Pauli-Matrizen $Cc\gamma = -\mathbb{1}$ und somit $S_3 = -1$. In der Quantenmechanik beträgt das Produkt $\mathcal{P}$ somit –1. Das steht im Widerspruch zur vorherigen Argumentation, in welcher der Wert einer Observablen wie A unabhängig davon ist, ob sie als Teil von Z_1 oder S_1 gesehen wird. Das ist genau die Annahme der Nichtkontextualität, wie sie einer klassischen Theorie zugrunde liegt. Daher zeigt das Peres-Mermin-Quadrat, dass eine solche Theorie unverträglich mit der Quantenmechanik ist.

Die Größe $\mathcal{P}$ lässt sich nicht einfach messen, denn sie enthält alle Messungen des PMQ, also auch diejenigen, die nicht kommutieren und deshalb nicht gleichzeitig messbar sind. Das Argument des PMQ ist also nicht direkt experimentell zu überprüfen. Doch 2008 schlug Adán Cabello eine Möglichkeit vor, das Problem zu umgehen [7]. Man betrachte den Ausdruck

$$\langle\chi\rangle = \langle ABC\rangle + \langle abc\rangle + \langle\alpha\beta\gamma\rangle + \langle Aa\alpha\rangle + \langle Bb\beta\rangle - \langle Cc\gamma\rangle. \qquad (3)$$

$\langle ABC\rangle$ ist beispielsweise eine Messung der ersten Zeile als Sequenz: An einem gegebenen Quantensystem wird zuerst A gemessen, anschließend B und zuletzt C. Jede

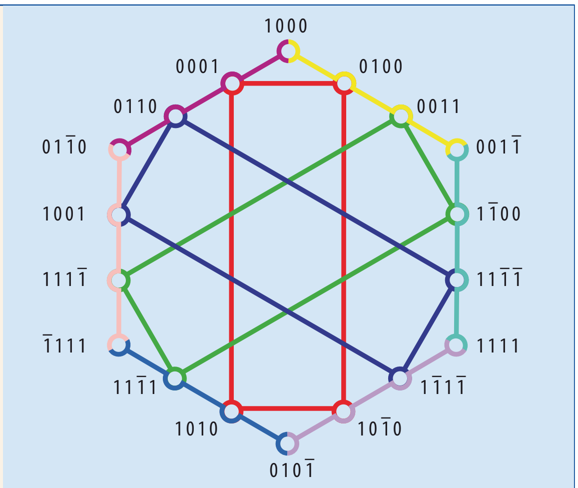
EIN EINFACHER BEWEIS IN VIER DIMENSIONEN

Adán Cabello fand einen einfachen Beweis des Satzes von Kochen und Specker [4]. Ziel des Beweises ist es, eine Menge von Vektoren im vierdimensionalen Raum explizit anzugeben, für die es nicht möglich ist, eine kontextunabhängige Zuweisung der Antworten „Ja“ oder „Nein“ zu finden. Diese Vektoren lassen sich dann als Messungen an einem Quantensystem interpretieren. Für diese Messungen ergibt sich die physikalische Aussage, dass Messresultate kontextuell sind und dass somit die Antwort auf eine Frage von den anderen gestellten Fragen abhängt.

Man betrachtet bei dem Beweis reelle Vektoren mit den Einträgen 0 und ± 1, mit der Kurznotation $01\bar{1}0$ statt (0,1,–1,0) etc. Dann wählt man 18 spezielle Vektoren, nimmt jeden davon zweimal und konstruiert daraus neun Gruppen untereinander orthogonaler Vektoren der folgenden Form (**Abb.**, die Normierung wurde weggelassen):

1000	$001\bar{1}$	1111	$010\bar{1}$	$\bar{1}111$	$01\bar{1}0$	0001	0011	$11\bar{1}\bar{1}$
0100	$1\bar{1}00$	$1\bar{1}1\bar{1}$	1010	$111\bar{1}$	0110	0100	$1\bar{1}00$	$1\bar{1}1\bar{1}$
0011	$11\bar{1}\bar{1}$	$10\bar{1}0$	$11\bar{1}1$	1001	0001	$10\bar{1}0$	$11\bar{1}1$	1001
$001\bar{1}$	1111	$010\bar{1}$	$\bar{1}111$	$01\bar{1}0$	1000	1010	$111\bar{1}$	0110

Was passiert, wenn man diesen Vektoren die Antworten „Ja“ oder „Nein“ zuweisen will? Da jede Spalte in der Tabelle eine orthogonale Basis bildet, muss in jeder der neun Spalten genau einmal die Antwort „Ja“ lauten. Andererseits kommt jeder der 18 Vektoren in genau zwei verschiedenen Spalten vor. Deshalb muss in einer kontextunabhängigen Zuweisung die Antwort „Ja“ in einer geraden Vielfachheit auftauchen. Das ist ein Widerspruch zu den neun „Ja“-Antworten aus jeder Spalte und aus diesem Grund ist eine Zuweisung nicht möglich.



In dieser Grafik zum Beweis von Cabello entsprechen die Vertices den Vektoren. Vertices mit einer gemeinsamen Farbe sind paarweise orthogonal und bilden eine Basis.

dieser Messungen ergibt ein Resultat ± 1, die miteinander multipliziert werden. Von diesem Produkt wird der Mittelwert über viele Wiederholungen des Experiments genommen.

Schnell ist klar, dass bei einer nichtkontextuellen Zuweisung der Messwerte zu den sechs Termen im Ausdruck $\langle\chi\rangle$ immer ein negatives Vorzeichen verbleibt. Das führt dazu, dass für nichtkontextuelle Modelle immer $\langle\chi\rangle \leq 5 - 1 = 4$ gelten muss. In der Quantenmechanik sind jedoch die ersten fünf Terme in $\langle\chi\rangle$ gleich eins, und auch der letzte Term ergibt mit dem gegebenen Vorzeichen einen positiven Beitrag. Deshalb sagt die Quantenmechanik einen Wert von $\langle\chi\rangle = 6$ voraus, im Widerspruch zur Annahme der Nichtkontextualität.

Eine bemerkenswerte Eigenschaft dieser Kochen-Specker-Ungleichung ist, dass die Quantenmechanik den Wert von $\langle\chi\rangle = 6$ für jeden beliebigen Quantenzustand vorhersagt. In der Tat nutzt die Herleitung nur aus, dass die Observablen sich zur Identität multiplizieren, setzt aber keine Eigenschaft eines Zustands voraus. Die Kochen-Specker-Ungleichung ist somit grundlegend anders geartet als jede Bellsche Ungleichung und zeigt, dass die Quantenkontextualität nicht mit der Verschränkung zusammenhängt.

Es gibt noch weitere Unterschiede: Während es für einen experimentellen Nachweis der Verletzung der Bellschen Ungleichungen nicht nötig ist, die Messungen genau zu charakterisieren, ist die Sache beim Kochen-Specker-Theorem etwas komplizierter. In der Tat gilt die Annahme der Nichtkontextualität nur für kompatible bzw. kommutierende Observablen. Doch da sich in einem Experiment immer nur eine endliche Genauigkeit erreichen lässt, kommutieren die Observablen nicht perfekt. Insofern ist es wichtig, in Experimenten die Vertauschbarkeit der Messungen zu prüfen. Es sind immer Zusatzannahmen (z. B. an die Struktur oder Dynamik der Modelle) erforderlich, um nichtkontextuelle Modelle mit verborgenen Parametern auszuschließen [8].

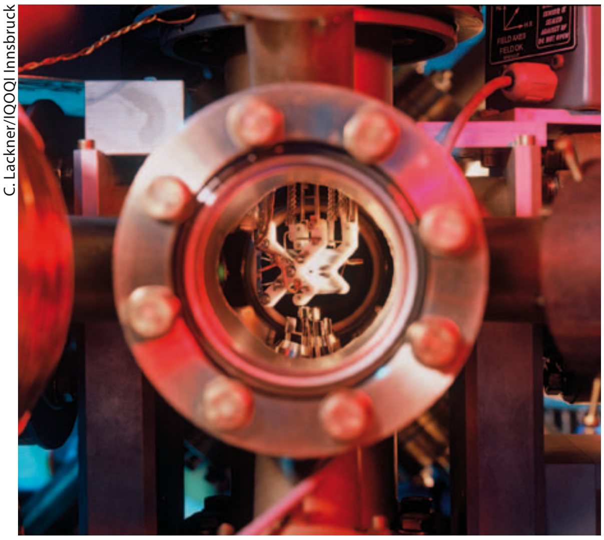
Interpretationen …

Zuerst besagt der Satz von Kochen und Specker, dass in der Quantenmechanik die Messergebnisse einer Observablen davon abhängen, welche anderen verträglichen Observablen gleichzeitig gemessen werden. Er hat jedoch noch andere Konsequenzen für die Interpretation der Quantenmechanik. Wie bereits erwähnt, zeigt die Bellsche Ungleichung, dass die Quantenmechanik nicht mit verborgenen Parametern, die lokal realistisch sind, zu erklären ist. Das Kochen-Specker-Theorem lässt sich ähnlich interpretieren. Modelle mit verborgenen Parametern, die die Annahmen des Realismus und der Nichtkontextualität erfüllen, sind unverträglich mit der Quantenmechanik. Die Lokalität ist in der Tat ein Spezialfall der Nichtkontextualität, da sich Messungen an verschiedenen, räumlich getrennten Teilchen nicht stören und insbesondere gemeinsam stattfinden können.

Allerdings stellt sich die Frage, ob die allgemeinere Annahme der Nichtkontextualität physikalisch vernünftig ist. Bell, der 1966 ein ähnliches Resultat wie Kochen und Specker bewies, hielt diese Annahme für ungerechtfertigt. Wenn man die Observable A gemeinsam mit B oder A gemeinsam mit a misst, sind das zwei unterschiedliche physikalische Situationen, bei denen Quantensystem und Messgerät verschieden wechselwirken. Deshalb ist es laut Bell nicht klar, dass in beiden Situationen die Observable A denselben Wert haben soll [9]. Asher Peres wies jedoch darauf hin, dass die Messungen auch zeitversetzt erfolgen können, so kann man zuerst A messen und sich später entscheiden, ob man B oder a misst. So ist garantiert, dass der Wert von A in beiden Kontexten gleich ist.

… und erste Experimente

Die erste Überprüfung der Ungleichung $\langle\chi\rangle \leq 4$ gelang der Arbeitsgruppe von Rainer Blatt in Innsbruck mit gefangenen Ionen [10] (**Abb. 2**), später folgten ähnliche Experimente mit Photonen oder Kernspinresonanz [11, 12]. Im Innsbrucker Experiment dienen die Zeeman-Niveaus von zwei $^{40}Ca^+$-Ionen als Basiszustände. Im Prinzip ist bekannt, wie verschiedene Transformationen auf einem oder zwei Teilchen zu implementieren sind [13]. Die große Schwierigkeit besteht darin, die erforderlichen Mess-Sequenzen durchzuführen und dabei die Kohärenz zu erhalten. Bei der sequenziellen Messung der Zeilen und Spalten ist nämlich zu beachten, dass die Einzelmessungen als Observablen auf dem gesamten vierdimensionalen Raum aufzufassen sind und nicht als lokale Messungen auf beiden Teilchen. So hat die Observable $C = \sigma_z \otimes \sigma_z$ zwei verschiedene Messresultate (+1 und –1). Jedes davon entspricht einem zweidimensionalen Unterraum des Hilbert-Raums. Das ist ein Unterschied zur separaten Messung von σ_z auf jedem der beiden Teilchen: In diesem Fall gäbe es vier mögliche Resultate (±1 separat für jedes



C. Lackner/IQOQI Innsbruck

Abb. 2 Mit zwei Calcium-Ionen in dieser Ionenfalle konnten Rainer Blatt von der Universität Innsbruck und seine Mitarbeiter die Kontextualität der Quantenmechanik nachweisen.

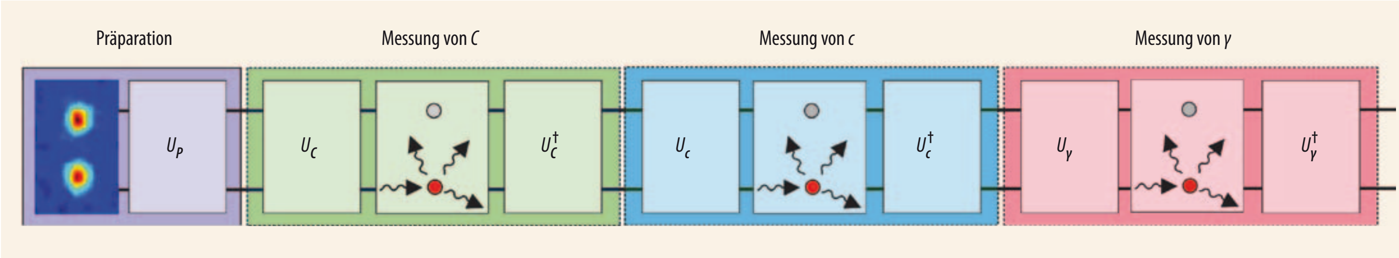


Abb. 3 Bei der Sequenz von Messungen der letzten Spalte des Peres-Mermin-Quadrats folgen auf die Zustandspräparation die drei Messungen, bei denen zuerst eine nichtlokale unitäre Transformation durchgeführt wird. Nur ein Teilchen wird ausgelesen, das andere bleibt ungestört. Schließlich wird die unitäre Transformation revertiert.

Teilchen). Das ist zu viel Information, und die Kohärenzen in den Unterräumen würden zerstört.

Da man jedoch im Experiment nur Pauli-Matrizen an den einzelnen Ionen messen kann, benutzte die Innsbrucker Gruppe einen Trick, um diese kohärenten Messungen zu implementieren: Zur Messung von $C = \sigma_z \otimes \sigma_z$ wurde zuerst eine nichtlokale Transformation gemacht, dann *ein* Teilchen ausgelesen und das andere wird ungestört belassen (**Abb. 3**). Mit dieser Methode lassen sich alle Messungen der letzten Zeile und letzten Spalte des PMQ durchführen. Das ist allerdings eine große Herausforderung: Zur Messung der letzten Zeile oder Spalte sind sechs nichtlokale Transformationen zu implementieren, und die Güte dieser Operationen muss hoch genug sein, um die angestrebte Verletzung der Ungleichung zu erreichen.

Das Innsbrucker Experiment ergab für den Zustand $|\psi^-\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$ einen Wert von $\langle\chi\rangle = 5{,}46 \pm 0{,}04$ und damit eine klare Verletzung der Kochen-Specker-Ungleichung (**Abb. 4**). Sie wurde auch für andere Zustände, darunter Produktzustände oder der maximal gemischte Zustand, geprüft. Stets war die Ungleichung verletzt, im Mittel lag der Wert von $\langle\chi\rangle$ bei 5,38. Damit gelang es, eine weitere wesentliche Vorhersage zu bestätigen, nämlich dass das Ergebnis nicht vom Zustand abhängt und somit nicht direkt mit dem Konzept der Verschränkung zusammenhängt.

Kontextualität versus Nichtlokalität

Es gibt jedoch noch ein anderes Argument, weshalb die Kontextualität allgemeiner ist als das Phänomen der Nichtlokalität. In ihrem ursprünglichen Beweis zeigten Kochen und Specker die Kontextualität der Quantenmechanik in einem dreidimensionalen System. In einem solchen System spielt die Nichtlokalität oder Verschränkung schon deshalb keine Rolle, weil mindestens ein vierdimensionaler Raum nötig ist, um ein Zweiteilchensystem zu beschreiben.

Der erste experimentelle Nachweis in einem solchen unteilbaren System gelang 2011 der Gruppe von Anton Zeilinger in Wien [14], anhand einer Ungleichung mit fünf Observablen [15]:

$$\langle\eta\rangle = \langle AB\rangle + \langle BC\rangle + \langle CD\rangle + \langle DE\rangle + \langle EA\rangle. \qquad (4)$$

Die fünf Observablen $A, \ldots, E$ haben als mögliche Ergebnisse ± 1. Für nichtkontextuelle Modelle ist leicht einzusehen, dass nicht alle fünf Terme in $\langle\eta\rangle$ den Wert -1 annehmen können. Deshalb gilt $\langle\eta\rangle \geq -3$. In der Quantenmechanik kann man jedoch fünf Observablen an einem dreidimensionalen System (z. B. einem Spin-1-Teilchen) von der Form $A = \mathbb{1} - 2|v_1\rangle\langle v_1|$, $B = \mathbb{1} - 2|v_2\rangle\langle v_2|$, usw. finden, sodass alle in Gl. (4) auftretenden Paare kommutieren und zudem $\langle\eta\rangle = 5 - 4\sqrt{5} \approx -3{,}94$ gilt, wenn der passende Anfangszustand $|\psi\rangle = (\sum_i |v_i\rangle)/\sqrt{N}$ gewählt wurde.

Für ihr Experiment verwendeten die Wiener Physiker einzelne Photonen, wobei die drei Basiszustände durch drei mögliche Wege eines Photons in einem Interferometer gegeben waren. Der Anfangszustand $|\psi\rangle$ war eine kohärente Verteilung eines einzelnen Photons auf die drei Pfade. Die Messung einer Observable geschah durch das Einbringen von geeigneten optischen Elementen ($\lambda/2$-Plättchen und polarisierende Strahlteiler) und dem anschließenden Nachweis des Photons in einem bestimmten Pfad (**Abb. 5**). Wurde das Photon dort nachgewiesen, so lautet das Resultat der Observablen -1, andernfalls $+1$. Das Paar AB aus dem Ausdruck (4) wird also gemessen, indem die entsprechenden Pfade gewählt werden. Um den nächsten Term BC zu bestimmen, sind die beiden Pfade, die zur Messung von B nicht nötig sind, so zu manipulierem, dass sich C dort messen lässt. Auf diese Weise kann man BC und letztlich alle Paare der Ungleichung messen.

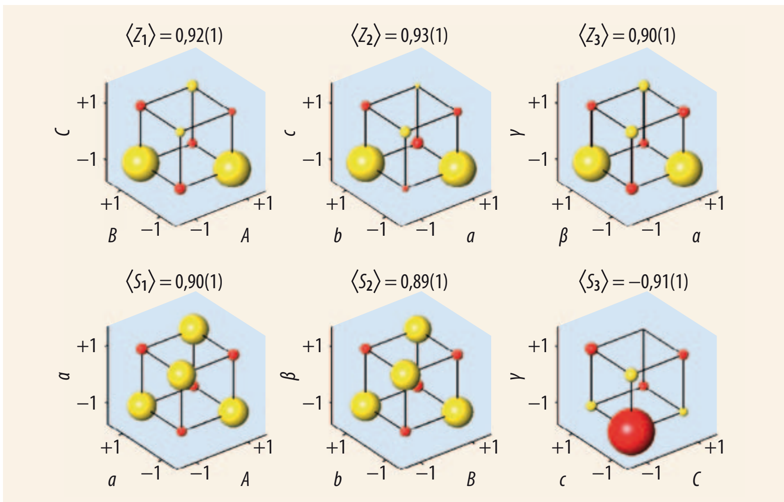


Abb. 4 Für den Singulett-Zustand $|\psi^-\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$ ergeben sich für jede der sechs Messsequenzen acht mögliche Resultate (+++ bis −−−), von deren Mittelwert berechnet wird. Das Volumen der Kugeln entspricht der Häufigkeit der Messergebnisse. Insgesamt folgt ein Wert von $\langle\chi\rangle = 5{,}46 \pm 0{,}04 > 4$.

Foto: J. Godany/IQOQI Wien

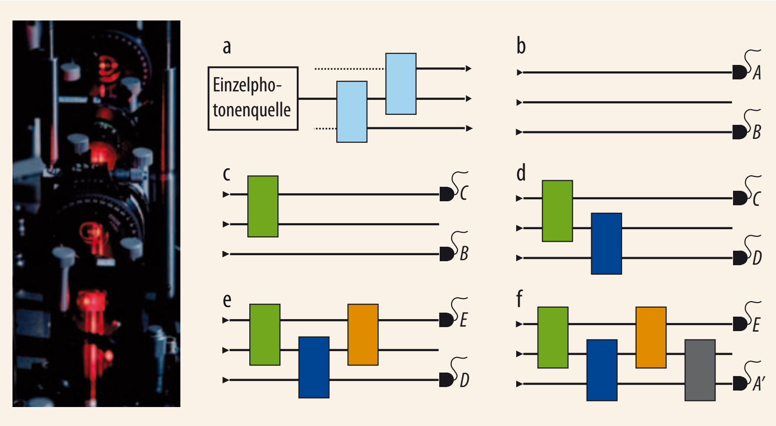


Abb. 5 Im Experiment zum Nachweis der Kontextualität mit Photonen (links) wird ein einzelnes Photon auf drei Pfade verteilt (a). Der Nachweis oder Nicht-Nachweis eines Photons im entsprechenden Pfad legt den Wert der jeweiligen Observablen *A* und *B* fest (b). Durch kohärente Manipulationen (farbige Boxen) kann man auch die übrigen Observablen *B*, *C*, *D* und *E* messen und zwar immer in der relevanten Paarung *AB*, *BC* usw. (c – f). Hierbei bleibt der Messaufbau für *B* in der Paarung *AB* und *BC* gleich usw.

Der Aufbau ist so aufwändig gestaltet, um sicherzustellen, dass z. B. die Observable *B*, welche sowohl in dem Term *AB* als auch in *BC* gemessen wird, immer dem gleichen experimentellen Aufbau entspricht. Ansonsten wäre leicht ein nichtkontextuelles Modell zu finden, welches den unterschiedlichen Aufbauten Rechnung trägt und damit die Schranke von $\langle \eta \rangle \geq -3$ durchbricht. Im Experiment vermeidet eine geschickte Staffelung dieses Problem. Allerdings wurde beim letzten Paar nicht *EA* gemessen, sondern *EA'*, wobei *A'* einen anderen Aufbau hat als die Observable *A* im ersten Paar *AB*.[1)] Insgesamt ergab sich ein Wert von $\langle \eta \rangle = -3{,}893 \pm 0{,}006$. Sogar unter Berücksichtigung der Ungleichheit von *A* und *A'* wurde der Grenzwert für nichtkontextuelle Modelle um 120 Standardabweichungen unterschritten.

Weitere Entwicklungen

Nach einem langen Dornröschenschlaf ist das Interesse an der Quantenkontextualität wieder erwacht. In der theoretischen Analyse gibt es große Bemühungen und Fortschritte, Kochen-Specker-Ungleichungen systematisch herzuleiten und zu charakterisieren. Eine besonders erfolgreiche Methode bedient sich der Graphentheorie. Es lassen sich Ungleichungen durch Graphen charakterisieren, umgekehrt leiten sich aus der reinen Analyse von Graphen Ungleichungen ab. Weiterhin gibt es mehrere Ansätze, um die Kontextualität besser zu verstehen. So lässt sich zeigen, dass die klassische Simulation von kontextuellen Systemen einen erhöhten Speicherbedarf hat. Sehr interessant wäre es, Anwendungen in der Quanteninformationsverarbeitung zu finden, bei denen die Kontextualität als eine Ressource notwendig ist.

Experimente zur Kontextualität sind zum einen als fundamentale Tests der Quantenmechanik wichtig, zum anderen können sie dazu dienen, die Quantennatur von physikalischen Systemen zu beweisen. Interessante Kandidaten sind hier die Kernspins der Stickstoff-Fehlstellen in Diamanten oder auch einzelne gefangene Ionen, bei denen sich drei unterschiedliche Energieniveaus manipulieren lassen. Weiterhin gibt es Vorschläge, Quantenkontextualität und Nichtlokalität gemeinsam zu beobachten, indem man Kochen-Specker-Ungleichungen an einem räumlich verteilten Quantensystem misst. Dadurch ließen sich weitere Modelle mit verborgenen Parametern ausschließen. Trotz der großen Fortschritte in der Manipulation einzelner Quanten ist die experimentelle Umsetzung jedoch weiterhin sehr herausfordernd.

1) Man kann jedoch die Eigenschaften von *A* und *A'* vergleichen, um zu argumentieren, dass es sich effektiv um die gleiche Observable handelt. Im Experiment weichen *A* und *A'* nur geringfügig voneinander ab, dies kann mit einem Korrekturterm in der Ungleichung berücksichtigt werden.

Danksagung

Wir danken Adán Cabello für eine langjährige Zusammenarbeit mit vielen spannenden Diskussionen und Arthur Jaffe für das überlassene Bildmaterial. Unsere Arbeiten werden vom FWF, der EU und dem BMBF unterstützt.

Literatur

[1] *E. Specker*, Dialectica **14**, 239 (1960)
[2] *Y.-C. Liang*, *R. W. Spekkens* und *H. M. Wiseman*, Phys. Rep. **506**, 1 (2011)
[3] *S. Kochen* und *E. Specker*, J. Math. Mech. **17**, 59 (1967)
[4] *A. Cabello*, *J. M. Estebaranz* und *G. García-Alcaine*, Phys. Lett. A **212**, 183 (1996)
[5] *A. Peres*, Phys. Lett. A **151**, 107 (1990)
[6] *N. D. Mermin*, Phys. Rev. Lett. **65**, 3373 (1990)
[7] *A. Cabello*, Phys. Rev. Lett. **101**, 210401 (2008)
[8] *O. Gühne* et al., Phys. Rev. A **81**, 022121 (2010)
[9] *J. S. Bell*, Rev. Mod. Phys. **38**, 447 (1966)
[10] *G. Kirchmair* et al., Nature **460**, 494 (2009)
[11] *E. Amselem* et al., Phys. Rev. Lett. **103**, 160405 (2009)
[12] *O. Moussa* et al., Phys. Rev. Lett. **104**, 160501 (2010)
[13] *R. Blatt*, Physik Journal, August/September 2012, S. 35
[14] *R. Lapkiewicz* et al., Nature **474**, 490 (2011)
[15] *A. Klyachko* et al., Phys. Rev. Lett. **101**, 020403 (2008)

DIE AUTOREN

Otfried Gühne (FV Quantenoptik) hat in Münster Mathematik und Physik studiert und im Jahr 2004 bei Maciej Lewenstein in Hannover promoviert. Danach ging er als Postdoc zu Hans Briegel nach Innsbruck. Ab 2008 leitete er dort eine Nachwuchsgruppe, die durch den österreichischen START-Preis finanziert wurde. Seit 2010 ist er Professor an der Universität Siegen. In seiner Freizeit versucht er sich daran, im Schachspiel zu gewinnen.

Matthias Kleinmann (FV Quantenoptik) studierte in Heidelberg Physik und wurde 2008 an der Universität Düsseldorf bei Dagmar Bruß promoviert. Anschließend arbeitete er am Institut für Quantenoptik und Quanteninformation in Innsbruck und ist seit 2010 an der Universität Siegen. Neben der Quanteninformationstheorie gilt sein Interesse den Grundlagen der Quantenmechanik. Als Wanderer ist er Mitglied des Alpenvereins und spielt im Orchester der Universität Siegen Waldhorn.