

# Dem Geld auf der Spur

Lévy Walks, Lévy Flights und ihre Verwendung in neuen epidemiologischen Modellen

Theo Geisel

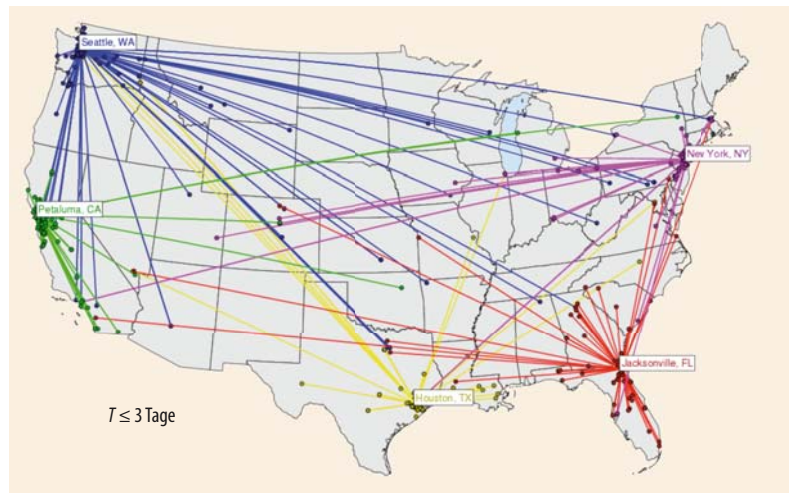
Seit ihrem ersten Auftreten in chaotischen Systemen vor mehr als zwei Jahrzehnten haben Lévy Random Walks in zahlreichen Bereichen der Physik zur Beschreibung anomaler Diffusion Verwendung gefunden. Sie sind auch geeignet, menschliche Reisebewegungen statistisch zu charakterisieren, die in Modellen zur Ausbreitung von Epidemien eine Schlüsselrolle spielen. Tracer in Form von Geldscheinen (Dollarnoten) lieferten empirische Daten, die sich mathematisch mit einer bifraktionellen Diffusionsgleichung sehr gut modellieren lassen und wesentlich präzisere Vorhersagen der geographischen Ausbreitung von Epidemien versprechen.

**P**otenzgesetze („power laws“), ausgedrückt durch mathematische Formeln, die zum Stoff der Schulmathematik gehören, spielen in vielen Bereichen der Physik eine Rolle. Sie beschreiben das universelle Verhalten am kritischen Punkt von Phasenübergängen oder am Übergang von geordneter zu chaotischer Dynamik, man findet sie im sog.  $1/f$ -Rauschen und in turbulenten Strömungen. Gemeint sind hier natürlich *inverse* Potenzgesetze insbesondere in Verbindung mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Der französische Mathematiker Paul Lévy (1886–1971) war einer der ersten, der die Eigenschaften solcher Wahrscheinlichkeitsdichten von Zufallsvariablen  $x$ ,

$$\rho(x) \sim x^{-(1+\mu)} \quad (0 \leq \mu < 2) \quad (1)$$

untersuchte. Da hier auch große Werte von  $x$  häufig vorkommen („heavy tails“), haben diese Verteilungen die Eigenschaft, dass ihre Varianz  $\langle x^2 \rangle$  (und teilweise auch ihr Mittelwert  $\langle x \rangle$ ) divergiert, wie man durch Integration leicht sieht. Im Unterschied zu einer Gauß- oder einer Exponentialverteilung, für welche die Varianz endlich ist und damit eine Skala auszeichnet, zeigen sie also Fluktuationen auf allen Skalen und zeichnen keine Skala aus. Daher nennt man sie auch *skalenfrei* – ähnlich wie man das von Phasenübergängen am kritischen Punkt sagt. Paul Lévy untersuchte diese Verteilungen insbesondere im Zusammenhang mit der allgemeinen Frage, welche Form eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zweier unabhängiger Zufallsvariablen haben muss, damit ihre Summe einer Verteilung vom gleichen Typ genügt („Lévy stable laws“).

Im Jahr 1985 versuchte ich mit meinen Doktoranden Johannes Nierwetberg und Anton Zacherl ein



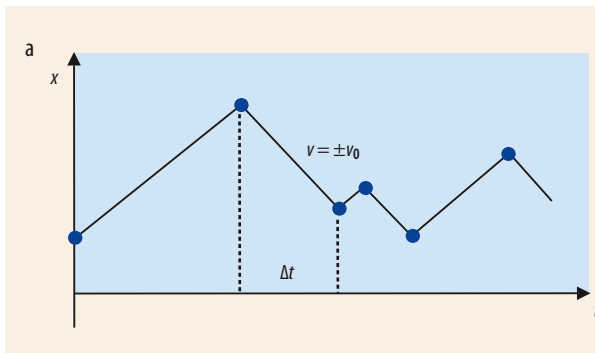
beobachtetes  $1/f$ -Rauschen zu erklären, das man in den Spannungsfluktuationen eines chaotischen Schaltkreises (unter Verwendung eines Josephson-Kontakts) gefunden hatte. Der Begriff  $1/f$ -Rauschen bezieht sich auf ein Rauschspektrum, das bemerkenswerterweise bei kleinen Frequenzen wie  $1/\omega$  divergiert. Ich begriff sehr bald, dass dieses mit einer Art Random Walk einer Variablen  $x$  verknüpft sein musste (speziell der Josephson-Phase), bei welcher der „Walker“ für eine zufällige Zeitdauer  $\Delta t$  mit konstanter Geschwindigkeit propagiert („fliegt“), für kurze Zeit eine lokale Bewegung ausführt und dann zufällig in eine andere Richtung mit gleicher Geschwindigkeit und anderer Zeitdauer  $\Delta t$  weiterfliegt (Abb. 1a). Außerdem musste besonders die Verteilung der zufälligen Flugzeiten

Anhand der Trajektorien von Geldscheinen lassen sich statistische Gesetzmäßigkeiten des Reisens erschließen [13].

## KOMPAKT

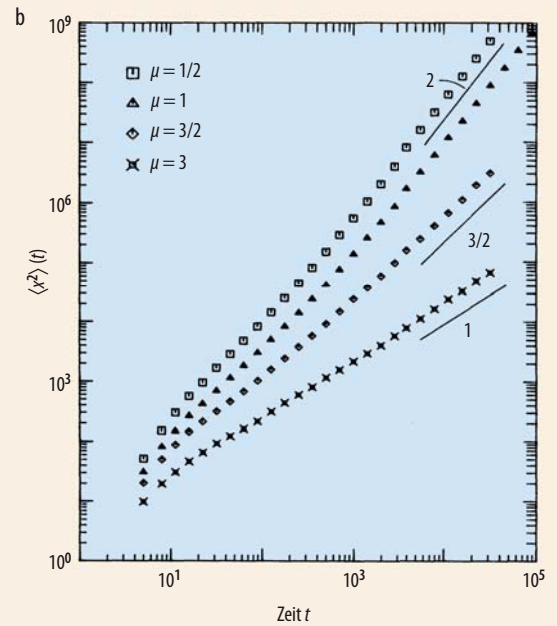
- Lévy Walks sind eine physikalisch realistische Verallgemeinerung der Random Walks, bestehend aus zufälligen Flügen, deren Flugweiten keine charakteristische Skala besitzen.
- Das mittlere Abstandsquadrat wächst bei Lévy Walks zeitlich stärker als linear („superdiffusiv“) an.
- Geldscheine als Tracer für menschliche Reisebewegungen zeigen eine Lévy-Statistik: ihre Sprungweiten sind nach einem inversen Potenzgesetz verteilt. Ihre Ausbreitung hat jedoch neben dieser superdiffusiven auch eine subdiffusive Komponente.
- Die Ausbreitung der Tracer kann durch eine bifraktionelle Diffusionsgleichung mit nur drei Parametern sehr gut beschrieben werden und zeigt universelles Skalenvverhalten.

**Prof. Dr. Theo Geisel**, Max-Planck-Institut für Dynamik und Selbstorganisation und Fakultät für Physik der Universität Göttingen, Bunsenstr. 10, 37073 Göttingen, Germany – Preisträgerartikel anlässlich der Verleihung des Gentner-Kastler-Preises 2009.



**Abb. 1** Bei einem Lévy Random Walk, wie er zuerst im Zusammenhang mit chaotischen Schaltkreisen, die einen Josephson-Kontakt enthielten, formuliert worden war [1], „fliegt“ der Walker für zufällige Zeitdauern  $\Delta t$  mit konstanter Geschwindigkeit in verschiedenen Richtungen, dazwischen führt er kurzfristig lokale Bewegungen aus (a). Die Länge der Flugstrecke ist durch die Flugzeit  $\Delta t$  bestimmt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Flugzeiten (und

damit auch der Flugweiten) folgt einem inversen Potenzgesetz (Gl. (2)) für große Argumente. Computersimulation eines Lévy Walks für verschiedene Werte des Exponenten  $\mu$  (b): Die durchgezogenen Linien zeigen die theoretische Vorhersage für das superdiffusive Anwachsen des mittleren Abstandsquadrats:  $\langle x^2 \rangle \sim t^2$  für  $\mu \leq 1$  und  $\langle x^2 \rangle \sim t^{3-\mu}$  für  $1 \leq \mu < 2$ . Für  $\mu > 2$  verläuft die Diffusion normal,  $\langle x^2 \rangle \sim t$  [1].



nach [1]

einem inversen Potenzgesetz genügen, um das 1/f-Rauschen zu reproduzieren:

$$\psi(\Delta t) \sim \Delta t^{-(1+\mu)} \quad (1 \leq \mu < 2). \quad (2)$$

Die Flugweiten  $\Delta x$  sind proportional zu den Flugzeiten  $\Delta t$  und müssen eine Verteilung der gleichen Form haben. Beide Verteilungen sind also skalenfrei. Wir entwickelten eine statistische Beschreibung zunächst auf der Basis eines sog. Continuous Time Random Walk (CTRW), die wir alsbald durch eine verbesserte Beschreibung ersetzten, und zeigten, dass das mittlere Abstandsquadrat in Abhängigkeit von dem Exponenten  $\mu$  zeitlich anwächst wie [1]

$$\langle x^2(t) \rangle \sim t^{3-\mu}, \quad (3)$$

wobei  $3 - \mu > 1$ . Da somit das mittlere Abstandsquadrat schneller anwächst als linear in der Zeit (wie bei der normalen Diffusion der Fall), bezeichnet man dieses Verhalten als Superdiffusion. Die Computersimulation zeigte, wie das mittlere Abstandsquadrat für unterschiedliche Werte von  $\mu$  anwächst (Abb. 1b). Ein ganz ähnliches CTRW-Modell haben wir kürzlich für die superdiffusive Ausbreitung von Geldscheinen verwendet, wie weiter unten beschrieben.

Ein Jahr später wurde von Shlesinger und Klafter für diese Prozesse der Begriff „Lévy Walks“ vorgeschlagen. Im Unterschied dazu wird der Begriff „Lévy Flights“ (nicht ganz unmissverständlich) verwendet für Prozesse, bei denen die Schrittweiten zwar auch einem inversen Potenzgesetz genügen, bei denen jedoch die einzelnen Schritte aus instantanen Sprüngen bestehen. #)

Abbildung 2b zeigt eine Trajektorie in zwei Dimensionen, die sowohl einem Lévy Walk als auch einem Lévy Flight entsprechen kann (je nachdem, ob die langen Schritte in endlicher Zeit oder instantan ablaufen). Im Vergleich zu einem gewöhnlichen Random Walk (Abb. 2a), bei dem die einzelnen Sprünge eine charakteristische Längenskala auszeichnen, illustriert Abb. 2b das

Konzept der Skalenfreiheit. Es kommen Schrittweiten auf allen Längenskalen, häufig auch auf großen Skalen vor. Das Modell des Lévy Walks ist sehr viel physikalischer als das des Lévy Flights (das wegen der instantanen Sprünge über beliebig große Entfernungen allein schon die spezielle Relativitätstheorie verletzt) und hat dadurch in kurzer Zeit zahlreiche Anwendungen gefunden.

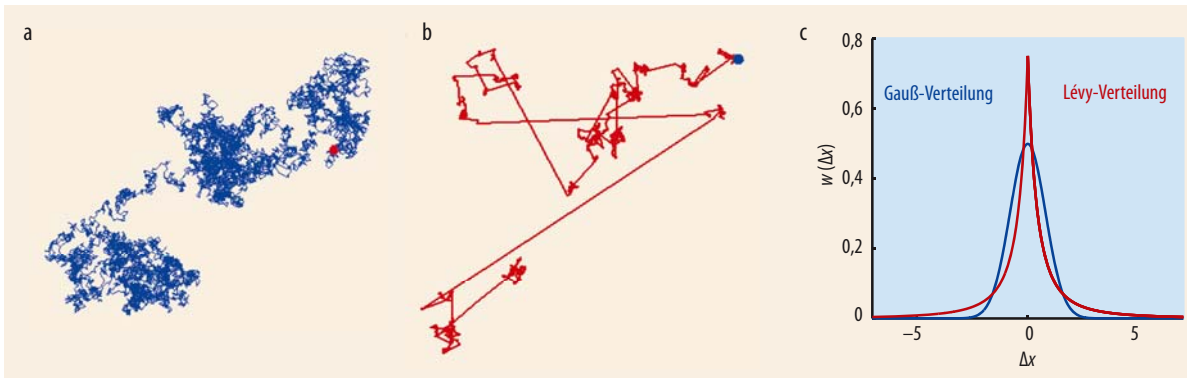
Sehr anschaulich begreifbar wurde das Phänomen in einer Arbeit [2], in der die Flugbewegung von Albatrossen bei der Nahrungssuche analysiert wurde. Die Albatrosse führen dabei sukzessive Flüge mit konstanter Geschwindigkeit aus, deren zufällige Zeitdauern Gl. (2) zu genügen schienen. Auch hier wurden diese eigentlichen Lévy Walks als Lévy Flights bezeichnet. Leider haben jedoch neuere empirische Daten diese Schlussfolgerung für die Nahrungssuche der Albatrosse nicht bestätigt, da die Verteilung der Zeitdauern die Gl. (2) letztendlich doch nicht erfüllte.

Das anomale Diffusionsverhalten nach Gl. (3) wird ermöglicht durch eine Verletzung des zentralen Grenzwertsatzes. Dieser garantiert unter recht allgemeinen Voraussetzungen (symmetrische Verteilung  $w(\Delta x)$  der individuellen Schrittweiten  $\Delta x$  mit endlicher Varianz  $\langle \Delta x^2 \rangle$ ), dass die Summe der einzelnen Schritte, d. h. der Abstand vom Ausgangspunkt, asymptotisch einer Gaußschen Normalverteilung folgt. Deren Breite wächst wie die Quadratwurzel der Schrittzahl  $N$  (bzw. der Zeit), d. h. normal diffusiv an. Dagegen hat ein inverses Potenzgesetz, das bei Lévy Walks nach Gl. (1) auch für die Flugweitenverteilung gelten muss,

$$w(\Delta x) \sim \Delta x^{-(1+\mu)}, \quad (4)$$

wie erwähnt keine endliche Varianz und verletzt somit die Voraussetzungen des zentralen Grenzwertsatzes. Nach Lévy und Khintschin gilt jedoch eine Verallgemeinerung des zentralen Grenzwertsatzes, wonach die mit  $N^{1/\mu}$  skalierte Summe der Schritte asymptotisch

#) Die Unterscheidung in Lévy Walks für flugartige Bewegungen und Lévy Flights für instantane Sprünge hat natürlich zu Missverständnissen geführt, und viele Physiker verwenden den Begriff Lévy Flights in zwischen undifferenziert auch für Lévy Walks.



**Abb. 2** Die Schrittweiten eines gewöhnlichen Random Walks in zwei Dimensionen zeichnen eine Längenskala aus (a). Trajektorie, die sowohl einen Lévy Walk

(Sprünge in endlicher Zeit) als auch einen Lévy Flight (instantane Sprünge) repräsentieren kann (b). Hier zeichnen die Flugweiten (bzw. Sprunglängen) keine

Skala aus, sie sind skalenfrei. Im Unterschied zu einer Gauß-Verteilung kommen in einer Lévy-Verteilung auch große Längenskalen häufig vor (c).

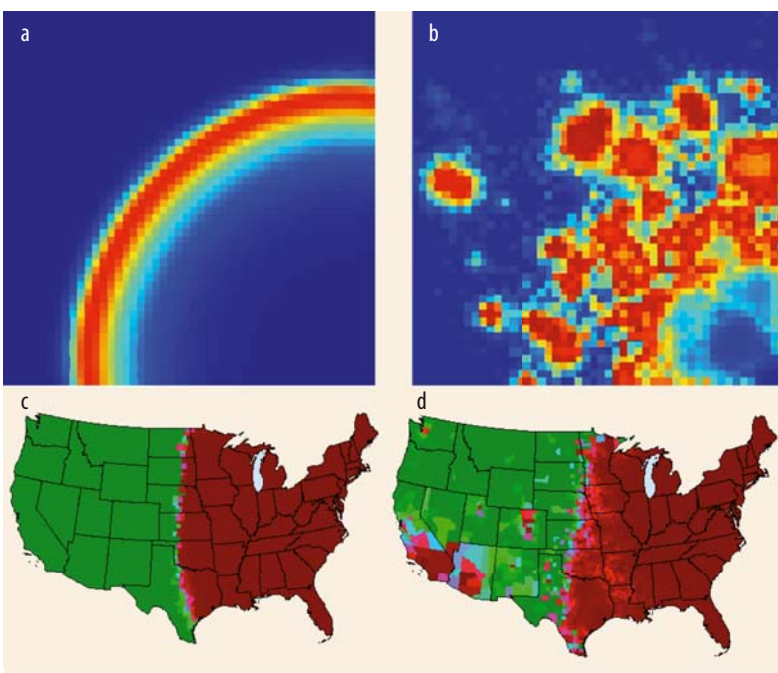
einer ähnlichen „Heavy Tail“-Verteilung folgt wie die Verteilung einzelner Schrittweiten. Dies ermöglicht in den erwähnten Fällen das superdiffusive Anwachsen des mittleren Abstandsquadrats [3].

Lévy Walks und Lévy Flights sind seither in zahlreichen physikalischen Systemen beobachtet und theoretisch beschrieben worden. Ihre tiefere Ursache, d. h. die Ursache der Heavy Tails in der Verteilung der einzelnen Flüge oder Sprünge nach Gleichungen (2) und (4), ließ sich jedoch nicht in allen Fällen erklären. In dissipativen chaotischen Systemen können Lévy Walks im Zusammenhang mit marginal stabilen Fixpunkten und Intermittenz in Erscheinung treten [1]. In chaotischen Hamilton-Systemen treten sie sogar als generisches Phänomen in ausgedehnten Systemen auf, wie zuerst am Beispiel eines konservativen Teilchens im periodischen Potential, dem klassischen Analogon eines Elektrons im periodischen Kristallpotential, gezeigt wurde [4]. Physikalisch sind solche Lévy Walks u. a. in Halbleiter-Nanostrukturen zu Tage getreten, wo sie die experimentelle Beobachtung eines negativen Hall-

Effekts in Antidot-Gittern erklären konnten [5]. Die Untersuchung von Heavy Tails in chaotischen Hamilton-Systemen ist noch heute ein aktuelles Forschungsthema, das nach wie vor offene Fragen, z. B. zur Rolle der Universalität, bietet [6]. Lévy Walks und Flights fanden sich auch bei der Teilchendisposition in turbulenten Strömungen [7], in der Dynamik von Ionen in optischen Gittern [8], in langfristigen Klimaschwankungen [9] und in den Schwankungen von Aktienkursen [10].

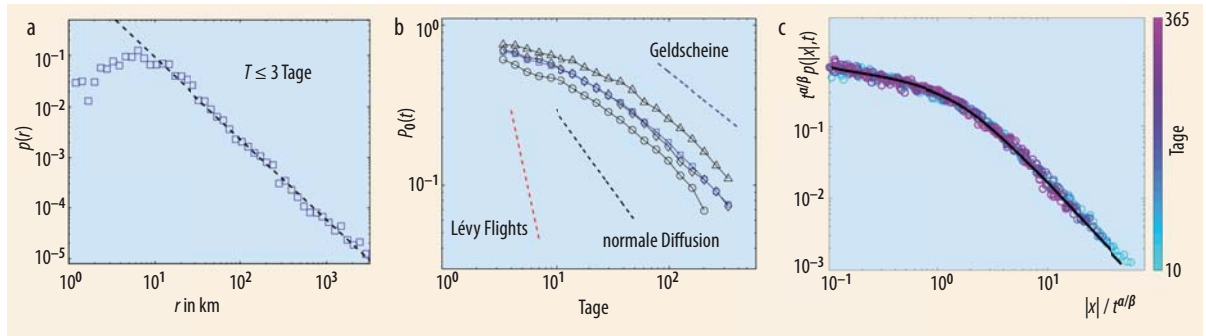
## Reisen, Geldscheine und Epidemien

Eine ganz neue Anwendung erfuhren Lévy Flights kürzlich in der Modellierung der raumzeitlichen Dynamik von Epidemien. Viele Infektionskrankheiten, die von Mensch zu Mensch übertragen werden, breiten sich durch die Reisetätigkeit aus. Die Modellierung der raumzeitlichen Dynamik verlangt daher eine möglichst gute Beschreibung der Statistik menschlichen Reisens. Es gibt Standardmodelle wie die sog. SIR-, SI- oder



**Abb. 3** Das SIR-Modell, ein einfaches epidemiologisches Modell in Form einer Reaktions-Diffusionsgleichung, zeigt Infektionsfronten, die sich ringförmig mit konstanter Geschwindigkeit ausbreiten (a). In einer superdiffusiven Variante können sich spontan neue Infektionsherde in größerer Entfernung von einem primären Herd bilden. (b). Dies zeigt sich auch in der Simulation eines superdiffusiven SI-Modells mit einer realistischen Populationsdichte der USA (d) im Unterschied zur diffusiven Variante (c).





**Abb. 4** Das Histogramm der Schrittweiten von Dollarscheinen (siehe Abb. auf S. 51) zeigt Lévy-Statistik in Form eines inversen Potenzgesetzes, Gl. (4) mit  $\mu = \beta = 0,6$  (a). Die Verweilwahrscheinlichkeit

eines Geldscheins an einem Ort zerfällt langsamer als erwartet (b). Die Häufigkeitsverteilung  $p(|x|, t)$  der Entfernungen  $|x|$  vom Ausgangsort zur Zeit  $t$  zeigt bei geeigneter Achsenskalierung einen

Datenkollaps für verschiedene Zeitintervalle (farblich kodiert) und bestätigt das vom Modell vorhergesagte Skalverhalten. [13]

SIS-Modelle, die aus Reaktions-Diffusionsgleichungen bestehen, in denen die Populationsdynamik zwischen gesunden (S), infizierten (I) und genesenen (R) Populationen mit einer diffusionsartigen Ausbreitung verknüpft ist. Sie erzeugen typischerweise raumzeitliche Muster, in denen sich eine Infektionsfront mit konstanter Geschwindigkeit ausbreitet (Abb. 3a). Damit lassen sich tatsächlich historische Epidemien wie die Pest im 14. Jahrhundert, deren Ausbreitung aus historischen Aufzeichnungen bekannt ist, beschreiben.

Diesen Modellen liegt die Annahme zu Grunde, dass Krankheitserreger zufällig von Mensch zu Mensch weitergegeben und durch die Reisetätigkeit dabei wie in einem Random Walk transportiert werden. Im Mittelalter gab es nur wenige Transportmittel, und die Strecke, die ein Reisender pro Tag zurücklegen konnte, betrug meist nur wenige Kilometer. Heutzutage können wir auf dem Luftweg in wenigen Tagen an jeden Ort der Erde gelangen, und es erscheint nicht gerechtfertigt, dies als Diffusionsprozess zu modellieren. Insbesondere findet unsere Fortbewegung auf vielen Skalen statt, als Fußgänger, Radfahrer, Autofahrer oder im Flugverkehr, und es ist somit keine Skala ausgezeichnet. Wir haben uns daher gefragt, ob Lévy Flights geeignet sind, die

Fortbewegungsstatistik besser zu modellieren, und haben ein superdiffusives SIR-Modell vorgeschlagen, das anstelle von wandernden Infektionsfronten eine eher explosionsartige und selbstähnliche Ausbreitung zeigt (Abb. 3b). Auf Basis einer realistischen Populationsdichte der USA lassen sich im Rahmen eines einfachen SI-Modells eine diffusive mit einer superdiffusiven räumlichen Dynamik vergleichen (Abb. 3c+d).

Es stellte sich natürlich die Frage, ob es eine Möglichkeit gibt, empirisch zu überprüfen, wie realistisch die Verwendung von Lévy Flights im Zusammenhang mit diesen Transportvorgängen ist. Da die verschiedensten Verkehrsmittel eine Rolle spielen, erscheint die Verwendung eines Tracers ähnlich wie in physikalischen Systemen sinnvoll. Um die menschliche Reise-statistik zu ergründen, haben wir die Bewegung von Geldscheinen verfolgt, die von Menschen transportiert werden [13]. Dazu konnten wir glücklicherweise die Daten eines Internetspiels verwenden, bei dem Amerikaner jahrelang um die Wette ihre Dollarscheine (inzwischen mehr als 170 Millionen) anhand der Seriennummer registriert haben – vermutlich nicht mit einer wissenschaftlichen Motivation.<sup>+) Das Interesse daran mag ähnlich wie bei einer Flaschenpost mit Rück-</sup>

+) Mehr Informationen dazu finden sich auf [www.wheresgeorge.com](http://www.wheresgeorge.com)

### FRAKTIONELLE ABLEITUNGEN

Seit einiger Zeit verwendet man **fraktionale Ableitungen** [11] zur Beschreibung von Lévy Walks und Flights: Ähnlich wie die normale Diffusionsgleichung das makroskopische Verhalten von normalen Random Walks beschreibt, dient die **fraktionale Diffusionsgleichung**

$$\partial/\partial t p(x, t) = D_\mu \Delta^{\mu/2} p(x, t) \quad (i)$$

zur Beschreibung von Lévy Flights auf makroskopischen Skalen [12]. Dabei steht  $p(x, t)$  für die Wahrscheinlichkeitsdichte, den Walker zum Zeitpunkt  $t$  am Ort  $x$  zu finden. Der **fraktionale Laplace-Operator**

$$\Delta^{\mu/2} p(x, t) = \int dy (p(y, t) - p(x, t)) \frac{1}{|x-y|^{1+\mu}} \quad (ii)$$

ist kein gewöhnlicher Differentialope-

rador, sondern lässt sich als Integraloperator darstellen (hier im eindimensionalen Fall).

Dieser Operator sieht zwar mathematisch komplizierter aus als die üblichen Differentialoperatoren, hat jedoch eine einfache anschauliche Bedeutung. Zusammengefasst sind Gleichungen (i) und (ii) nichts anderes als eine Mastergleichung, d. h. eine Bilanzgleichung für Wahrscheinlichkeiten: Die zeitliche Veränderung der Wahrscheinlichkeit am Ort  $x$  ergibt sich aus einem Zustrom von anderen Orten  $y$  mit der Übergangswahrscheinlichkeit  $w(x-y) = |x-y|^{-(1+\mu)}$  (Gl. (4)) und einem Abfluss vom Ort  $x$  nach anderen Orten  $y$  mit der gleichen Übergangswahrscheinlichkeit.

Mithilfe der fraktionellen Differentialoperatoren lassen sich anomale Diffusionsprozesse in kompakter Form beschreiben; auch äußere Felder lassen sich dabei leicht berücksichtigen.

Wir haben beispielsweise eine **fraktionale Fokker-Planck-Gleichung** hergeleitet, die es u. a. ermöglicht, topologische Superdiffusion von Transkriptionsfaktoren auf der gefalteten DNA zu beschreiben, die durch Sprünge zu räumlich nahen aber entlang der DNA entfernten Positionen zustande kommt [14]. Sie ist auch geeignet, sakadische Augenbewegungen beim Menschen zu modellieren, in denen wir eine Lévy-Statistik (mit  $\mu = 0,73$ ) fanden.

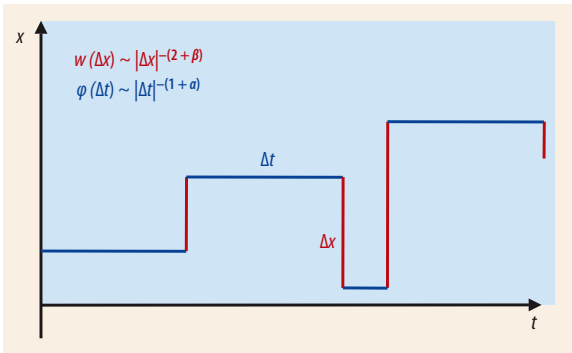


Abb. 5 In einem Modell zur Ausbreitung der Banknoten wird angenommen, dass ein Geldschein zwischen zufälligen Sprüngen über Strecken  $\Delta x$  für zufällige Wartezeiten  $\Delta t$  am Ort verweilt, beide verteilt nach inversen Potenzgesetzen.

postkarte sein. Die Spieler registrierten jeweils Ort und Zeitpunkt, an dem sie den Geldschein erhielten, so hatten wir ursprünglich mehr als 400 000 Trajektorien zur Verfügung. Allerdings kann ein Geldschein zwischen zwei Meldungen typischerweise mehrfach ausgetauscht worden und auf Reisen gegangen sein. Wir haben daher in einem ersten Schritt nur diejenigen Geldscheine berücksichtigt (immerhin mehr als 20 000), die innerhalb von drei Tagen zweimal gemeldet worden waren (siehe **Abbildung** auf S. 51). So erhielten wir das Histogramm der Schrittweiten von Dollarscheinen analog zu Gl. (4) (**Abb. 4a**). Man erkennt ein inverses Potenzgesetz mit einem Exponenten  $\beta = 0,6$  (der unabhängig von der Größe der Städte ist) über einen Bereich von zweieinhalb Größenordnungen. Es zeigt, dass die Verteilung der Sprungweiten in diesem Bereich tatsächlich skalenfrei ist ähnlich wie bei einem Lévy Flight.

Eine Analyse weiterer statistischer Größen ergab allerdings ein komplizierteres Bild. Bevor ein Geldschein auf Reisen geht, wird er mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit am gleichen Ort ausgetauscht. Die Wahrscheinlichkeit für eine erneute Meldung am gleichen Ort zerfällt als Funktion der Zeit gleichfalls nach einem inversen Potenzgesetz mit  $\alpha \approx 0,6$  (**Abb. 4b**) – allerdings erheblich langsamer als für einen Lévy Flight zu erwarten und auch langsamer als bei gewöhnlicher Diffusion. Dies ist also ein subdiffusiver Trend, der den superdiffusiven Lévy Flights entgegenwirkt. Um dieses ambivalente Verhalten zu modellieren, haben wir eine mathematische Beschreibung im Rahmen eines Continuous Time Random Walk (CTRW) entwickelt, die anschaulich in **Abb. 5** dargestellt ist. Wir nehmen an, dass ein Geldschein zufällige Sprünge über Entfernungen  $\Delta x$  ausführt und dazwischen für eine Wartezeit  $\Delta t$  am Ort verweilt. Für beide nehmen wir skalenfreie Verteilungen an  $w(\Delta x) \sim |\Delta x|^{-(2+\beta)}$  und  $\varphi(\Delta t) \sim \Delta t^{-(1+\alpha)}$  mit zunächst noch unbestimmten Exponenten  $0 \leq \alpha < 1$  und  $0 \leq \beta < 2$ . Diese Beschreibung ist ganz ähnlich zur folgenden genäherten Beschreibung eines Lévy Walks, die wir schon 1984 bei einem ersten Modellierungsversuch verwendet hatten (vgl. **Abb. 1a**). Man kann dort nämlich die Flugepisoden mit konstanter Geschwindigkeit näherungsweise ersetzen durch ein Verweilen am Ort für die gesamte Flugzeit  $\Delta t$  gefolgt von einem

instantanen Sprung über die gesamte Strecke  $|\Delta x| \sim \Delta t$ . Im Falle der Geldscheine sind allerdings die Verteilungen von  $\Delta x$  und  $\Delta t$  nicht miteinander verknüpft, sondern statistisch unabhängig.

Die Durchführung dieser Theorie führt zu zwei Vorhersagen [13]: Zum einen ist die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(\mathbf{x}, t)$ , dass sich ein Geldschein zu Zeit  $t$  am Ort  $\mathbf{x}$  befindet, durch eine bifractionelle Diffusionsgleichung gegeben, in der fraktionelle Ableitungen (Infokasten) sowohl nach dem Ort als auch nach der Zeit auftreten:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} p(\mathbf{x}, t) = D_{\alpha, \beta} \frac{\partial^\beta}{\partial |\mathbf{x}|^\beta} p(\mathbf{x}, t). \quad (5)$$

Zum anderen sagt die Theorie ein Skalenverhalten für die Lösung  $p(\mathbf{x}, t)$  voraus

$$p(|\mathbf{x}|, t) = \frac{1}{t^{\alpha/\beta}} L_{\alpha, \beta} \left( \frac{|\mathbf{x}|}{t^{\alpha/\beta}} \right), \quad (6)$$

wobei  $L_{\alpha, \beta}(|\mathbf{x}|/t^{\alpha/\beta})$  eine universelle Skalenfunktion ist, die nur von dem Verhältnis  $|\mathbf{x}|/t^{\alpha/\beta}$  abhängt, und zur Vereinfachung für die Verteilung des Abstands  $|\mathbf{x}|$  die gleiche Bezeichnung  $p(|\mathbf{x}|, t)$  verwendet wurde. Ob diese Vorhersage zutrifft, lässt sich mit einem unabhängigen Datensatz verifizieren. In **Abb. 4a**, die den Exponenten  $\beta$  zu 0,6 festlegt, wurde nur ein reduzierter Datensatz mit den kurzzeitigen Trajektorien (über 1 bis 3 Tage) verwendet. In ähnlicher Weise kann der Wert des Exponenten  $\alpha$  aus **Abb. 4b** zu 0,6 bestimmt werden. Da  $p(|\mathbf{x}|, t)$  nur die Häufigkeit beschreibt, dass ein Geldschein sich zum Zeitpunkt  $t$  im Abstand  $|\mathbf{x}|$  befindet, kann der volle Datensatz auch über lange Zeitintervalle zur Verifizierung verwendet werden. Dabei ist es unerheblich, ob der Schein über mehrere nicht gemeldete Sprünge dort angekommen ist. Durch die geeignete Skalierung von Abszisse und Ordinate in **Abb. 4c** zeigt der sog. Datenkollaps für verschiedene Zeitintervalle, dass die Vorhersage, Gl. (6), empirisch recht gut erfüllt ist. Die schwarze durchgezogene Linie entspricht der analytischen Berechnung von  $L_{\alpha, \beta}(|\mathbf{x}|/t^{\alpha/\beta})$  und kann die empirischen Ergebnisse sehr gut beschreiben. Dies ist umso erstaunlicher, wenn man bedenkt, dass das Modell nur die drei Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $D_{\alpha, \beta}$  zur Verfügung hat, um ein sehr komplexes Reiseverhalten zu beschreiben, das die verschiedensten Transportmittel über ganz verschiedene räumliche Skalen beinhaltet. In Anbetracht des ambivalenten super-/subdiffusiven Prozesses stellte sich schließlich die Frage, ob das superdiffusive oder das subdiffusive Verhalten überwiegt. Die Antwort liefert Gl. (6). Das mittlere Abstandsquadrat divergiert wie  $\langle x^2(t) \rangle \sim t^{2\alpha/\beta}$ , was wegen  $\alpha = \beta$  eine superdiffusive Ausbreitung wie  $\langle x^2(t) \rangle \sim t^2$  („ballistisch“) bedeutet.

Sowohl dieses Modell als auch die empirischen Daten versprechen wesentlich präzisere Vorhersagen zur geographischen Ausbreitung von Epidemien. Aus den empirischen Daten lässt sich direkt auf die Intensität des Reiseverkehrs zwischen zwei verschiedenen Orten in den USA schließen. Die bifractionelle Diffusionsgleichung mit ihren universellen Exponenten erlaubt es, den Reiseverkehr auch in solchen Ländern zu modellieren, in denen empirische Daten nicht vorliegen.

Ehemalige Mitglieder unserer Arbeitsgruppe haben kürzlich in den USA die empirischen Daten in der Tat erfolgreich nutzen können, um dort den Verlauf der Schweinegrippe vorherzusagen.

\*

Ich danke allen früheren Mitarbeitern, die an diesen Arbeiten beteiligt waren, insbesondere Dirk Brockmann und Lars Hufnagel, für die im letzten Teil behandelten Arbeiten zur Anwendung in epidemiologischen Modellen und zur Tracerdiffusion von Geldscheinen.

#### Literatur

- [1] T. Geisel, J. Nierwetberg und A. Zacherl, Phys. Rev. Lett. **54**, 616 (1985)
- [2] G. M. Viswanathan et al., Nature **381**, 413 (1996)
- [3] J.-P. Bouchaud und A. Georges, Phys. Rep. **195**, 127 (1990)
- [4] T. Geisel, A. Zacherl und G. Radons, Phys. Rev. Lett. **59**, 2503 (1987)
- [5] R. Fleischmann, T. Geisel und R. Ketzmerick, Europhys. Lett. **25**, 219 (1994)
- [6] G. Cristadoro und R. Ketzmerick, Phys. Rev. Lett. **100**, 184101 (2008)
- [7] O. Cardoso und P. Tabeling, Europhys. Lett. **7**, 225 (1988); T. Solomon, E. Weeks und H. Swinney, Phys. Rev. Lett. **71**, 3975 (1993); A. L. Porta et al., Nature **409**, 1017 (2001)
- [8] H. Katori, S. Schlipf und H. Walther, Phys. Rev. Lett. **79**, 2221 (1997)
- [9] P. D. Ditlevsen, Geophys. Res. Lett. **26**, 1441 (1999)

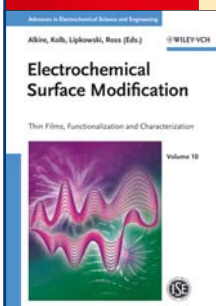
- [10] P. Gopikrishnan et al., Phys. Rev. E **60**, 5305 (1999)
- [11] R. Hilfer (Hrsg.), Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore (2000)
- [12] R. Metzler und J. Klafter, Phys. Rep. **339**, 1 (2000)
- [13] D. Brockmann, L. Hufnagel und T. Geisel, Nature **439**, 462 (2006)
- [14] D. Brockmann und T. Geisel, Phys. Rev. Lett. **91**, 048303 (2003)

#### DER AUTOR

**Theo Geisel** studierte Physik in Frankfurt und Regensburg und war nach Postdoc-Aufenthalten und einer Zeit als Heisenberg-Stipendiat Professor in Würzburg und Frankfurt. Seit 1996 ist er Professor für Theoretische Physik an der Universität Göttingen und zugleich Direktor am Max-Planck-Institut für Dynamik und Selbstorganisation. Er gründete und leitet das Bernstein Center for Computational Neuroscience (BCCN) Göttingen, in seiner Abteilung initiierte er verschiedene musikalische Aktivitäten von Klassik bis Jazz. Für seine Beiträge zur nichtlinearen Dynamik mit Anwendungen u. a. auf Halbleiter-Nanostrukturen und in den theoretischen Neurowissenschaften wurde er 1994 mit dem Leibniz-Preis ausgezeichnet.



## Wiley-VCH BOOK SHOP

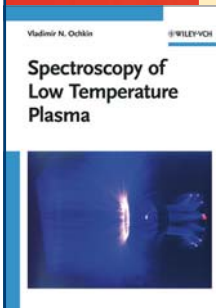


### Electrochemical Surface Modification

Thin Films, Functionalization and Characterization

In-depth data on the link between electrochemistry and the morphology of thin films and surfaces. The four sections cover nanoscale dielectric films, superconformal film growth, catalytic properties of transition metal macrocycles, and synchrotron techniques in electrochemistry.

360 pp, cl, € 149.00  
ISBN: 978-3-527-31419-5



### Spectroscopy of Low Temperature Plasma

Written by a distinguished scientist and experienced author, this up-to-date work comprehensively covers both current methods as well as new techniques and applications. With numerous appendices containing indispensable reference data for plasma spectroscopy.

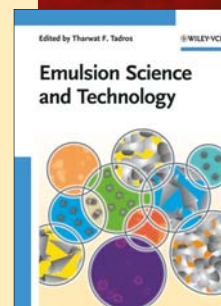
630 pp, cl, € 159.00  
ISBN: 978-3-527-40778-1

You can order online via <http://www.wiley-vch.de>  
Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA · POB 10 11 61 · D-69451 Weinheim, Germany  
Phone: 49 (0) 6201/606-400 · Fax: 49 (0) 6201/606-184 · E-Mail: [service@wiley-vch.de](mailto:service@wiley-vch.de)

### T. F. Tadros (ed.) Emulsion Science and Technology

Highlighting recent developments as well as future challenges, this book covers a wealth of topics from Nanoparticles Synthesis to Nanocomposites to Cosmetic Emulsions. Essential guide for those involved in Formulations Technology.

344 pp, cl, € 119.00  
ISBN: 978-3-527-32525-2



### M. Weidemüller / C. Zimmermann (eds.) Cold Atoms and Molecules Concepts, Experiments and Applications to Fundamental Physics

What happens when a gas of atoms or molecules becomes increasingly cold? This textbook is a thorough introduction to the vast field of quantum gases, with leading scientists renowned for their pedagogical excellence describing the basic concepts and current state of the topic.

400 pp, pr, € 69.00  
ISBN: 978-3-527-40750-7

