

■ Zitternd in der Falle

Die bereits 1930 von Erwin Schrödinger vorhergesagte Zitterbewegung eines freien relativistischen Teilchens lässt sich mit einem einzelnen gefangenen Ion simulieren.

Wie lassen sich die Eigenschaften eines Systems verstehen, das sich dem Experiment „verweigert“, z. B. dadurch, dass sich seine Parameter nicht experimentell kontrollieren lassen? Eine effiziente und weit verbreitete Antwort kann darin bestehen, das System numerisch zu simulieren. Häufig verhindern jedoch begrenzte Rechenkapazität und limitierter Speicherplatz, das System getreu digital nachzubilden. Dies gilt insbesondere für quantenmechanische Vielteilchensysteme, bei denen die Zahl der möglichen Systemzustände exponentiell mit der Teilchenzahl anwächst. In solchen Fällen können Quantensimulationen neue Einblicke liefern. Dabei simuliert ein Quantensystem, das experimentell zugänglich ist und sich kontrollieren lässt, ein anderes. In Innsbruck ist es Rainer Blatt, Christian Roos und Mitarbeitern nun gelungen, die extrem schnelle Zitterbewegung eines freien, relativistischen Elek-

trons mithilfe eines Ions in einer Falle zu simulieren [1]. Ein direkter Nachweis dieser 1930 von Erwin Schrödinger vorhergesagten Bewegung steht bislang noch aus.

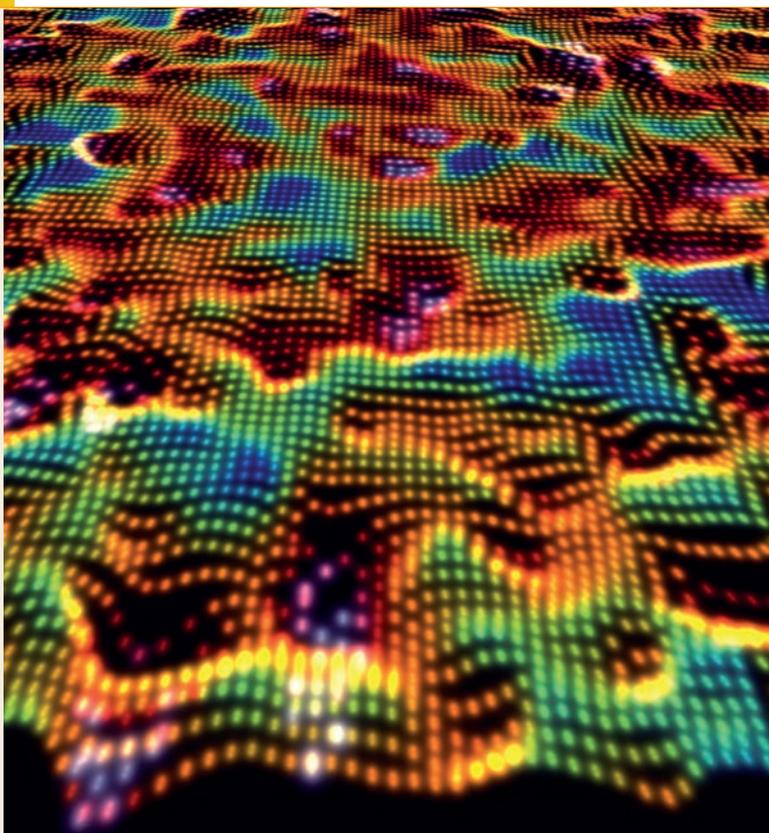
In den späten 1920er-Jahren er sann Paul Dirac eine Gleichung, die Quantenmechanik und Spezielle Relativitätstheorie vereint und das quantenmechanische Verhalten von Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ beschreibt. Bereits die nicht-relativistische Quantenmechanik sagt Phänomene vorher, die sich schwerlich mit unserer klassischen Wahrnehmung der Welt in Einklang bringen lassen: Dazu gehören z. B. quantenmechanische Überlagerungszustände, bei denen ein Teilchen gleichzeitig verschiedene Raumgebiete besetzt. Weitere verblüffende Phänomene ergeben sich aus der Dirac-Gleichung. So postulierte Dirac bei der Interpretation der Lösungen seiner Gleichung ein Antiteilchen des Elektrons – das Positron, das kurz danach entdeckt wurde und

heute routinemäßig z. B. der medizinischen Bildgebung dient. Andere vorhergesagte Konsequenzen aus der Dirac-Gleichung entzogen sich jedoch einer experimentellen Überprüfung, insbesondere Schrödingers Zitterbewegung, deren Ursache die Interferenz von Teilchenzuständen ist, die mit positiver und negativer Energie assoziiert werden. Diese Bewegung eines kräftefreien Teilchens steht im eklatanten Gegensatz zum zweiten Newtonschen Gesetz der klassischen Mechanik. Für ein freies Elektron liegt die Amplitude der Zitterbewegung im Bereich von 10^{-4} nm und die Frequenz bei 10^{21} Hz – Größenordnungen, die für eine experimentelle Beobachtung kaum zugänglich sind.

Eine relativistische Verallgemeinerung der Schrödinger-Gleichung macht es notwendig, die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ zu einem Spinor mit vier Komponenten zu erweitern, die Teilchen mit positiver und negativer Energie und jeweils zwei

FRAKTALE IN DER QUANTENWELT

Fraktale Muster kennt man z. B. von Küstenlinien, wo sich auf jeder Längenskala ähnliche Strukturen zeigen. Doch auch in der Quantenwelt können sich Fraktale offenbaren. Das haben Ali Yazdani von der Universität Princeton und seine Mitarbeiter gezeigt. Dazu haben sie mit Mangan dotiertes Galliumarsenid ($\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$) mit einem Rastertunnelmikroskop untersucht, das die Verteilung der Elektronenwellen auf der Oberfläche abbildet. Der Halbleiter GaMnAs gilt wegen seiner ferromagnetischen Eigenschaften als vielversprechendes Material für die Spintronik. Ziel der Physiker war es zu untersuchen, wie das GaAs durch die Mn-Dotierung magnetisch wird und sich von einem Isolator zu einem metallischen Leiter wandelt. Im Übergangsbereich beobachteten sie ein komplexes, fraktalähnliches Muster, in dem die Elektronen wie bei einem Flickenteppich verteilt sind – ein Muster, das sich auch auf kleineren Längenskalen wiederholt. Im Bild wächst die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen auf der Oberfläche von violett über blau, grün bis orange und rot. A. Richardella et al., Science 327, 665 (2010)



Roushan/Yazdani, Princeton University

Spineinstellungen beschreiben. Betrachtet man jedoch ein Teilchen in nur einer statt drei räumlichen Dimensionen, so reduziert sich der Hamilton-Operator H_D in der Dirac-Gleichung $i\hbar\partial_t\psi(x,t) = H_D\psi(x,t)$ auf eine 2×2 -Matrix, so dass eine zweikomponentige Wellenfunktion ausreicht [2]. Für ein freies Teilchen lautet der Hamilton-Operator

$$H_D = \begin{pmatrix} mc^2 & cp \\ cp & -mc^2 \end{pmatrix},$$

mit der Masse m , dem Impulsoperator p und der Lichtgeschwindigkeit c . Er besitzt positive wie negative Eigenwerte [2].¹⁾ Die allgemeine Lösung der Dirac-Gleichung ist eine Überlagerung der dazugehörigen Eigenfunktionen mit Koeffizienten, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind.

Wählt man den auch in der nicht-relativistischen Quantenmechanik üblichen Ortsoperator und betrachtet die Zeitentwicklung seines Erwartungswertes, so enthält

dieser – selbst für ein freies Teilchen – zusätzlich zu einem in der Zeit linearen Term einen oszillierenden Term – die Zitterbewegung. Diese Oszillation tritt nur für Überlagerungszustände auf, die sowohl Eigenfunktionen mit positiver als auch mit negativer Energie enthalten; bei Zuständen mit rein positiver oder rein negativer Energie verschwindet sie hingegen.

Die Kunst der Quantensimulation liegt darin, das System, über das wir etwas lernen wollen, durch ein System zu ersetzen, mit dem wir experimentieren können, und zwar so, dass sich die Hamilton-Operatoren beider Systeme aufeinander abbilden lassen [3–5]. Im Experiment der Innsbrucker Physiker bedeutet dies, dass zwei interne Energie-Eigenzustände eines $^{40}\text{Ca}^+$ -Ions die Zustände positiver und negativer Energie des Dirac-Teilchens verkörpern; die Position und der Impuls des Ions in einem stark anisotropen, effektiv eindimensionalen Fallenpotential simulieren

Position und Impuls des freien Dirac-Teilchens. Um den 1+1-dimensionalen Dirac-Hamilton-Operator H_D zu reproduzieren, bestrahlen die Experimentatoren das Ion mit zwei Laserlichtstrahlen, welche Übergänge zwischen den Energie-Eigenzuständen anregen und gleichzeitig die eindimensionale Bewegung des Ions antreiben. Der hieraus resultierende Hamilton-Operator H_D^{sim} hat die gleiche Gestalt wie H_D , wobei nun auf den Nicht-Diagonalplätzen dieser 2×2 -Matrix ein Term steht, der proportional zu $E\cdot p$ ist. Hierbei ist E die effektive Amplitude des Laserlichtfeldes. Der unmittelbare Vergleich von H_D^{sim} mit H_D zeigt also, dass die Experimentatoren durch Variation von E eine effektive Lichtgeschwindigkeit c' einstellen können. Die Diagonalelemente von H_D^{sim} (d. h. $\pm m'c'^2$) hängen außerdem von der Verstimmung des Laserlichtfeldes gegenüber dem atomaren Übergang ab, sodass sich durch Variation dieser Verstimmung (bei festgehaltenem

1) Die zu den negativen Eigenwerten gehörenden Zustände werden üblicherweise als Antiteilchen mit positiver Energie interpretiert.

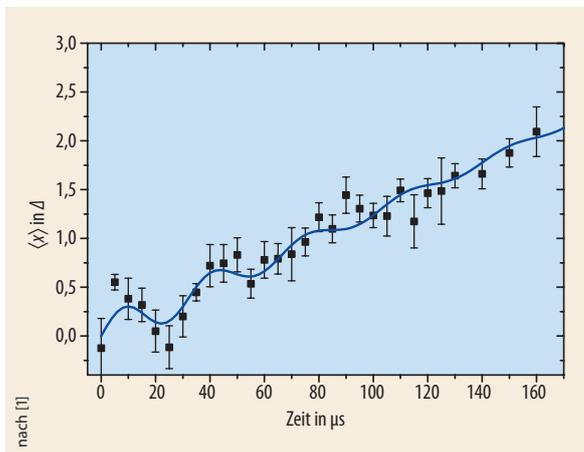


Abb. 1 Ein Ion, das sich in einer Überlagerung aus zwei internen Zuständen befindet, die positiver und negativer Energie beim relativistischen Elektron entsprechen, führt eine Zitterbewegung aus, wie der gemessene Erwartungswert des Ortsoperators $\langle x \rangle$ zeigt. Für anwachsende Zeit läuft die Überlagerung räumlich auseinander und die Oszillation verschwindet. Die Größe Δ hängt von verschiedenen experimentellen Parametern ab.

c') auch die effektive Masse m' des simulierten Dirac-Teilchens verändern lässt.

Für ein Ion, das anfänglich mit verschwindendem mittleren Impuls präpariert wurde, und bei welchem die internen Zustände mit gleich großen Koeffizienten überlagert sind (entsprechend einer Überlagerung aus Zuständen mit positiver und negativer Energie des Dirac-Teilchens), beobachten die Innsbrucker Physiker in der Tat eine quasi-periodische Zitterbewe-

gung mit einer Frequenz von etwa 10 bis 80 kHz – ein im Experiment gut zugänglicher Bereich. Bei einer Überlagerung, in der sich die Zustände mit positiver und negativer Energie in entgegengesetzte Richtung bewegen, verschwindet die Zitterbewegung hingegen, sobald diese Anteile räumlich nicht mehr überlappen (Abb. 1).

Diese Ergebnisse bestätigen, dass in der Tat die Interferenz zwischen Zuständen, die mit positiver und negativer Energie assoziiert sind, für die Zitterbewegung verantwortlich ist. Ändert man die effektive Masse bei konstantem Impuls, so verschwindet die Zitterbewegung sowohl im nichtrelativistischen als auch im ultrarelativistischen Grenzfall (große bzw. kleine effektive Masse), während sie im Regime dazwischen eindeutig zu sehen ist. Aufgrund der geringen Amplitude der Zitterbewegung erfordert es das Experiment, die Position des Ions mit einer Präzision von wenigen Nanometern zu bestimmen. Die Autoren erzielen diese Präzision, indem sie die Ionenbewegung mit einer Sequenz von Laserpulsen auf die internen Zustände abbilden, die sich über die Detektion von gestreutem Laserlicht messen lassen.

Die Beobachtung der Zitterbewegung ist beispielhaft dafür, wie ein Quantensystem mit experi-

mentell sehr gut kontrollierbaren Freiheitsgraden dazu dienen kann, die Dynamik eines anderen Systems nachzustellen. Dabei ist es möglich, Parameter zu variieren, die im simulierten System selbst nur schwer oder gar nicht zugänglich wären (z. B. die Masse eines Elementarteilchens). Dies ist ein wichtiger Fortschritt auf dem Weg, mit Quantensimulationen auch jenseits der Quanteninformation neue Einsichten zu erlangen. So können gefangene Ionen, neutrale Atome, Suprafluide oder optische Felder unser Verständnis z. B. der relativistischen Quantenmechanik oder von astrophysikalischen Prozessen vorantreiben. Darüber hinaus kann die Simulation von Vielteilchen-Phänomenen mit neutralen Atomen dabei helfen, offene Fragen der Festkörperphysik zu beantworten – z. B. nach dem Wesen der Hochtemperatur-Supraleitung [5, 6]. Gleichmaßen ist es möglich, mit den internen Zuständen von gefangenen Ionen die Wechselwirkung von Teilchenspins zu simulieren und somit Phänomene wie den Quantenmagnetismus zu untersuchen [7, 8]. Ein universeller Quantencomputer, welcher zur Berechnung nahezu beliebiger anderer Quantensysteme nützlich ist – und darüber hinaus auch ausgewählte „klassische“ numerische Probleme effizient lösen kann – bleibt zwar nach wie vor Zukunftsmusik. Spezielle Quantensimulationen, wie die hier vorgestellten, entwickeln sich aber bereits heute zu einem vielseitigen und zugleich experimentell zugänglichen wissenschaftlichen Werkzeug.

Christof Wunderlich

Prof. Dr. Christof Wunderlich, Fachbereich Physik, Universität Siegen, 57068 Siegen

KURZGEFASST

■ Platsch mit Überschall

Wenn eine Murmel ins Wasser fällt, kann ein überschallschneller Luftstrom entstehen. Diese überraschende Erkenntnis folgt aus Experimenten der Gruppe von Detlef Lohse an der Universität Twente. Um größere Kontrolle über die Parameter zu haben, ließen die Forscher keine Murmel fallen, sondern zogen eine Scheibe mit 40 Millimeter Durchmesser unter die Wasseroberfläche eines Tanks. Der entstehende Hohlraum kollabierte und wirkte wie eine Düse auf die Luft, deren Geschwindigkeit sich indirekt bestimmen ließ. Oberhalb des Wassers war der Tank mit Rauch gefüllt. Eine Hochgeschwindigkeitskamera verfolgte neben den Bewegungen des Wasser auch die der Staubpartikel. S. Gekle et al., Phys. Rev. Lett. **104**, 024501 (2010)

■ Doppelspalt aus Laserlicht

Physiker vom Heidelberger Max-Planck-Institut für Kernphysik haben ein Konzept für einen Doppelspalt ohne Materie entwickelt: Zwei extrem intensive, fast parallele Laserstrahlen würden dabei so fokussiert, dass ihre Brennpunkte nah beieinander liegen. Für einen dritten Laserstrahl aus der entgegengesetzten Richtung wirken die beiden Brennpunkte dann wie ein Doppelspalt, sodass sich auf einem Schirm dahinter das charakteristische Interferenzmuster ergeben würde. Entscheidend dafür ist, dass die Photonen der Laserstrahlen über Quantenfluktuationen miteinander wechselwirken. Dafür sind ausreichend intensive Laser nötig, die derzeit noch nicht zur Verfügung stehen. B. King, A. D. Di Piazza und C. H. Keitel, Nature Photonics **4**, 92 (2010)

- [1] R. Gerritsma et al., Nature **463**, 68 (2010)
- [2] B. Thaller, The Dirac Equation, Springer-Verlag, Berlin (1992)
- [3] R. Feynman, Int. J. Theor. Phys. **21**, 467 (1982)
- [4] S. Lloyd, Science **273**, 1073 (1996)
- [5] E. Jane et al., Quantum Information and Computation **3**, 15 (2003)
- [6] I. Bloch, J. Dalibard und W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. **80**, 885 (2008)
- [7] H. Friedenauer et al., Nature Physics **4**, 757 (2008)
- [8] M. Johanning, A. F. Varon und C. Wunderlich, J. Phys. B **42**, 154009 (2009)