

tumsprozess von den Störungen getrieben wird, die aus einem turbulenten Pfropfen herausgetragen werden, ist die Ausbreitung nicht gleichmäßig, sondern intermittent. Zudem kann die Turbulenz vorübergehend auch zerfallen, etwa auf Grund der Wechselwirkung zwischen benachbarten turbulenten Regionen (wie die Experimente in [1] zeigen). Daraus resultiert eine raum-zeitlich intermittente Folge von turbulenten Strukturen, wie sie Julius Rotta schon 1956 sehr genau dokumentiert hat [3].

Über die Arbeiten von Rotta hinausgehend haben nun David Moxey und Dwight Barkley diese raum-zeitliche Intermittenz in numerischen Simulationen in sehr langen Röhren quantitativ studiert [2]. Wie in allen Experimenten zur Rohrströmung bestimmt die dimensionslose Reynolds-Zahl $Re = DU/\nu$ das Verhalten, mit dem Durchmesser D , der mittleren Strömungsgeschwindigkeit U und der kinematischen Viskosität ν . Moxey und Barkley finden in numerischen Rechnungen in Röhren von $100 D$ Länge, dass für $Re < 2250$ ein Pfropfen lokalisiert bleibt und er sich bei $Re > 2350$ ausbreitet (Abb. 2). Überreste der Lokalisierungsmechanismen überleben insoweit,

als sich zunächst noch laminare und turbulente Gebiet abwechseln und erst ab $Re \sim 2600$ das ganze Volumen turbulent wird.

Der Wechsel von lokalisierter zu ausgedehnter Turbulenz weist auf einen Phasenübergang hin, der im Limes unendlich langer Röhren scharf werden dürfte: Unter einer kritischen Reynolds-Zahl bleibt die Turbulenz lokalisiert, und der Bruchteil des mit Turbulenz gefüllten Volumens zum Gesamtvolumen verschwindet. Oberhalb dieser kritischen Reynolds-Zahl ist der Bruchteil von Null verschieden, allerdings nicht notwendigerweise gleich eins. Nach den Rechnungen von Moxey und Barkley sowie den Beobachtungen von Rotta scheint diese kritische Reynolds-Zahl zwischen 2250 und 2350 zu liegen. Genauere Bestimmungen sind allerdings dadurch erschwert, dass es neben dem intermittenten Anwachsen einen zweiten noch nicht vollständig aufgeklärten Prozess gibt, bei dem sich ein Pfropfen in zwei aufspaltet [4].

Mit diesen Arbeiten rücken die raum-zeitlichen Aspekte turbulenter Strömungen im Transitionsbereich stärker in den Mittelpunkt des Interesses [5]. Der Wechsel von lokalisierter zu intermittenter und

schließlich raumfüllender Turbulenz zeigt Ähnlichkeiten, aber auch charakteristische Unterschiede zu Beobachtungen in anderen Muster bildenden Systemen [6, 7]. Die Beobachtungen, wie sich die Pfropfen lokal unterdrücken lassen oder sich aufgrund der räumlichen Vernetzung ausbreiten, eröffnen neue Möglichkeiten, um Turbulenz zu beeinflussen. Schließlich könnte der Übergang von lokalisierten turbulenten Regionen zur raumfüllenden Turbulenz in die Universalitätsklasse der gerichteten Perkolatation fallen [8]. Mit Spannung warten wir daher auf die Bestimmung des kritischen Punktes und der kritischen Exponenten.

Bruno Eckhardt

Prof. Dr. Bruno Eckhardt, Fachbereich Physik, Philipps-Universität Marburg, Renthof 6, 35032 Marburg

- [1] B. Hof, A. de Lozar, M. Avila, C. Tu und T. M. Schneider, *Science* **327**, 1491 (2010)
- [2] D. Moxey und D. Barkley, *Proc. Natl. Acad. Sci (NY)* **107**, 8091 (2010)
- [3] J. Rotta, *Ing. Arch.* **24**, 258 (1956)
- [4] M. Nishi, B. Ünsal, F. Durst und G. Biswas, *J. Fluid. Mech.* **614**, 425 (2008)
- [5] P. Manneville, *Phys. Rev. E* **79**, 025301(R) (2009)
- [6] F. Mellibovsky, A. Meseguer, T.M. Schneider und B. Eckhardt, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 054502 (2009)
- [7] T. M. Schneider, J. F. Gibson und J. Burke, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 104501 (2010)
- [8] H. Hinrichsen, *Adv. Phys.* **7**, 815 (2000)

■ Volle Packung

Magnetresonanzaufnahmen zeigen, dass sich Tetraederwürfel dichter als andere konvexe Körper ungeordnet packen lassen.

Wie lassen sich Objekte im Raum so anordnen, dass sie den zur Verfügung stehenden Raum optimal ausnutzen? Mathematiker bezeichnen diese Aufgabe als Packungsproblem, und ihre Lösung spielt in vielen Bereichen eine wichtige Rolle. So bestimmt die Packungsdichte maßgeblich die Porosität und die Fließigenschaften von granularen Materialien wie Sand oder Kies, und auf kleineren Skalen lassen sich schwach wechselwirkende Kolloide in guter Näherung als harte Teilchen ansehen. Im Allgemeinen unterscheidet man zwischen geordneten Packungen

(Kristallen) und ungeordneten (Gläsern). Forscher um Paul Chaikin von der New York Universität haben nun mit Experimenten gezeigt, dass Tetraeder (genauer gesagt Tetraederwürfel) von allen kongruenten konvexen Objekten die dichteste jemals beobachtete ungeordnete Packung bilden [1]. Dadurch lösen sie Ellipsoide (ellipsoide Schokolinsen) als bisherige Rekordhalter ab [2].

Traditionell konzentrieren sich Untersuchungen zum Packungsproblem auf harte Kugeln, die theoretisch und experimentell einfach zu handhaben sind. Au-

ßerdem dienen Kugelpackungen als minimalistisches Atommodell und sind daher von generellem Interesse. Ein System harter Kugeln bildet bei geringen Dichten eine fluide Phase, die unter Druck erstarrt. Aufgrund der rein abstoßenden Wechselwirkung gibt es keinen Tripelpunkt und somit keine Unterscheidung zwischen einer gasförmigen und einer flüssigen Phase. Wie von Johannes Kepler im Jahr 1611 vermutet und 1998 durch Thomas Hales bewiesen, entsteht die dichteste Kugelpackung durch Stapeln dicht gepackter Ebenen. Dabei füllen die Kugeln



Abb. 1 Lokal dichte Packungen von Tetraederwürfeln, durch Klebegummi zusammengehalten (links). Die pentagonale Dipyramide (grün), zwei sich durchdringende pentagonale Dipyramiden (rot) und das Icosaeder (blau; mit zusätzlichen



Schalen: gelb) maximieren die lokale Dichte. Mit 1500 Tetraedern in einem Fischglas lässt sich die dichte ungeordnete Packung experimentell bestimmen (rechts).

Fünf Tetraeder, angeordnet um eine gemeinsame Kante, ergeben eine pentagonale Dipyramide (Abb. 1, links). Diese füllen den Raum jedoch nicht komplett, da um die Kante zwischen den Tetraedern Lücken bleiben mit einem Gesamtwinkel von $7,36^\circ$. Benachbarte pentagonale Dipyramiden können sich durchdringen. Dabei bevorzugen Tetraeder lokal fünfzählige oder ikosaedrische Symmetrien, welche nicht mit einer Periodizität verträglich sind. Es ist somit keineswegs offensichtlich, wie sich lokale dichte Packungen zu raumfüllenden dichten Packungen fortsetzen lassen. Dies macht die Untersuchung von Tetraederpackung besonders interessant.

Bis vor kurzem war praktisch nichts über das Verhalten harter Tetraeder bekannt. So war nicht einmal klar, ob sie sich dichter als Kugeln packen lassen. Damit wären Tetraeder ein Gegenbeispiel für eine Vermutung von Ulam, die besagt, dass Kugeln in ihrer dichtesten Packung mehr freien Raum zulassen als alle anderen konvexen Körper. Es zeigte sich jedoch bald, dass dies keineswegs der Fall ist. Tetraeder lassen sich sogar deutlich dichter als Kugeln packen – auf bis zu 85,63 Prozent des zur Verfügung stehenden Raumes [5]. Forscher um Sharon Glotzer von der Universität Michigan untersuchten das Phasenverhalten von bis zu 22 000 harten Tetraeder in Monte-Carlo-Simulati-

$\pi/\sqrt{18} \approx 74,05$ Prozent des zur Verfügung stehenden Raumes aus. Die direkte „Beobachtung“ der zuvor von Lars Onsager vorhergesagten Kristallisation harter Kugeln gelang erstmals in den 1950er-Jahren mithilfe von numerischen Simulationen – damals eine Pionierleistung der Computerphysik und der erste Nachweis eines Phasenübergangs, den ohne attraktive Wechselwirkung zwischen den Kugeln nur die Entropie treibt.

Werden harte Kugeln schnell komprimiert, dann lässt sich die Ausbildung eines Kristallkeims verhindern. Stattdessen verbleiben die Kugeln in einer dichten ungeordneten Packung. In Experimenten entstehen solche Packungen durch beständiges Schütteln eines mit Kugeln und einer schweren Flüssigkeit (um den Einfluss der Gravitation zu minimieren) gefüllten Behälters. Die mit dieser Methode erreichbare Dichte liegt in der Regel bei 64 Prozent. Ob es sich dabei jedoch um eine scharfe Grenze handelt, ist Gegenstand aktueller Diskussionen, da die maximale Packungsdichte von Details des Schüttelvorgangs abhängt [3]. Ein alternativer Ansatz besteht darin, das mechanische Verhalten unter Spannung zu untersuchen. Verwendet man weiche Kugeln und unterscheidet zwischen Packungen, die ohne äußere Kraftanstrengung verformt werden können, und solchen, für die dies nicht

gilt, so tritt ein scharfer Übergang auf [4]. Dieses Verhalten bleibt auch im Grenzfall harter Kugeln erhalten und kann als mathematisch präzise Definition für das Konzept einer dichten ungeordneten Packung dienen.

Alleine die Gestalt der Teilchen bestimmt das Packungsverhalten. Tetraeder sind die einfachsten und zugleich asymmetrischsten der Platonischen Körper. Aufgrund ihrer scharfen Kanten und Ecken unterscheiden sich ihre mechanischen Eigenschaften grundlegend von denjenigen harter Kugeln. So verkanten Tetraeder im Vergleich viel einfacher. Lokal dichte Packungen lassen sich leicht finden:

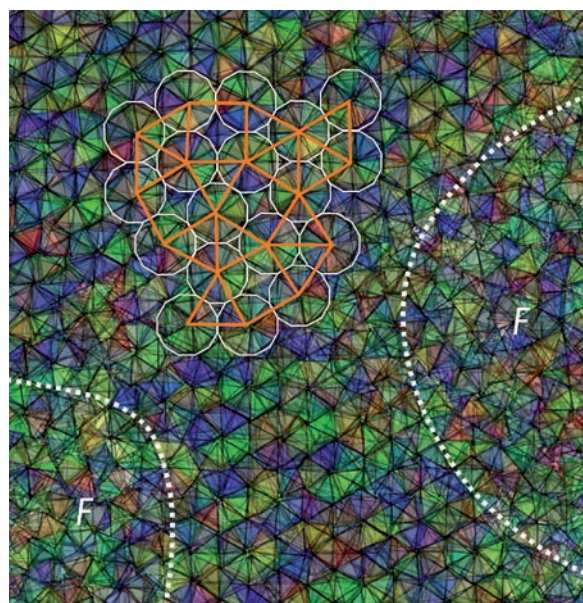


Abb. 2 Harte Tetraeder kristallisieren in einem dodekagonalen Quasikristall. Die Blickrichtung im Bild ist parallel zur zwölfzähligen Achse. Die Tetraeder sind semitransparent dargestellt. Teile des Systems befinden sich noch in der fluiden Phase (F).

onen [6]. Sie beobachten, dass die Tetraeder ab einer Packungsdichte von 50 Prozent verhältnismäßig schnell kristallisieren. Dies ist umso überraschender, da die Struktur der festen Phase und ihr Wachstum außerordentlich kompliziert sind. Kurz vor der Kristallisation bildet sich im dichten Fluid ein dreidimensionales perkolierendes Netzwerk aus pentagonalen Dipyramiden. Dieses Netzwerk organisiert sich dann während des Kristallwachstums in zweidimensionale quasikristalline Schichten um (Abb. 2). Die gefundene quasiperiodische Phase ist der bisher komplexeste rein entropisch stabilisierte Kristall.

Die Eigenschaften der dichten ungeordneten Tetraederpackung sind ebenfalls ungewöhnlich. Die in Schüttelversuchen erreichbare Packungsdichte liegt bei 76 bis 78 Prozent [6, 1]. Somit sind Tetraeder die ersten konvexen Körper, die sich selbst im ungeordneten Zu-

stand dichter als Kugeln im geordneten Zustand packen lassen. Um dies nachzuweisen, bestimmten Chaikin und sein Team die Anzahl der Tetraederwürfel, die in runde Fischgläser (Abb. 1, rechts) mit verschiedenen Radien passen, und extrapolierten zu unendlichen Radien [1]. Durch Analyse von Magnetresonanzaufnahmen konnten sie in die Packung hineinschauen und zeigen, dass benachbarte Tetraeder hauptsächlich Fläche auf Fläche angeordnet sind und die Positions- und Orientierungskorrelationen sehr viel schneller mit dem Abstand zweier Tetraeder abnimmt als für Kugeln.

Offen bleibt, inwiefern dichte ungeordnete Tetraederpackungen Ähnlichkeiten mit anderen bekannten amorphen Phasen aufweisen. So besitzen viele Gläser eine Netzwerkstruktur mit lokal tetraedrischer Ordnung. Hier bieten sich Ansatzpunkte für zukünftige Arbeiten. Eines lässt sich allerdings

jetzt schon sagen: Tetraeder sind eine gute Wahl für die Maximierung der Dichte von ungeordneten Packungen.

Michael Engel

Dr. Michael Engel,
Department of Chemical Engineering,
University of Michigan,
Ann Arbor
48109, Michigan,
USA

- [1] A. Jaoshvili et al., *Phys. Rev. Lett.* **104**, 185501 (2010)
- [2] A. Donev et al., *Science* **303**, 990 (2004)
- [3] S. Torquato, T. M. Truskett und P. G. Debenedetti, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2064 (2000)
- [4] C. S. O'Hern et al., *Phys. Rev. E* **68** 011306 (2003)
- [5] E. Chen, M. Engel und S. C. Glotzer, arXiv:1001.0586
- [6] A. Haji-Akbari et al., *Nature* **462**, 773 (2009)