

GUSTAV-HERTZ-PREIS

# Relativ heiß

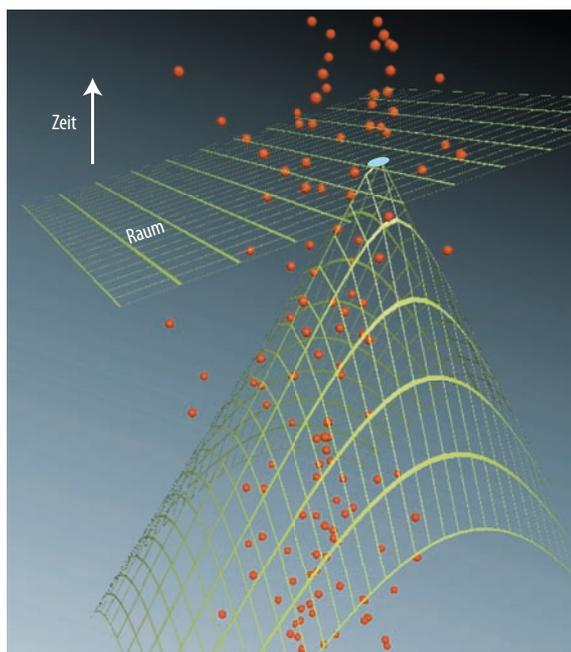
## Brownsche Bewegung und Thermodynamik in der Relativitätstheorie

Jörn Dunkel

Thermodynamik, Diffusions- und Relativitätstheorie haben sich als Eckpfeiler der statistischen bzw. theoretischen Physik bewährt. Obwohl alle drei Gebiete wesentlich durch die Arbeiten Albert Einsteins geprägt wurden, erwies sich ihre Vereinheitlichung lange Zeit als schwierig. Heute ermöglichen stochastische Differentialgleichungen einen eleganten Zugang, um relativistisch konsistente Diffusionsmodelle zu formulieren, und sie eröffnen neue Wege, um Transport- und Thermalisierungsprozesse im Rahmen der Relativitätstheorie zu modellieren.

Albert Einsteins Arbeiten von 1905 haben die Physik nachhaltig geprägt [1]: seine Erklärung des photoelektrischen Effekts, die Erkenntnis des thermostatischen Ursprungs<sup>n)</sup> der Brownschen Bewegung und nicht zuletzt die Formulierung der Relativitätstheorie. Die darauf folgenden Bestrebungen, quantenmechanische und relativistische Konzepte zu vereinheitlichen, waren zentraler Forschungsgegenstand der Physik des letzten Jahrhunderts. Sie führten u. a. zu quantenfeldtheoretischen Methoden, die ihren bisherigen Höhepunkt im aktuellen Standardmodell der Elementarteilchen finden. Im Gegensatz dazu erwies sich die Einbettung von Brownschen Bewegungskonzepten [2–4] und Thermodynamik [5, 6] in die Relativitätstheorie lange Zeit als problematisch.

Ursprünglich bezeichnet Brownsche Bewegung die Zufallsbewegung mesoskopischer Partikel in einer molekularen Flüssigkeit, die der Botaniker Robert Brown 1827 erstmals detailliert untersucht hat. Einstein, Paul Langevin und Norbert Wiener entwickelten mathematische Techniken, um dieses Phänomen zu quantifizieren. Diese Methoden finden heute vielfältige Anwendungen in der Physik, Mathematik, Biologie und Chemie [2, 3]. Sie bilden die Grundlage moderner Diffusionsmodelle, die allgemein darauf abzielen, die quasi-zufällige Dynamik ausgewählter Freiheitsgrade („Brownsche Teilchen“) in einem komplexen Hintergrundmedium („Wärmebad“) mit partiellen oder stochastischen Differentialgleichungen statistisch zu beschreiben. Eine solche Unterteilung in primäre und sekundäre Freiheitsgrade ist in der Regel dann sinnvoll, wenn eine natürliche Skalentrennung vorliegt. Dies ist z. B. der Fall, wenn Austauschprozesse im Wärmebad sehr schnell ablaufen, sich die typischen Massen- und Längenskalen seiner Bestandteile deutlich von denen



Die traditionelle Thermodynamik basiert auf simultan zu messenden Zustandsgrößen wie Impuls oder Energie, die beim Durchtritt von Teilchen (rot) durch (Hyper-)Ebenen konstanter Zeit summiert werden. Bei der „fotografischen“ Thermodynamik hingegen addiert man entlang des vom Beobachtungereignisses (blau) ausgehenden Rückwärtslichtkegels.

des Brownschen Teilchens unterscheiden und sich die Wechselwirkungen mit dem Hintergrundmedium näherungsweise als unkorrelierte Stöße auffassen lassen. Ein anschauliches Beispiel ist ein kleiner Farbtropfen, der sich in Wasser ausbreitet, d. h. von einem stark lokalisierten Ausgangspunkt in die umgebende Flüssigkeit diffundiert. Die Farbpartikel spielen hierbei die Rolle Brownscher Teilchen und die Wassermoleküle die des Wärmebads.

Dass die Relativitätstheorie mit traditionellen Beschreibungen der Brownschen Bewegung unverträglich

1) Sehr ähnliche, unabhängig erzielte Resultate publizierte der australische Physiker William Sutherland bereits wenige Monate zuvor [2].

### KOMPAKT

- Diffusionsmodelle ermöglichen eine vereinfachte statistische Beschreibung von Zufallsbewegungen in komplexen Systemen und finden vielfältige Anwendungen in der Physik, Mathematik, Biologie und Chemie.
- Im Widerspruch zur Relativitätstheorie erlauben klassische Diffusionsmodelle oftmals Teilchenbewegungen, welche die Lichtgeschwindigkeit überschreiten. Relativistisch konsistente „Brownsche“ Bewegungen sind mithilfe von Langevin-Gleichungen im Phasenraum formulierbar.
- Konzeptionelle und operationelle Probleme der traditionellen relativistischen Thermodynamik lassen sich umgehen, wenn man Zustandsgrößen „fotografisch“ auf der Basis von Lichtkegeln definiert.

Dr. Jörn Dunkel, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Centre for Mathematical Sciences, University of Cambridge, Wilberforce Road, Cambridge CB3 0WA, Großbritannien – Preisträgerartikel anlässlich der Verleihung des Gustav-Hertz-Preises 2011 auf der Jahrestagung der DPG in Dresden

2) Sutherland und Einstein gelang es, die makroskopisch bestimm- bare Diffusionskonstante mit den mikrosko- pischen und thermody- namischen Parametern des Hintergrundmedi- ums in Beziehung zu set- zen [2, 3]. Dies eröffnete ein seinerzeit neues, unabhängiges Messver- fahren für die Avogadro- Loschmidt-Zahl.

ist, lässt sich bereits anhand der klassischen Diffusions- gleichung in einer Raumdimension verdeutlichen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (1)$$

Hierbei ist  $\rho(t, x)$  die Wahrscheinlichkeitsdichte des Brownschen Teilchens mit Position  $X(t)$  zur Zeit  $t$  im Ruhesystem des Hintergrundmediums und  $D$  die Dif- fusionskonstante.<sup>2)</sup> Als Differentialgleichung erster Ord- nung in der Zeit beschreibt Gl. (1) einen „Markovschen Zufallsprozess“ im Ortsraum. Markov-Prozesse zeich- nen sich durch eine minimale „Erinnerung“ an vorher- gehende Zustände aus; sie definieren in diesem Sinne die einfachste Klasse nichttrivialer Zufallsbewegungen. Mathematisch bedeutet dies, dass bereits die Kenntnis der Anfangsverteilung  $\rho(0, x)$  genügt, um die zukünf- tige Entwicklung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit vorherzusagen. Die Lösung von Gl. (1) zu einer bei  $t=0$  strikt lokalisierten Anfangsbedingung  $\rho(0, x) = \delta(x)$  ist durch expandierende Gauß-Verteilungen gegeben, wel- che sich zu Zeiten  $t > 0$  über den gesamten Raum erstre- cken. Im Widerspruch zur Relativitätstheorie erlaubt die klassische Diffusionsgleichung somit Teilchen, die schneller sind als die Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Für alltäg- liche Anwendungen, wie die erwähnte Bewegung von Farbpartikeln in Wasser, ist dies belanglos, da hier die Diffusionskonstante  $D$  so klein ist, dass die von Gl. (1) vorhergesagte Wahrscheinlichkeit für das Verlassen des Lichtkegels verschwindend gering wird; geht es jedoch darum, Zufallsbewegungen in sehr heißen Medien wie

z. B. astrophysikalischen Plasmen zu beschreiben, so erweist sich die potenzielle Überschreitung der Licht- geschwindigkeit als problematisch (Abb. 1 und 2).

Die Frage, ob sich die klassische Diffusionsgleichung zu einem relativistisch konsistenten Markov-Prozess  $X(t)$  im Rahmen der Raum-Zeit verallgemeinern lässt, hat der polnische Physiker Jan Łopuszański 1952 ne- gativ beantwortet. Der amerikanische Mathematiker Richard Dudley bewies 1962 rigoros ein gleichlautendes Resultat. Um relativistische Diffusionsprozesse zu kon- struieren, muss man demnach entweder die Markov- Eigenschaft aufgeben, d. h. partielle Differentialglei- chungen höherer Ordnung in der Zeit betrachten, oder den Zustandsraum erweitern. Letzteres lässt sich errei- chen, indem man von reinen Raum-Zeit-Prozessen  $X(t)$  zu einer Beschreibung im relativistischen Phasenraum der Orts- und Impulskoordinaten übergeht [4, 7].

### Diffusion mit beschränkter Geschwindigkeit

William Thomson (Lord Kelvin) leitete 1854 eines der ersten Modelle für diffusiven Transport mit be- schränkten Geschwindigkeiten ab. Er befasste sich mit der Ausbreitung elektrischer Signale anlässlich der Ver- legung des ersten transatlantischen Kommunikations- kabels. Dabei fand er die Telegraphengleichung [8]

$$\tau \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad \tau \geq 0 \quad (2)$$

### LANGEVIN-GLEICHUNGEN

Die Trajektorien  $X(t)$  der durch Gl. (1) beschrie- benen eindimensionalen klassischen Brown- schen Bewegung genügen im Ruhesystem des Hintergrundmediums der stochastischen Differentialgleichung

$$dX(t) = (2D)^{1/2} dW(t) \quad (3)$$

Hierbei ist  $dX(t) = X(t+dt) - X(t)$  die Positionsver- änderung während des infinitesimalen Zeit- intervalls  $[t, t+dt]$ ,  $W(t)$  ist ein Wiener-Prozess, definiert dadurch, dass die Inkremente  $dW(t)$  zu verschiedenen Zeiten statistisch unabhän- gig voneinander sind und jeweils einer Gauß- schen Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz  $dt$  genügen. Intuitiv erhält man Gl. (3) im überdämpften Grenzfall ( $dV/dt \rightarrow 0$ ) aus den nichtrelativistischen Langevin-Gleichungen [2] für ein Teilchen der Ruhemasse  $M$

$$\frac{dX}{dt} = V, \quad M \frac{dV}{dt} = F_r + F_L(t) \quad (4)$$

mit Stokesscher Reibungskraft  $F_r = -bV$ . Die Langevinsche Zufallskraft  $F_L(t)$  ist formal durch  $F_L(t) dt = (2b^2 D)^{1/2} dW(t)$  bestimmt. Bei hinrei- chend hohen Temperaturen überschreiten durch Gl. (4) beschriebene Teilchen die Licht- geschwindigkeit (Abb. i und 1).

Die einfachste relativistische Verallgemeine- rung ergibt sich, wenn man in der Impulsbilanz (4) den nichtrelativistischen durch den relativis- tischen Impuls  $P = MV(1 - V^2/c^2)^{-1/2}$  ersetzt und die Form der dissipativen Kräfte beibehält.

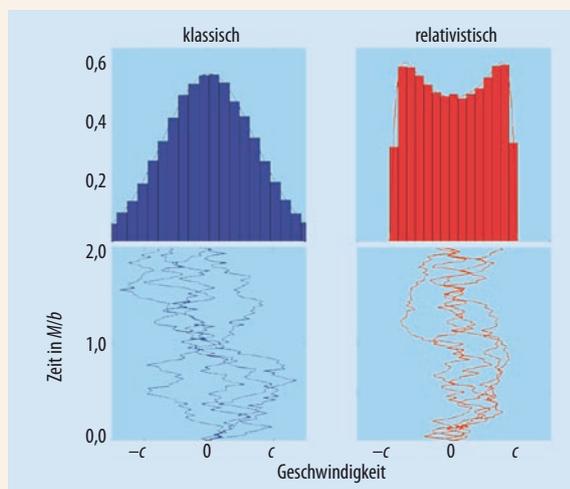


Abb. i Typische Geschwindig- keitsentwicklung (unten) und stationäre Verteilungen (oben) für Brownsche Teilchen (Masse  $M$ , Reibungskoeffizient  $b$ ) nach Gl. (4) und (5) für  $k_B T = 0,5 Mc^2$ .

Dies führt auf die Langevin-Gleichungen des relativistischen Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses [7] (Abb. i und 2)

$$\frac{dX}{dt} = V, \quad \frac{dP}{dt} = -bV + F_L(t) \quad (5)$$

Die effektiven Parameter  $b$  and  $D$  modellieren die mikroskopischen Wechselwirkungen zwi- schen Brownschem Teilchen und Wärmebad; sie sind in der Regel nicht unabhängig vonei- nander, sondern durch Fluktuations-Dissipa- tions-Theoreme über die Temperatur  $T$  des Mediums miteinander verknüpft. Fixiert man

$bD = k_B T$ , so konvergiert die Impulsverteilung des durch Gl. (5) beschriebenen Prozesses gegen die relativistische Jüttnersche Verall- gemeinerung der Maxwell-Verteilung  $\phi(p) = Z^{-1} \exp[-(M^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2} / (k_B T)]$  (Abb. i). Glei- chung (5) lässt sich erweitern, indem man zu- sätzliche deterministische Einflüsse, wie die Lorentz-Kraft, zur Impulsbilanz hinzufügt. Prinzipiell sind auch realistischere (z. B. im- pulsabhängige, raum-zeitlich variierende) Rei- bungskräfte [15] sowie statistisch komplexere Zufallskräfte behandelbar.

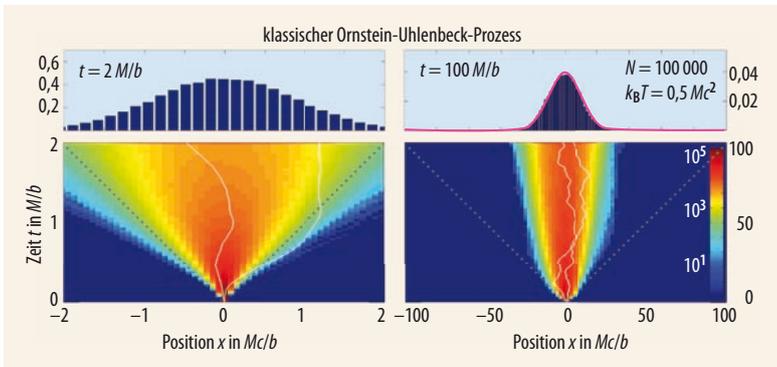


Abb. 1 Entwicklung der räumlichen Aufenthaltswahrscheinlichkeit von  $N$  klassischen Brownschen Teilchen (Masse  $M$ , Reibungskoeffizient  $b$ ) und zwei typische Trajektorien (weiß). Bei hohen Temperaturen  $T$  können durch die nicht-relativistische Gl. (4) beschriebene Teilchen den Lichtkegel (gepunktet) verlassen (links). Für große Zeiten konvergiert die Wahrscheinlichkeitsdichte gegen die Gaußsche Lösung (pink) der klassischen Diffusionsgleichung (rechts).

wobei der Parameter  $\tau$  eine Relaxationszeitskala beschreibt. Diese Gleichung lässt sich als eine Mischung aus klassischer Diffusions- und Wellengleichung auffassen. Ihre Lösungen zu einer stark lokalisierten Anfangsbedingung sind durch singular divergierende Fronten charakterisiert, die sich mit endlicher Geschwindigkeit  $\sqrt{D/\tau}$  ausbreiten. Wählt man die Parameter so, dass  $\sqrt{D/\tau} \leq c$  gilt, dann lässt sich die Telegraphengleichung als ein einfaches Modell für Zufallsbewegungen innerhalb des Lichtkegels interpretieren. Beschränkt auf eine Raumdimension kann man Gl. (2) auch als kontinuierlichen Grenzfall einer diskreten „persistenten“ Zufallsbewegung ableiten<sup>3)</sup>; im Gegensatz zur klassischen Diffusion hängt die Bewegungsrichtung des Teilchens hierbei auch von seiner vorherigen Geschwindigkeit ab [8], was zum Auftreten der zweiten Zeitableitung führt. Damit beschreibt die Telegraphengleichung einen nicht-Markovschen Transportprozess, d. h. zur Vorhersage der Lösung  $\rho(t, x)$  muss nicht nur die Anfangsverteilung  $\rho(0, x)$ , sondern auch deren zeitliche Änderung bekannt sein – die zugehörige Zufallsbewegung  $X(t)$  „erinnert“ sich also nicht nur an ihre vorherige Position, sondern auch an ihre Geschwindigkeit.

Die Telegraphengleichung lässt sich jedoch nur beschränkt als „relativistisches“ Diffusionsmodell anwenden: So ist nicht gesichert, dass die Lösungen für beliebige Anfangsverteilungen normiert und nichtnegativ bleiben. Zudem sind die vorhergesagten singulären Diffusionsfronten oft unphysikalisch, wie der niederländische Theoretiker Nico van Kampen in den 1970er-Jahren anhand eines einfachen Modells für diffusiven Wärmetransport durch Photonen demonstrierte [10]. Eine akurate Beschreibung führt in diesem Fall auf eine Integro-Differentialgleichung, die sich durch systematische Näherungen auf eine hyperbolische partielle Differentialgleichung der Form (2) reduzieren lässt. Allerdings verlieren die dazu notwendigen Approximationen ihre Gültigkeit in der Nähe der Diffusionsfronten.

### Relativistische Langevin-Gleichungen

Ein eleganterer Zugang, um relativistische Diffusionsprozesse zu beschreiben, eröffnet sich, wenn man die stochastische Dynamik im Phasenraum formuliert [4, 7, 9]. Hierbei wird die Bewegung des Brownschen Teilchens nicht nur durch seine Ortskoordinate  $X(t)$ , sondern auch durch seine relativistische Impulskoordi-

nate  $P(t)$  charakterisiert. Durch diese Erweiterung des Zustandsraums wird es möglich, relativistische Zufallsbewegungen als Markov-Prozesse im Phasenraum mittels stochastischer Differentialgleichungen ganz analog zur nichtrelativistischen Brownschen Bewegung zu formulieren (Infokasten „Langevin-Gleichungen“). Dabei werden deterministische und stochastische Kräfte, die die Wechselwirkung zwischen Brownschem Teilchen und Wärmebad vermitteln, in die Impulsbilanz einbezogen. Da der relativistische Impuls eines Teilchens im Gegensatz zur Geschwindigkeit prinzipiell unendlich hohe Werte annehmen kann, ist eine additive Ankopplung von Gaußschen oder anderen Zufallskräften auch im relativistischen Fall problemlos möglich.

Ein wesentlicher Vorteil des Langevin-Zugangs besteht darin, dass die resultierenden relativistischen Diffusionsprozesse numerisch robust und mit Standardmethoden der partiellen und stochastischen Differentialgleichungstheorie analysierbar sind [11]. So ergibt sich die zeitliche Änderung der relativistischen Energie eines Teilchens aus der Gleichung für den Impuls durch direkte Anwendung des stochastischen Differentialkalküls [12], der es auch erlaubt, stochastische Differentialgleichungen per Lorentz-Transformation in bewegte Bezugssysteme zu übertragen. Außerdem können, analog zur deterministischen relativistischen Mechanik, relativistische Langevin-Gleichungen bezüglich der Eigenzeit des Brownschen Teilchens reparametrisiert werden. Solch invariante Parametrisierungen erweisen sich als vorteilhaft, wenn man quantenmechanische Zerfallsprozesse berücksichtigen oder Diffusions-

3) In höheren Raumdimensionen ist dies i. A. nicht möglich.

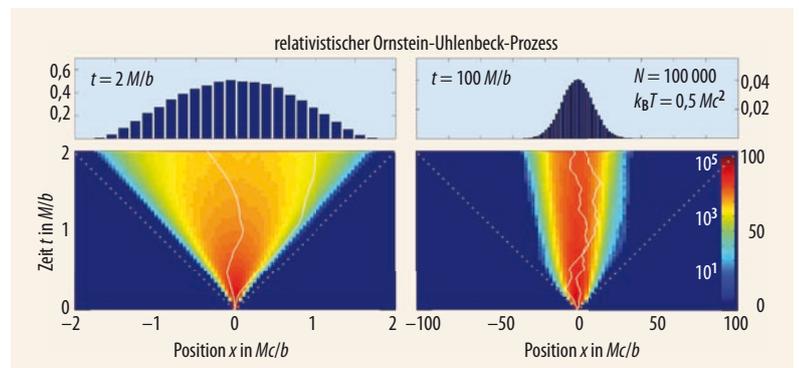


Abb. 2 Durch Gl. (5) beschriebene relativistische Brownsche Teilchen verlassen den Lichtkegel nicht. Bei großen Zeiten nähert sich die Wahrscheinlichkeitsdichte der Lösung der klassischen Diffusionsgleichung, die stationäre Geschwindigkeitsverteilung unterscheidet sich jedoch stark von der nichtrelativistischen Maxwell-Verteilung (Abb. 1).

4) Ein analoges Resultat erzielte bereits 1923 der britische Astrophysiker Arthur Eddington.

effekte in starken Gravitationsfeldern im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie modellieren möchte [13]. Im letzteren Fall beschreiben die entsprechend verallgemeinerten stochastischen Differentialgleichungen Diffusionen auf dem Tangentialbündel der zugrundeliegenden Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit. Aufgrund ihrer engen Verbindung mit Differentialoperatoren und den geometrischen Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten eröffnen relativistische Diffusionsprozesse zudem neue Wege zum Studium von Raum-Zeit-Singularitäten [13].

Praktisch gesehen bieten sich relativistische Diffusionsmodelle speziell dann als einfache phänomenologische Alternative an, wenn exaktere quantenfeldtheoretische Beschreibungen [16] von hochenergetischen Thermalisierungs- und Transportprozessen zu komplex sind. Insbesondere lassen sich relativistische Langevin-Gleichungen auch als linearisierte Teilchendarstellungen von Boltzmann-Gleichungen [14] interpretieren, und sie haben sich in dieser Form bei der Modellierung von Schwerionenexperimenten bewährt [15]. Im Hinblick auf zukünftige Anwendungen ist zu erwarten, dass ähnliche Methoden auch nützlich sein könnten, um Transportvorgänge in quasi-relativistischen Festkörpersystemen wie Graphen zu beschreiben [17].

## Relativistische Thermodynamik

Während Diffusionsmodelle darauf abzielen, Nichtgleichgewichtsprozesse zu beschreiben, hat sich rück-

blickend bereits die Suche nach einer akzeptablen relativistischen Gleichgewichtsthermodynamik [5] als konfliktreich erwiesen – insbesondere die Frage nach der „korrekten“ Lorentz-Transformation der Temperatur. Das Streben nach einer relativistisch konsistenten Thermodynamik ist dabei wohl weniger durch praktische Notwendigkeit diktiert, da sich viele relevante Probleme mittels kinetischer bzw. hydrodynamischer Theorien detaillierter behandeln lassen [18, 19]. Hauptmotivation scheint vielmehr die grundsätzliche Fragestellung, ob und in welcher Form sich vertraute Konzepte wie Temperatur oder thermisches Gleichgewicht sinnvoll in die Relativitätstheorie einbetten lassen. Die ersten Arbeiten zur speziell relativistischen Thermodynamik publizierten 1906/07 Planck und Einstein selbst. Beide kamen dabei (nicht ganz unabhängig voneinander) zu dem Schluss, dass, ähnlich zur Längenkontraktion, ein bewegter Körper kühler erscheinen sollte. Dem widersprach 1963 der deutsche Physiker Heinrich Ott. Er folgte, dass sich die Temperatur eines bewegten Körpers erhöhen müsse.<sup>4)</sup> Dies führte in den darauffolgenden Jahrzehnten zu einer intensiven Debatte, in deren Verlauf u. a. van Kampen und Landsberg alternative Zugänge vorschlugen, die einen geschwindigkeitsunabhängigen (skalaren) Temperaturbegriff ermöglichen.

Genauer betrachtet lassen sich die scheinbaren Widersprüche zwischen den konkurrierenden Formalismen damit erklären, dass in der Relativitätstheorie Konzepte wie Gleichzeitigkeit und Wärme an Eindeutigkeit verlieren. Der erste Aspekt hat zur Folge, dass für ein

## ZUSTANDSGRÖSSEN, SYMMETRIEN UND HYPERFLÄCHEN

Die Thermodynamik beschreibt ausgedehnte makroskopische Systeme mit wenigen ausgezeichneten Zustandsgrößen. Dafür eignen sich Erhaltungsgrößen bzw. Parameter, die fundamentale Symmetrien bzw. deren Brechung [20] quantifizieren, wie Gesamtenergie und -impuls (Invarianz unter Zeit- bzw. Raumtranslation), oder Volumen (Brechung der räumlichen Translationsinvarianz). In der nichtrelativistischen Newtonschen Physik sind diese Größen für abgeschlossene Teilsysteme eindeutig definiert; kennt man z. B. die räumliche Energiedichte des Systems zur Zeit  $t$  im Inertialsystem  $\Sigma$ , so ergibt sich die Gesamtenergie durch Integration über den gesamten Raum (angenommen, die Dichte verschwindet außerhalb der System-

grenzen). Bezüglich der (1+3)-dimensionalen Raum-Zeit entspricht dies einer Integration über eine dreidimensionale raumartige Hyperfläche zum konstanten Zeitpunkt  $t$ . Ist das System zudem stationär in  $\Sigma$ , so hängen die Werte der Zustandsgrößen nicht von der Wahl des Zeitpunkts  $t$  ab. Da sich in der Newtonschen Physik die „Zeit“ beim Übergang zwischen zwei gleichförmig zueinander bewegten Inertialsystemen  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  nicht ändert, sind die Ergebnisse thermodynamischer Messungen in  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  durch Galilei-Transformationen verbunden.

Im relativistischen Fall, wo die Bezugssysteme  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  durch Lorentz-Transformationen verknüpft sind, ist die Situation komplizierter. Zwar lassen sich globale Zustandsgrößen wie

Teilchenzahl, Gesamtenergie oder -impuls auch hier prinzipiell durch Integration entsprechender Tensordichten über geeignete dreidimensionale Hyperflächen konstruieren – letztere sind jedoch nicht mehr eindeutig festgelegt, da die Bedingungen „bei konstanter Zeit in  $\Sigma'$ “ und „bei konstanter Zeit in  $\Sigma$ “ nicht äquivalent sind. Genügen die relevanten Tensordichten lokalen Erhaltungssätzen im gesamten Raum-Zeit-Volumen, so ist dies unproblematisch, da dann die entsprechenden Integrale nicht von der gewählten raumartigen Hyperfläche abhängen. Sind jedoch lokale Erhaltungssätze verletzt, dann sind integrierte Zustandsgrößen, die auf nicht-äquivalenten Hyperflächen basieren, i. A. nicht durch Lorentz-Transformation verknüpft. Im stark vereinfachten Beispiel eines abgeschlossenen homogenen idealen Gases sind Teilchenstromdichte und Entropiestromdichte generell erhalten [6], d. h. sowohl stationäre als auch bewegte Beobachter messen die gleiche Gesamtteilchenzahl und -entropie unabhängig davon, ob die Messungen bei konstanter Zeit  $t$  oder  $t'$  durchgeführt werden. Im Gegensatz dazu ist die lokale Impulserhaltung für das Gas an sich bei Stößen mit „Wänden“ oder externen (impulsabsorbierenden) Kraftfeldern verletzt, d. h. Messungen des kinetischen Gesamtimpulsvektors der Gasteilchen bei konstantem  $t$  bzw. konstantem  $t'$  liefern unterschiedliche Ergebnisse (Abb. ii).

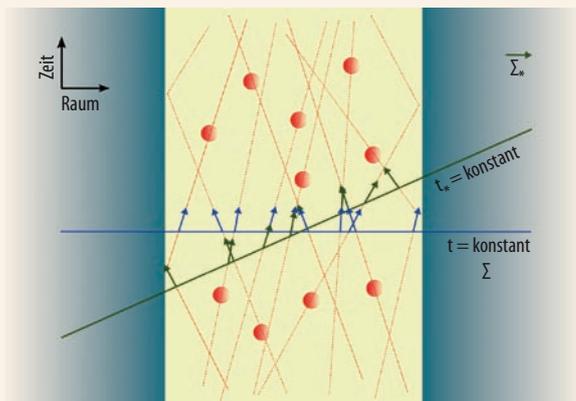


Abb. ii Summiert man die durch Pfeile repräsentierten Teilchenimpulse entlang nicht-äquivalenter simultaner Hyperflächen, die bezüglich zueinander bewegter Bezugssysteme  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  definiert sind, so ergibt sich ein unterschiedlicher Gesamtimpuls aufgrund der Wechselwirkung mit den reflektierenden Wänden (siehe unterschiedliche Richtungen der grünen und blauen Pfeile an der Rändern).

ausgedehntes Vielteilchensystem, welches in zwei gleichförmig zueinander bewegten Inertialsystemen  $\Sigma$  und  $\Sigma_*$  beobachtet wird, Aussagen wie „Gesamtimpuls des Systems in  $\Sigma$  bzw.  $\Sigma_*$ “ nicht mehr eindeutig sind; es bedarf vielmehr einer genauen Spezifizierung, entlang welcher Raum-Zeit-Hyperfläche z. B. die Einzelimpulse im System summiert werden. Ist etwa die räumliche Translationsinvarianz durch die Gegenwart von äußeren „Wänden“ gebrochen (oder allgemeiner durch beliebige einschließende externe Kraftfelder), dann macht es einen Unterschied, ob man den Gesamtimpuls zu konstanten Zeiten bezüglich  $\Sigma$  oder  $\Sigma_*$  misst – genauer gesagt, sind die jeweils erhaltenen Gesamt-Energie-Impuls-Vektoren nicht durch Lorentz-Transformationen verknüpft, da sie sich auf verschiedene Raum-Zeit-Hyperflächen beziehen (Infokasten 2 „Zustandsgrößen, Symmetrien und Hyperflächen“). Unterschiedliche Konventionen bezüglich der zeitlichen Messvorschriften für bewegte Beobachter sind ein Hauptgrund für die unterschiedlichen Temperaturtransformationsgesetze [6]. Der andere entscheidende Faktor, die Wahl der Wärmedefinition, lässt sich im Wesentlichen darauf reduzieren, ob man Wärme analog zur Energie als Null-Komponente eines Vierer-Vektors  $Q^\mu$  einführt und dann die Temperatur durch  $\delta Q^0 = T dS$  definiert oder ob man stattdessen die zugehörige skalare Wärme  $Q := U_\mu Q^\mu$  zur Temperaturdefinition heranzieht ( $U^\mu$  ist die Vierer-Geschwindigkeit des Systems,  $S$  die skalare Entropie).<sup>5)</sup> Zusammengefasst bedeutet dies, dass sich die traditionell konkurrierenden Formulierungen der relativistischen Thermodynamik nur in den Messvorschriften von Zustandsgrößen unterscheiden.

Trotz genannter Unterschiede haben die meisten traditionellen Zugänge zur speziell relativistischen Thermodynamik gemeinsam, dass sie auf simultan zu messenden Zustandsgrößen aufbauen, d. h. der Gesamtzustand des betrachteten Systems wird jeweils durch die Summe mikroskopischer Eigenschaften zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem ausgezeichneten globalen Inertialsystem charakterisiert. Dies scheint jedoch aus mehreren Gründen unbefriedigend: Aus experimenteller Sicht ist es nur schwer möglich, die Konfiguration ausgedehnter Systeme bei konstanter Zeit zu rekonstruieren, da die Signalausbreitung prinzipiell durch die Lichtgeschwindigkeit begrenzt ist. So zeigen astronomische Aufnahmen die Zustände weiter entfernter Objekte zu relativ früheren Zeitpunkten, da das von ihnen ausgesendete Licht einen längeren Weg zum Teleskop zurücklegt.

Prinzipiell ist es problematisch, simultane Zustandsgrößen festzulegen, wenn man zur Allgemeinen Relativitätstheorie übergeht. Dort sind Inertialsysteme nur noch lokal definiert, und der Begriff „Gleichzeitigkeit“ verliert für hinreichend große Systeme generell an Sinn. Es stellt sich somit die grundsätzliche Frage, wie man in diesem Fall ausgedehnte relativistische Systeme noch sinnvoll durch globale Parameter beschreiben kann [21]. Eine mögliche Alternative [6] besteht darin, nichtlokale Zustandsgrößen „fotografisch“ mit Hilfe von Lichtkegeln zu definieren (Abb. auf S. 49). Durch

die Ausbreitung von Licht festgelegte Hyperflächen sind sowohl in der Speziellen als auch der Allgemeinen Relativitätstheorie wohldefiniert – sie sind zudem für ruhende und bewegte Beobachter gleichermaßen durch fotografische Messungen zugänglich. Während unsere alltägliche nichtrelativistische Denkweise simultane Zustandsgrößen bevorzugt, erscheint aus „relativistischer Sicht“ eine fotografische Formulierung der Thermodynamik nicht nur konzeptionell, sondern auch praktisch vorteilhafter.

### Danksagung

Ich danke herzlich meinen ehemaligen Betreuern und Kollegen I. Bailleul, D. Cubero, J. Casado, J. Chluba, F. Debbasch, U. Erdmann, G.-L. Ingold, L. Schimansky-Geier, R. Sunyaev, P. Talkner und S. Weber, und ganz besonders P. Hänggi, W. Ebeling und S. Hilbert für langjährige Zusammenarbeit und Unterstützung.

### Literatur

- [1] J. Renn (Hrsg.), Einstein's Annalen Papers, Wiley-VCH, Berlin (2005)
- [2] P. Hänggi und F. Marchesoni, Chaos **15**, 026101 (2005)
- [3] E. Frey und K. Kroy, Ann. Phys. (Leipzig) **14**, 20 (2005)
- [4] J. Dunkel und P. Hänggi, Physics Reports **471**(1), 1 (2009)
- [5] G. Neugebauer, Relativistische Thermodynamik, Vieweg, Wiesbaden / Braunschweig (1981)
- [6] J. Dunkel, P. Hänggi und S. Hilbert, Nature Phys. **5**, 741 (2009)
- [7] F. Debbasch, K. Mallick und J. P. Rivet, J. Stat. Phys. **88**, 945 (1997)
- [8] J. Masoliver und G. H. Weiss, European J. Phys. **17**, 190 (1996)
- [9] J. Dunkel und P. Hänggi, Phys. Rev. E **71**, 016124 (2005)
- [10] N. G. van Kampen, Physica **46**, 315 (1970)
- [11] B. Lindner, New J. Phys. **9**, 136 (2007)
- [12] I. Karatzas und S. E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer, New York / Berlin (1991)
- [13] I. Bailleul, J. Math. Phys. **52**, 023520 (2011)
- [14] C. Cercignani und G. M. Kremer, The Relativistic Boltzmann Equation, Birkhäuser, Boston / Berlin / Basel (2002)
- [15] H. van Hees, V. Greco und R. Rapp, Phys. Rev. C **73**, 034913 (2006)
- [16] J. Berges, Sz. Borsanyi und C. Wetterich, Phys. Rev. Lett. **93**, 142002 (2004)
- [17] B. Trauzettel, Physik Journal, Juli 2007, S. 39
- [18] J. Ehlers, in: Lectures in Statistical Physics, Lecture Notes in Physics **28**, S. 78-105, Springer, Berlin / Heidelberg (1981)
- [19] I. Müller, Living Rev. Relativity **2**, 1 (1999)
- [20] H. Callen, Found. Phys. **4** (4), 423 (1974)
- [21] A. Gamba, Amer. J. Phys. **35** (2), 83 (1967)

### DER AUTOR

**Jörn Dunkel** (rechts, hier mit DPG-Präsident Wolfgang Sandner) studierte Physik und Mathematik in Berlin und Oxford. Nach Abschluss beider Studiengänge an der Humboldt-Universität und einem Jahr am Max-Planck-Institut für Astrophysik in Garching war er von 2006 bis 2008 Doktorand am Lehrstuhl von Peter Hänggi an der Universität Augsburg. Dann forschte er zwei Jahre als Postdoc am Rudolf Peierls Centre for Theoretical Physics in Oxford auf dem Gebiet der statistischen Biophysik. Seit Herbst 2010 beschäftigt er sich in der Gruppe von Raymond E. Goldstein (Cambridge) mit den physikalischen Eigenschaften von Mikroorganismen.



Fotoatelier Konvex

5) Je nach Konvention ergeben sich leicht unterschiedliche Darstellungen für die thermodynamischen Hauptsätze.