TEILCHENPHYSIK

Zusätzliche Raumdimensionen

Wie stehen die Chancen, dass die anscheinend so fundamentale Zahl Drei ihre Sonderrolle verliert?

Gia Dvali und Arthur Hebecker

Der Raum, in dem wir leben und Naturgesetze formulieren, hat drei Dimensionen. Ungeachtet dieser scheinbar unumstößlichen Tatsache spielt die Möglichkeit zusätzlicher, versteckter Raumdimensionen seit Langem eine wichtige Rolle bei der Suche nach den fundamentalsten mikroskopischen Gesetzen. Dies liegt am Traum von der Vereinigung aller Kräfte, der mit mehr Dimensionen leichter zu verwirklichen ist. Insbesondere fordert die Stringtheorie als führender Kandidat für eine solche Vereinigung zwingend die Existenz von Extradimensionen.

Unsere alltägliche Erfahrung lehrt uns, dass der uns umgebende Raum dreidimensional ist. Dies belegen auch die Gültigkeit der Newtonschen Mechanik und Gravitationstheorie. Doch leicht lässt sich klar machen, dass die so beobachtete Dimensionszahl eine Illusion sein könnte: Während drei Raumdimensionen unendlich ausgedehnt sind, könnte eine weitere Dimension auf einem kleinen Kreis „aufgerollt" existieren (**Abb. 1**). An jedem Punkt unserer Welt gäbe es eine vierte Richtung, in die wir jedoch nicht eindringen können. Wie groß dürfte eine solche versteckte Dimension sein? Um dies zu beantworten, konzentrieren wir uns zunächst auf reine Gravitationsexperimente. Dies ist vernünftig, da die Gravitationskraft durch Vibrationen des „Raumes an sich" übertragen wird. Sie ist damit die einzige Kraft, welche die Form des Raumes ganz unverfälscht „sieht". Die Gravitation lässt sich bei kleinen Abständen durch hochpräzise mechanische Labor-Experimente testen, die nach Abweichungen vom Newtonschen $1/r^2$-Verhalten der Kraft suchen. Die besten so erzielten Ausschlussgrenzen entsprechen einer maximalen Größe der versteckten Dimensionen von rund 0,04 mm und stammen von Experimenten mit Torsionswaagen der Gruppe von Eric Adelberger an der Universität von Washington [1].

Doch warum haben die vielen mikroskopischen Experimente, die zu wesentlich kleineren Distanzen vorgedrungen sind, diese großen Extradimensionen nicht längst gesehen [2]? Solche Experimente beruhen z. B. auf der elektromagnetischen Kraft zwischen Elektronen und Atomkernen, also auf dem Austausch von Photonen zwischen kleinsten Teilchen. Daraus ergibt sich eine mögliche Antwort auf die gestellte Frage: All diese Teilchen und Wechselwirkungen könnten an einen dreidimensionalen Unterraum gebunden sein.

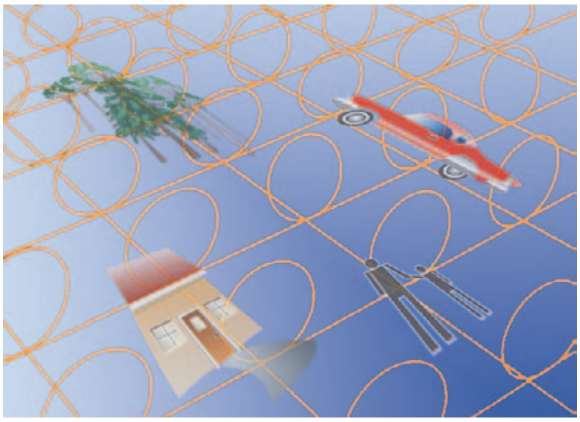

Abb. 1 Zusätzliche Dimensionen könnten so aufgerollt sein, dass wir sie nicht wahrnehmen. Hier ist die dreidimensionale Welt, in der wir leben, zweidimensional gezeichnet. Dann befinden sich die extradimensionalen Kreise in der dritten Dimension. Die Kreise sind übertrieben groß gezeichnet und müssten in Wirklichkeit so klein sein, dass wir sie mit unserer begrenzten räumlichen Auflösung schlicht übersehen.

Um sich dies besser vorzustellen, denke man etwa an eine Metall-Membran im Vakuum. Wenn wir diese mit einem Hammer anschlagen, erzeugen wir Schallwellen, die sich entlang der Membran ausbreiten. Diese Wellen sind auf eine zweidimensionale Fläche im dreidimensionalen Raum eingeschränkt. Im „ADD-Szenario" [2], das wir noch vorstellen werden, sind die Kräfte der Teilchenphysik ganz analog auf eine dreidimensionale Brane (abgeleitet von Membrane) eingeschränkt (**Abb. 2**).

Das oben skizzierte Weltbild ist natürlich nur ein besonders interessanter Extremalfall. Denkbar wäre auch, dass Extradimensionen erst bei sehr kleinen, selbst an modernen Teilchenbeschleunigern noch nicht zugänglichen Abständen sichtbar werden und

KOMPAKT

- Zusätzliche Raumdimensionen über die drei bekannten hinaus könnten der Schlüssel für eine Vereinheitlichung aller Kräfte sein.
- Verschiedene theoretische Szenarien sagen Extradimensionen voraus, deren Ausdehnung zwischen rund 0,04 mm – diese Grenze ergibt sich aus Präzisionsexperimenten zur Gravitation – bis hinunter zur Planck-Länge liegt.
- Im Prinzip könnte es mit dem Large Hadron Collider gelingen, Signaturen der Extradimensionen zu entdecken.

Prof. Dr. Gia Dvali, Ludwig-Maximilians-Universität, Fakultät für Physik, Theoretische Physik, Theresienstraße 37, 80333 München; **Prof. Dr. Arthur Hebecker**, Institut für Theoretische Physik, Universität Heidelberg, Philosophenweg 19, 69120 Heidelberg

für alle Kräfte gleichermaßen relevant sind. Auch eine Kombination von einigen sehr kleinen und einigen etwas größeren Extradimensionen ist vorstellbar. Wichtig ist zudem, dass sich die etwas *ad hoc* eingeführte Brane mit den an sie gebundenen Teilchen im Rahmen der Stringtheorie präzise mathematisch realisieren lässt.

Große Extradimensionen

In der Elementarteilchenphysik ist es üblich, mit Einheiten zu arbeiten, in denen Lichtgeschwindigkeit und Plancksches Wirkungsquantum den Wert Eins annehmen, $\hbar = c = 1$. Damit haben Länge und Zeit dieselbe Einheit, und zwar die des inversen Impulses oder der inversen Energie. Letztere wird oft in Giga-Elektronen-Volt (GeV $= 10^9$ eV) gemessen, was wegen $E = mc^2$ auch ein bequemes Maß für die Masse ist. Die Protonenmasse beträgt dann etwa 1 GeV und der Protonradius, in sehr grober Näherung, 1 GeV^{-1}. Ganz allgemein entsprechen wegen Heisenbergs Unschärferelation große Energien kleinen Distanzen.

Die Welt der Teilchenphysik ist bis zu Abständen von $(100\ \text{GeV})^{-1} \sim 2 \cdot 10^{-15}$ mm sehr gut vermessen. Dies ist die „elektroschwache Skala", an der die rund 100 GeV schweren $W^\pm$- und Z-Bosonen, die Träger der schwachen Wechselwirkung, zu finden sind. Der Large Hadron Collider (LHC) in Genf ist dabei, in den Bereich von $(1\ \text{TeV})^{-1}$ vorzustoßen.

Zunächst möchten wir jedoch auf die Gravitationskraft zurückkommen, die sowohl bei makroskopischen Abständen als auch bei $(100\ \text{GeV})^{-1}$ sehr schwach ist. Der Grund hierfür ist die extrem kleine Newtonsche Gravitationskonstante $G_N = 1/(M_P)^2$, die wir hier durch die Planck-Masse $M_P \simeq 1{,}2 \cdot 10^{19}$ GeV ausgedrückt haben. Die Gravitationskraft wächst mit dem inversen Quadrat des Abstandes zweier Massen,

$$|\vec{F}(r)| \sim \frac{1}{(M_P)^2} \times \frac{m_1 m_2}{r^2}\ , \qquad (1)$$

und wird erst bei extrem kleinen Abständen $r \sim 1/M_P$ stark. Dies setzt aber voraus, dass wir das Newtonsche Gravitationsgesetz um 31 Größenordnungen jenseits der gegenwärtigen experimentellen Testbarkeit extrapolieren.

Denkbar wäre es, dass die Gravitation viel schneller, etwa schon in der Nähe der elektroschwachen Skala, die Stärke der anderen Wechselwirkungen erreicht. Die dazu erforderliche Abweichung vom Newtonschen Gravitationsgesetz ist etwa dann möglich, wenn unser Universum Extradimensionen besitzt. Um diesen Effekt zu verstehen, wollen wir zunächst an die geometrische Bedeutung des Newtonschen Gravitationsgesetzes erinnern. Diese ergibt sich aus dem Gaußschen Gesetz der Mathematik: Demzufolge genügt es, um die Abstandsabhängigkeit langreichweitiger Kräfte (wie Gravitations- oder elektromagnetische Kraft) zu verstehen, das gravitierende Objekt als Quelle von Flusslinien zu betrachten, die erhalten bleiben müssen. Insbesondere ist der totale Fluss durch eine Sphäre, welche die Quelle umgibt, unabhängig von der Größe der Sphäre. Die Dichte der Flusslinien nimmt also ab, wenn die Oberfläche dieser gedachten Sphäre wächst. Diese Dichte bestimmt auch die Stärke des Kraftfeldes, welches demzufolge mit $1/r^2$ abfallen muss, im Einklang mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz.

In einem Universum mit n extra Dimensionen führt das obige Argument zu einem anderen Ergebnis: Da die Sphäre, welche eine gravitierende Quelle in $3+n$ Dimensionen einschließt, $(2+n)$-dimensional ist, wächst ihre Oberfläche mit r^{2+n}. Daraus folgt also

$$|\vec{F}_n(r)| \sim \frac{1}{(M_{P,n})^{2+n}} \times \frac{m_1 m_2}{r^{2+n}}, \qquad (2)$$

wobei $M_{P,n}$ die höherdimensionale Planck-Masse ist.

Bemerkenswert ist, dass die Existenz derartiger Dimensionen im Einklang mit allen bisherigen Beobachtungen steht, solange deren Größe durch 0,04 mm begrenzt ist. Gemäß dem Szenario „Large Extra Dimensions" leben wir in einem Universum mit $3+n$ Dimensionen [2]. Dabei sind die n zusätzlichen Dimensionen in Form eines Raumes mit einer Größe von weniger als 0,04 mm kompaktifiziert. Im einfachsten Fall ist diese „extradimensionale Mannigfaltigkeit" ein Kreis mit Radius R oder ein Produkt mehrere solcher Kreise, also ein Torus (**Abb. 3**). Im Allgemeinen kann dieser Raum natürlich viel komplizierter sein.

Die Gravitation in einem solchen Universum verhält sich wie folgt (**Abb. 4**): Betrachten wir die Gravitationskraft im Abstand r von einer Punktmasse. Solange r viel größer als der Kompaktifizierungsradius R ist, folgt diese dem vertrauten Newtonschen $1/r^2$-Gesetz. Sobald r jedoch kleiner wird, beginnt die gravitative Anziehung schneller zu wachsen und geht in ein $1/r^{2+n}$-Verhalten über. Wenn man sich der Masse weiter annähert, könnte die Gravitation also schon bei LHC-Energien die Stärke der anderen Wechselwirkungen erreichen. Damit wäre $M_{P,n} \sim 1000$ GeV die fundamentale Energieskala von Gravitation und Teilchenphysik, bei der alle Wechselwirkungen (in sehr grober Näherung) gleich stark sind. Die beobachtete Schwäche der Gravitation ist in diesem Bild das Resultat des starken $1/r^{2+n}$-Abfalls der Kraft bei Abständen $M_{P,n}^{-1} < r < R$, was sich aus der Ausbreitung der Flusslinien in großen Extradimensionen ergibt.

Das oben Gesagte hat eine weitere interessante Implikation: Die Gleichungen (1) and (2) gelten bei $r \gg R$ bzw. $r \ll R$. Also müssen sie für $r \sim R$ (präziser, $r = 2\pi R$)

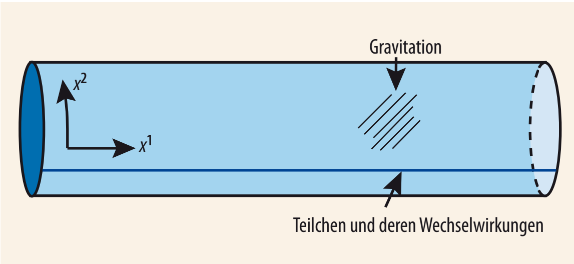

Abb. 2 Die Gravitation „lebt" in den flachen Dimensionen (x^1) wie auch in den kompakten extra Dimensionen (x^2); die Elementarteilchen und deren Wechselwirkungen sind hingegen auf der Brane gefangen.

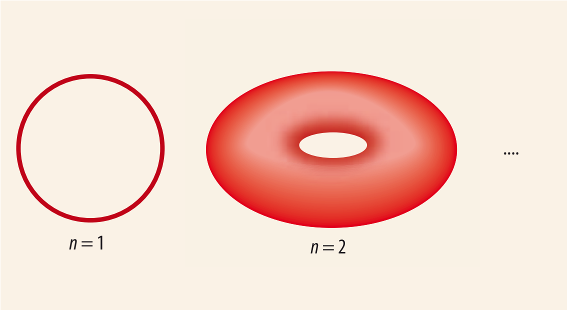

Abb. 3 Für $n=1$ ist der extradimensionale Raum ein Kreis, für $n=2$ ein „Doughnut". Für $n=3$ muss man sich analog vorstellen, dass man in jeder der drei „kompakten" Richtungen nach einer Strecke von $2\pi R$ wieder am Ausgangspunkt ankommt.

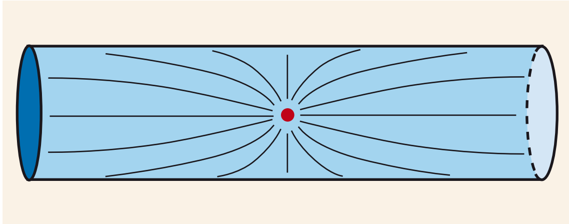

Abb. 4 Aus zeichnerischen Gründen ist hier der Fall mit *einer* „normalen" (statt der vertrauten *drei*) Dimensionen und einer kompakten Dimension dargestellt. Das Kraftfeld verdünnt sich zunächst wie für zwei Raumdimensionen typisch, also proportional zu $1/r$. Bei größeren Abständen werden die Kraftlinien parallel, und es stellt sich das für *eine* Raumdimension typische Verhalten der Kraft, also proportional zu $1/r^0 \sim$ konst. ein.

annähernd übereinstimmen. Daraus ergibt sich eine Beziehung zwischen M_P, $M_{P,n}$ und R, aus der sich der Kompaktifizierungsradius R ergibt:

$$R \sim \frac{1}{2\pi\, M_{P,n}} \times \left(\frac{M_P}{M_{P,n}}\right)^{2/n}. \qquad (3)$$

Interessanterweise ergibt sich so für zwei Extradimensionen mit $M_{P,2} \sim$ 3 TeV ein Radius von $R \sim 0{,}2\,\mathrm{meV}^{-1} \sim 0{,}04$ mm, was gerade mit den erwähnten Schranken aus Gravitationsexperimenten verträglich ist.

Die experimentellen Implikationen dieses Szenarios sind spektakulär und sollten am LHC testbar sein. So sind bei der Kollision von Protonen die Emission von Gravitonen (Gravitationswellen sehr kurzer Wellenlänge) in die Extradimensionen und die Produktion mikroskopischer Schwarzer Löcher zu erwarten. Letzteres folgt zwingend aus der Tatsache, dass die Gravitation schon bei TeV-Energien stark wird. Dadurch müssen Kollisionen mit ausreichend großer Energie stark gravitierende Objekte mit TeV-Masse erzeugen. Diese Objekte sind nicht die vertrauten Schwarzen Löcher aus der Astrophysik, sondern vielmehr irgendwo zwischen diesen und Elementarteilchen beheimatet. Deshalb ist ihre Zerstrahlung von dem Zerfall einer Elementarteilchen-Resonanz nur schwer zu unterscheiden.

Schwerwiegendes Hierarchie-Problem

Das Standardmodell der Teilchenphysik beschreibt mit hoher Präzision die Natur von drei der vier fundamentalen Wechselwirkungen (der starken, schwachen und elektromagnetischen Kraft) bei Energien von bis zu 100 GeV. Die starke, schwache und elektromagnetische Kraft werden von jeweils acht, drei und einem Träger vermittelt. Mathematisch gesehen entsprechen sie der Symmetriegruppe des Standardmodells: $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Die Symmetriegruppe $SU(3)$ transformiert z. B. die drei verschiedenen Quarks ineinander, so wie die vertrauten Drehungen unserer dreidimensionalen Welt die x-, y- und z-Achse eines Koordinatensystems ineinander überführen. Die Gravitation spielt, wie wir später sehen werden, eine Sonderrolle.

Von diesen Kraftträgern haben nur drei, die $W^\pm$- und Z-Bosonen, eine fundamentale Ruhemasse, welche bei etwa 100 GeV liegt. Diese entspricht einer Compton-Wellenlänge von ungefähr 10^{-16} cm und definiert die Reichweite der Kraft. Deshalb ist die schwache Wechselwirkung, im Gegensatz etwa zur elektromagnetischen Kraft, so kurzreichweitig.

Nach dem Standardmodell verdanken die $W^\pm$- und Z-Bosonen ihre Masse dem Higgs-Kondensat, mit welchem sie und viele weitere Teilchen wechselwirken. Das Higgs-Kondensat ist eine Substanz, die den gesamten Raum erfüllt, aber dennoch kein „Äther" ist, da das Higgs-Kondensat kein Bezugssystem auszeichnet. Vielmehr ist es ein Feld (ähnlich dem elektrischen Feld, aber ohne ausgezeichnete Richtung), an dem die Bosonen bei ihrer Bewegung im Raum fortwährend streuen. Sie erhalten dadurch eine Masse von der Größe des Higgs-Feldes, das wiederum von der Masse des Higgs-Teilchens bestimmt wird. Letztere muss also auch etwa 100 GeV betragen.

Das Hierarchieproblem besteht nun darin zu verstehen, warum die Higgs-Masse so viel kleiner ist als die fundamentale Planck-Masse $M_P \sim 10^{19}$ GeV. Dieses Problem ist so schwerwiegend, weil wir Quantenkorrekturen zur Higgs-Masse berechnen können. Grob gesagt ergeben sich diese aus den Quantenfluktuationen des Higgs-Feldes, wobei letztere sehr große Energien haben können und alle aufzuaddieren sind. Erst die Allgemeine Relativitätstheorie, also die Gravitation, schränkt die Summe all dieser Korrekturen ein: Bei Energien nämlich, die mit M_P vergleichbar sind, führt die nunmehr starke Gravitationskraft zum Kollaps der Fluktuation in ein Schwarzes Loch. Noch energiereichere Quantenfluktuationen bzw. noch kürzere Distanzen sind in der Allgemeinen Relativitätstheorie unzulässig.

Mit anderen Worten, die Quantenkorrekturen erhöhen die Higgs-Masse, bis starke Gravitationseffekte ein weiteres Wachstum bei der Planck-Skala verhindern. Auf diese Art sagt die Quantenmechanik gemeinsam mit der Allgemeinen Relativitätstheorie eine Higgs-Masse von 10^{19} GeV voraus, im Widerspruch zum Experiment. Eine zufällige Kompensation verschiedener Beiträge ist möglich, aber extrem unwahrscheinlich.

Diese Situation wird nun vom ADD-Szenario, benannt nach den Autoren Arkani-Hamed, Dimopoulos und Dvali, entscheidend verbessert: Bei kleinen Abständen ist die Welt (3+n)-dimensional, und die Quantenkorrekturen werden von der entsprechenden höherdimensionalen Planck-Masse $M_{P,n}$ kontrolliert. Letztere kann aber viel kleiner sein und im TeV-Bereich liegen.

Der Traum von der Großen Vereinigung

Der Versuch, bekannte Modelle auf einfachere, fundamentalere Theorien zurückzuführen, hat sich in der Physik häufig als sehr fruchtbar erwiesen. In diesem Zusammenhang ist Nordström, Kaluza und Klein erstaunlich früh eine bahnbrechende Einsicht gelungen [3]. Sie schlugen vor, von einer reinen Gravitationstheorie zu starten, allerdings mit einer zusätzlichen Raumdimension. Diese sollte, wie schon beschrieben, auf einem kleinen Kreis aufgerollt sein. Eine Theorie mit mehr Dimensionen hat auch mehr Freiheitsgrade, grob gesagt, weil der höherdimensionale Raum mehr „Vibrationsmöglichkeiten" hat. Der Niederenergie-Beobachter, der die Extradimension nicht auflösen kann, sieht dennoch den Effekt der zusätzlichen Freiheitsgrade: Sie treten als Felder einer ganz normalen Elektrodynamik, also als Freiheitsgrade des Photons, in Erscheinung. Oder noch präziser: Eine Gravitationstheorie mit einer kompakten Extradimension kann die perfekte Illusion der gewöhnlichen Gravitation zusammen mit der ebenso vertrauten Elektrodynamik erzeugen. Startpunkt ist dabei die aufgrund von Symmetrien *eindeutige* höherdimensionale Gravitationstheorie. Damit eröffnet sich die atemberaubende Perspektive einer Vereinigung *aller* bekannten Kräfte, so wie es Maxwell einst für die elektrische und magnetische Kraft vorgeführt hat.

Aufgrund verschiedener technischer und konzeptioneller Probleme ist es jedoch zunächst über viele Jahrzehnte bei diesem Traum geblieben. Erst in den 80er-Jahren kam es mit der Entwicklung der Superstringtheorie zu einer Renaissance der mittlerweile als Kaluza-Klein-Theorien bekannten Klasse von Modellen [4]. Die Stringtheorie in ihrer modernen Form gilt als mögliche Lösung des UV-Problems der Quantengravitation. Dieses besteht darin, dass der Streuquerschnitt von Gravitonen bei hohen Energien unzulässig schnell wächst oder „singulär" wird. Lösen lässt es sich, indem man generell Teilchen durch Strings (also eindimensionale fundamentale Objekte) ersetzt, welche in ihrer Streuung keine problematischen Singularitäten mehr besitzen (**Abb. 5**). Aus Gründen der mathematischen Konsistenz müssen diese Strings aber stets in neun Raumdimensionen existieren. Dementsprechend sollten sechs dieser Dimensionen, analog zur Extradimension von Kaluza und Klein, kompaktifiziert sein (**Abb. 6**). Die Theorie der Strings ist zwar nicht mehr so einfach wie eine reine Gravitationstheorie, aber sie ist aus Symmetriegründen dennoch (im Wesentlichen) eindeutig. Die Möglichkeit einer komplexeren Teilchenphysik-Welt, wie sie unseren Beobachtungen entspricht, resultiert aus der Wahl des kompakten sechsdimensionalen Raumes. Analog zur Kaluza-Klein-Theorie entsprechen z. B. die Vibrationsmoden des sechsdimensionalen kompakten Raumes gewöhnlichen dreidimensionalen Teilchen und Feldern.

In den einfachsten stringtheoretischen Modellen liegt die Größe der sechs Extradimensionen nahe der Planck-Skala, was den direkten experimentellen Zugang unmöglich macht. Das beobachtete Spektrum der Elementarteilchen gibt jedoch Aufschluss über zumindest einen Teil der geometrischen Eigenschaften dieses Raumes.

Ein Vorschlag, der zwischen dem spektakulären Szenario der Extradimensionen und dem konservativeren Bild von sechs Extradimensionen bei der Planck-Skala liegt, beruht auf der Idee der Großen Vereinigung (Grand Unified Theory, GUT) [5]. Diese postuliert die Vereinigung der drei Kräfte des Standardmodells und der Symmetriegruppen SU(3), SU(2) und U(1) in eine einzige Kraft mit einer größeren Symmetriegruppe (im einfachsten Fall SU(5)). Präzise quantenmechanische Rechnungen extrapolieren die Stärke der drei bekannten Kräfte zu hohen Energien und sagen eine solche Vereinigung bei der Skala $M_{\mathrm{GUT}} \simeq 10^{16}$ GeV vorher. Diese liegt zwar in verheißungsvoller Nähe zur Planck-Skala, ist aber doch signifikant kleiner. Der Vorschlag der „Orbifold-GUTs" besagt nun, dass man an dieser Skala auf (zumindest eine) Extradimension mit der Größe $R \sim 1/M_{\mathrm{GUT}}$ stößt [6]. Die Geometrie dieser Dimension ist kein Kreis, sondern ein Intervall – es gibt also zwei Ränder mit besonderen physikalischen Eigenschaften. Mathematisch heißen solche Räume Orbifold (abgeleitet vom englischen „Manifold" für Mannigfaltigkeit).

Dieses Bild löst einige der Probleme von Modellen der Großen Vereinigung und ihrer Einbettung in die Stringtheorie: Zum einen ermöglicht der Rand des Raumes eine natürliche Brechung der Symmetrie zu der des Standardmodells, ohne hierfür die volle Komplexität der sechsdimensionalen String-Geometrie verstehen zu müssen. Zum anderen erleichtert die weitere quantenmechanische Extrapolation der Kopplungsstärke, die in Anwesenheit einer zusätzlichen Dimension erfolgt, die Einbettung in die Stringtheorie bei einer noch höheren Energie. Hoffnungen auf einen, wenigstens indirekten, Test solcher Modelle

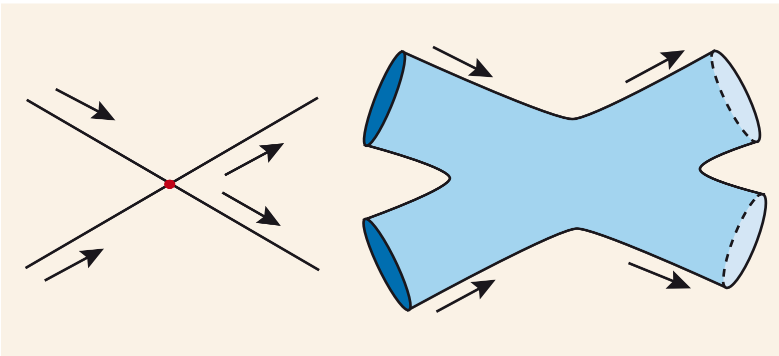

Abb. 5 Bei der Streuung von Teilchen (links) gibt es einen „singulären" Punkt, an dem sich vier Linien treffen und welcher das zu schnelle Wachstum des Streuquerschnitts verursacht. Streuen hingegen Strings (also kleine „Ringe", rechts), so existiert dieser Punkt nicht mehr.

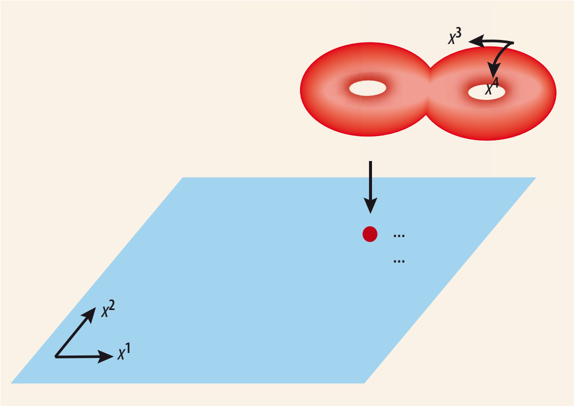

Abb. 6 Da sich eine „Kompaktifizierung" von neun auf drei Dimensionen nicht leicht zeichnen lässt, ist hier die analoge Situation einer Kompaktifizierung von vier auf zwei Dimensionen dargestellt. Die durch x^3 und x^4 parametrisierte Fläche muss man sich über *jedem* Punkt der x^1-x^2-Ebene denken.

am LHC beruhen vor allem auf der möglichen Entdeckung neuer Teilchen, die die angesprochene quantenmechanische Extrapolation der Kräfte zu höheren Energien beeinflussen. Dies ist am besten verstanden im Rahmen von Supersymmetrie, einer Fermion-Boson-Symmetrie, welche man sich auch als Manifestation einer fermionischen Dimension der Raum-Zeit vorstellen kann.

Dies ist natürlich nur einer der vielen Vorschläge, die in den letzten Jahren gemacht wurden und die verschiedene extradimensionale Geometrien bei verschiedenen Energieskalen postulieren. Eine verwandte Möglichkeit ist beispielsweise die, eine Orbifold-Geometrie direkt bei der TeV-Skala zu entdecken. Dies lässt zwar keine Gravitationstests zu, führt aber zu interessanten Signalen am LHC [7].

Auf das Volumen kommt es an

Wir haben eingangs erklärt, dass Extradimensionen für uns unsichtbar sind, wenn ihre Ausdehnung (der Kompaktifizierungs-Radius) klein ist. Randall und Sundrum haben jedoch erkannt, dass es auch völlig anders geht: Eine genaue technische Analyse zeigt nämlich, dass es für die „Illusion" einer dreidimensionalen Welt gar nicht auf die Ausdehnung, sondern auf das Volumen der Extradimensionen ankommt. Daraus folgt die Möglichkeit unendlich ausgedehnter (nichtkompakter) Extradimensionen. Um sich dies vorzustellen, denke man an ein Martini-Glas, dessen Radius umgekehrt proportional zur Tiefe abnimmt. Ein solches Glas lässt sich, selbst wenn es unendlich tief ist, mit einer endlichen Menge Martini füllen (**Abb. 7**).

Dieses Bild beschreibt recht genau die Geometrie des RS-Modells: Es gibt eine dreidimensionale Brane, genau wie bei ADD, und eine zu dieser orthogonale Dimension. Entscheidend ist, dass eine konstante Energiedichte des Vakuums den so entstandenen vierdimensionalen Raum negativ krümmt. Diese konstante negative Krümmung verursacht den „Martini-Glas-Effekt": Obwohl die vierte Koordinate sich bis ins Unendliche erstreckt, ist das vierdimensionale Raumvolumen neben der Brane (pro dreidimensionalem Brane-Volumen) endlich.

Ein Beobachter, der sich von der Brane entfernt, sieht einen gekrümmten Raum, analog zur Situation in der Nähe eines stark gravitierenden Objektes, etwa eines Schwarzen Loches. Die Distanzen parallel zur Brane schrumpfen aus seiner Sicht sehr schnell, sodass er ein endliches Gesamtvolumen misst. All dies folgt aus der Metrik

$$ds^2 = e^{-2ky}\, dx^2 + dy^2 \qquad (4)$$

dieses Raumes, wobei $1/k$ etwa der Krümmungsradius ist.

Nun soll der gleiche hypothetische Beobachter bei seiner Reise „weg von der Brane" einen Maßstab mitführen. Dieser Maßstab sei in Einheiten der Planck-Länge $L_{P(RS)}$ des gekrümmten höherdimensionalen Raumes geeicht. Da man stets nur *relativ* messen kann, äußert sich das oben besprochene Schrumpfen des Raumes darin, dass dieser Maßstab aus unserer dreidimensionalen Sicht wächst (**Abb. 8**).

Nehmen wir etwa an, dass $L_{P(RS)}$ und die Krümmungsskala $1/k$ des Raumes vergleichbar sind. Dann ist auch die dreidimensionale Planck-Länge L_P von der gleichen Größenordnung. Hat sich nun unser Beobachter um ca. 37 Planck-Längen von der Brane entfernt, so ist sein Maßstab schon um einen Faktor $e^{37} \simeq 10^{16} \simeq M_P$ / 1 TeV gewachsen. Mit anderen Worten, die höherdimensionale Planck-Länge $L_{P(RS)}$ hat jetzt eine Größe erreicht, die sich am LHC untersuchen lässt.

Motiviert durch diesen Effekt haben Randall und Sundrum vorgeschlagen, dass die Teilchen des Standardmodells nicht auf der oben eingeführten „ursprünglichen" Brane leben, sondern auf einer parallelen Brane, die 37 Planck-Längen entfernt ist. Die fundamentale Energieskala $M_{P(RS)} \sim 1/L_{P(RS)}$ wäre dann aus Sicht dieser Brane nicht mehr die Planck-, sondern die TeV-Skala, so wie im ADD-Szenario. Auch die Konsequenzen für das Hierarchie-Problem wären ähnlich.

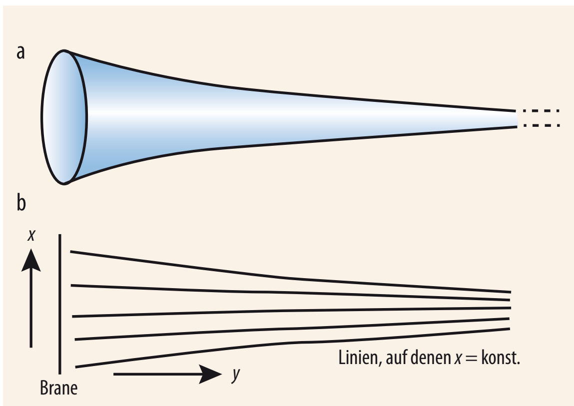

Abb. 7 Ein (auf der Seite liegendes) Martini-Glas, welches unendlich tief ist und doch endliches Volumen hat (a). Das Randall-Sundrum-Modell (b): Die Brane ist der Rand einer vierdimensionalen Welt (der Raum rechts von der Brane). Die Koordinate x steht für die drei Koordinaten unserer Welt, y bezeichnet die nichtkompakte extra Dimension.

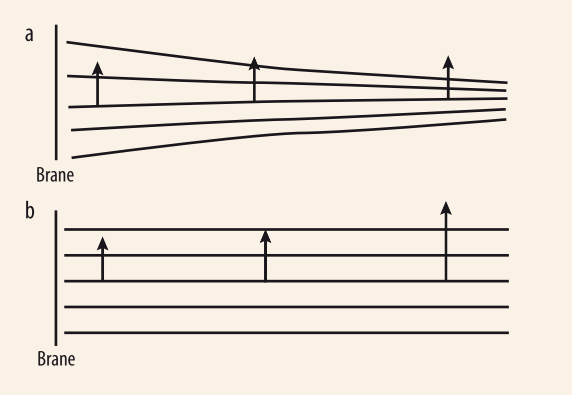

Abb. 8 Der brane-parallele Raum schrumpft, wenn man sich von der Brane entfernt (a). Die gleiche Situation anders dargestellt – der Pfeil (der Maßstab) wächst (b).

Extradimensionen mit unendlichem Volumen?

Lässt man Abweichungen von der Einsteinschen Theorie bei sehr großen Abständen zu, darf das Volumen von Extradimensionen unendlich sein. Dies ist experimentell stark eingeschränkt: Signifikante Abweichungen von der Relativitätstheorie sind nur bei Abständen von 10^{28} cm – der Größe des beobachtbaren Universums – erlaubt. Folglich dürfen sich die Flusslinien der Gravitation in die Extradimensionen ausbreiten, aber erst bei sehr großen Abständen.

Ein solches Szenario wird vom DGP-Modell realisiert, benannt nach den Autoren Dvali, Gabadadze und Porrati [9]. Zur Veranschaulichung wollen wir uns die Welt wieder als Metall-Membran vorstellen, aber nunmehr in Luft. Die Schallwellen sollen die Rolle der Gravitationswellen spielen. Wenn wir die Membran mit einem Hammer anschlagen, erzeugen wir Schallwellen. Diese breiten sich viel leichter im Metall aus, und die Energie wird deshalb im Wesentlichen entlang der Membran transportiert. Ein gewisser Teil breitet sich jedoch auch in der Luft aus, und dieser Verlust wird bei großen Abständen spürbar. Dies ist ganz analog zu dem, was im DGP-Modell geschieht: Das Graviton ist stark, aber nicht vollständig an die Brane gebunden. Da es sehr langsam in den zusätzlichen Raum entweicht, wird der Effekt erst bei sehr großen Distanzen signifikant.

Trotz des sehr geringen Verlusts lässt sich dieser Effekt durch hochpräzise Gravitations-Experimente auf großen Längenskalen detektieren. Zu solchen Experimenten zählen z. B. genaue Vermessungen der Planetenbahnen und die Beobachtung der kosmologischen Expansion. Auf ihrer Umlaufbahn tauschen die Planeten mit der Sonne Gravitonen aus, die eine endliche „Lebensdauer" haben, weil sie in die extra Dimensionen entkommen können. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist winzig, und ihre Lebensdauer vergleichbar mit dem Alter des Universums. Trotzdem führt dieser Effekt zu kleinen Abweichungen der Planetenbahnen von denen der Einsteinschen Theorie. In Analogie zu den ausgetauschten Gravitonen denke man an einen Tennisball, der zwischen den Spielern ausgetauscht und dabei abgenutzt wird. Der Effekt ist klein, weil die Lebensdauer des Balles im Vergleich zur Dauer eines Spiels riesig ist. Trotzdem können genaue Messungen ihn nachweisen.

Die Form des Raumes „hören"

Wenn es Extradimensionen gibt, könnten sich diese in naher Zukunft entdecken lassen, falls die fundamentale Energieskala oder die inverse Größe der Extradimensionen (oder beide) im Bereich der TeV-Skala oder darunter liegen. Das Hierarchie-Problem nährt die Hoffnung auf eine solche Entdeckung, da es diese Skalen im Energiebereich des LHC vermuten lässt. Um die Beschaffenheit der Extradimensionen experimentell zu untersuchen, benötigen wir die Fähigkeit, die „Musik zu hören", die vom extradimensionalen Raum ausgeht.

Unsere Teilchendetektoren erstrecken sich nicht in die Extradimensionen und können die dorthin entkommenden Teilchen daher nicht registrieren. Trotzdem sind sie in der Lage, Signaturen extradimensionaler Physik zu erfassen. Sie tun dies buchstäblich, indem sie die Musik der extradimensionalen Geometrie wahrnehmen, so wie das Ohr für die Töne von Musikinstrumenten empfindlich ist. Diese Analogie ist viel tiefer, als man vermuten würde. Wollen wir ein Instrument durch unser musikalisches Ohr erkennen, erzeugen wir zuerst die Schwingungen des Instruments und registrieren dann das Spektrum seiner harmonischen (Ober)schwingungen. Und auch Teilchenbeschleuniger erregen zunächst Wellen in der Geometrie und detektieren anschließend deren Spektrum.

Dies geschieht wie folgt: Der LHC kollidiert Protonen mit Energien von mehreren TeV. Wenn die Energie die inverse Größe einer Extradimension überschreitet, beginnen die kollidierenden Teilchen, Gravitationswellen zu erzeugen, die sich in die Extradimension ausbreiten. Die sog. Kaluza-Klein-Moden des Gravitons sind die „Schallwellen" der Raum-Zeit-Geometrie, die wir durch die Kollision hochenergetischer Teilchen zum Schwingen bringen.

Was ist das Schicksal dieser Wellen? Jede individuelle KK-Mode wechselwirkt nur äußerst schwach mit unseren Detektoren – bis zu 10^{-32}-mal schwächer als Neutrinos. Daher entgeht der Großteil der Energie der direkten Detektion und tritt nur als Fehlbetrag in der Energiebilanz zu Tage. Das charakteristische Spektrum der KK-Moden übersetzt sich so am LHC in ein Spektrum fehlender Energie. Die KK-Moden sind die (Ober)töne der extradimensionalen Geometrie, die sich demzufolge aus der Kenntnis dieses „Spektrums der fehlenden Töne" rekonstruieren lässt.

Sobald die Kollisionsenergie die fundamentale Energieskala (die Planck- oder String-Skala) überschreitet, ergänzt ein neuer Prozess die Produktion von KK-Moden: die Produktion mikroskopischer Schwarzer Löcher und String-Anregungen [10]. Interessanterweise manifestieren sich diese Objekte wiederum durch Schwingungen – die Vibrationen der Schwarzen Löcher und der fundamentalen Strings.

Im Unterschied zu den KK-Moden entziehen sich die Anregungen der Strings oder der Schwarzen Löcher aber nicht der Detektion. Sie zerfallen sehr schnell in Teilchen des Standardmodells, und ihr Spektrum lässt sich durch die direkte Vermessung der Zerfallsprodukte rekonstruieren. Dieses Spektrum hängt davon ab, auf wie viele verschiedene Weisen die Schwarzen Löcher oder die Strings vibrieren können und wie diese Vibrationen an die Teilchen des Standardmodells koppeln.

In den nächsten Jahren geht es also einerseits darum, den LHC zu seiner Leistungsgrenze zu treiben und nach den Signaturen von Extradimensionen oder anderen Abweichungen vom Standardmodell zu suchen. Andererseits ist ein besseres theoretisches Verständnis möglicher extra-dimensionaler Geometrien und damit der Spektren dieser Signaturen vonnöten. Zum Beispiel liefert die Stringtheorie zwar ein recht klares Bild der neundimensionalen Theorie, aber das Verständnis denkbarer sechsdimensionaler kompakter Räume, mit ihren Branen und den darauf lebenden Teilchen des Standardmodells, ist durch unsere gegenwärtigen mathematischen Fähigkeiten begrenzt.

Literatur

[1] *E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, B. R. Heckel, S. Hoedl* und *S. Schlamminger,* Prog. Part. Nucl. Phys. **62**, 102 (2009)

[2] *N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos* und *G. R. Dvali,* Phys. Lett. B **429**, 263 (1998); *I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos* und *G. R. Dvali,* Phys. Lett. **B436**, 257 (1998)

[3] *G. Nordström,* Physikal. Z. **15**, 504 (1914); *T. Kaluza,* Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.), S. 966 (1921); *O. Klein,* Z. f. Physik **A 37**, 895 (1926)

[4] *J. Louis,* Physik Journal, Juni 2008, S. 29

[5] *G. Moortgat-Pick* und *P. Zerwas*, Physikal. Bl. **57**, März 2001, S. 41

[6] *Y. Kawamura,* Prog. Theor. Phys. **105**, 999 (2001); *L. J. Hall* und *Y. Nomura,* Phys. Rev. D **64**, 055003 (2001); *A. Hebecker* und *J. March-Russell*, Nucl. Phys. B **613**, 3 (2001)

[7] *K. R. Dienes, E. Dudas* und *T. Gherghetta*, Phys. Lett. B **436**, 55 (1998); *A. Pomarol* und *M. Quiros*, Phys. Lett. **B438** 255 (1998); *T. Gherghetta* und *A. Pomarol,* Nucl. Phys. **B586**, 141 (2000)

[8] *L. Randall* und *R. Sundrum*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370 und **83**, 4690 (1999)

[9] *G. R. Dvali, G. Gabadadze* und *M. Porrati*, Phys. Lett. B **485**, 208 (2000)

[10] *D. Lust, S. Stieberger, T. R. Taylor,* Nucl. Phys. **B808**, 1 (2009)

DIE AUTOREN

Georgi (Gia) Dvali wurde in Georgien geboren, wo er an der Universität Tiflis studierte und promovierte (1992). Danach forschte er am CERN, in Pisa sowie am ICTP in Triest. 1998 wurde er Professor an der New York University, 2007 Mitglied der Theoriegruppe am CERN und 2010 Humboldt-Professor an der LMU München und Direktor am Max-Planck-Institut für Physik. Gia Dvali ist einer der „Erfinder" der Large Extra Dimensions.

Arthur Hebecker hat in Moskau, Frankfurt am Main und München Physik studiert und bei Julius Wess, einem der „Väter" der Supersymmetrie, seine Diplomarbeit geschrieben. Nach seiner Promotion 1995 (an Universität und DESY Hamburg) führten ihn seine Wanderjahre nach Stanford, Cambridge, Heidelberg und ans CERN. Seit 2004 ist er Professor für theoretische Teilchenphysik und Kosmologie an der Uni Heidelberg.