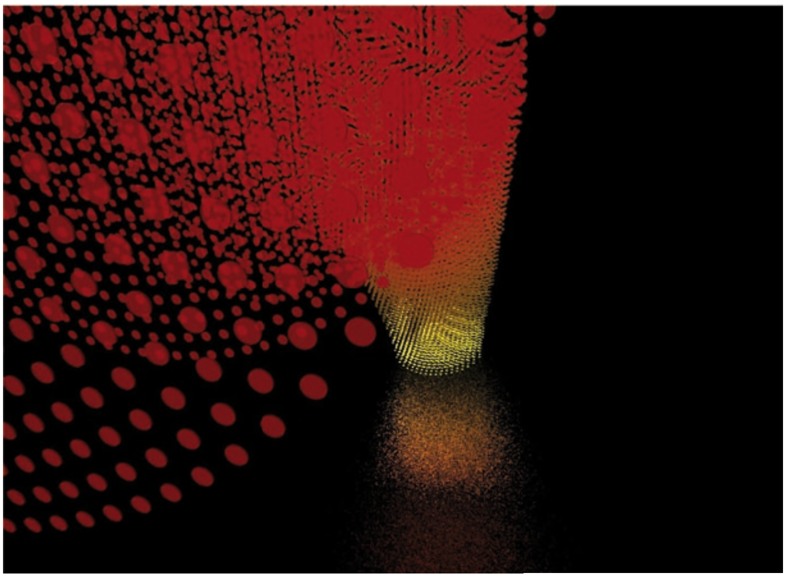
GRAVITATIONSPHYSIK

Alles aus dem Nichts

Wie nach der Schleifenquantengravitation aus dem absoluten Vakuum die Raumzeit entsteht.

Martin Bojowald

Eine Quantentheorie der Gravitation ist ein noch unerreichtes Ziel der Physik. Ein Ansatz ist die so genannte Schleifenquantengravitation. Diese startet von einer absoluten Leere und versucht sich an der mathematischen Konstruktion des gesamten Universums. Konkrete kosmologische Testmöglichkeiten sind in den letzten Jahren in Reichweite gerückt.



In der Schleifenquantengravitation ist der Raum aus diskreten Bestandteilen aufgebaut, deren Wechselwirkung die Expansion des Universums beschreibt. Daraus ergeben sich neuartige Konsequenzen besonders für den Urknall – oder die Zeit davor. Die Farben deuten die Anregungsniveaus der „Raumatome" (Kreise) an.

Das Vakuum der *modernen Physik* ist keinesfalls vollkommen leer, denn dank der Unschärfe geborgter Energie blitzen selbst im leeren Raum immer Teilchenpaare auf, um rasch wieder zu vergehen. Im Mittel ist und bleibt das Vakuum dennoch leer. Aber stimmt das wirklich? Leerer Raum hat immerhin noch etwas: Raum. Und Raum, samt Zeit, ist nach der Allgemeinen Relativitätstheorie kein absolut gegebenes Gerüst und immun gegenüber physikalischem Geschehen, sondern selbst ein wandelbares Objekt. Im expandierenden Universum dehnt sich der Raum aus, gemäß Einsteins Gleichung der Verteilung der Materie gehorchend. Im Inneren Schwarzer Löcher kann sich der Raum dagegen gänzlich zusammenziehen. Die Zeit vergeht mal schneller, mal langsamer, je nachdem, wie groß das Gravitationspotential am Ort einer Messung im Vergleich zu dem an der Signalquelle ist. Raum und Zeit werden durch die Materie – oder auch allein durch sich selbst – verbogen und gekrümmt. Der Raum mit seinem Volumen, seiner Expansion und seinen geometrischen Eigenschaften ist damit als physikalisches Objekt anzusehen, ebenbürtig mit, wenn auch ganz verschieden von der Materie.

Die klassischen Konsequenzen wie Laufzeitverzögerung und Lichtablenkung sind bekannt, doch was bedeutet das für die Quantentheorie? Wenn Raum und Materie als gleichberechtigt anzusehen sind, so geht der Begriff des Vakuums nur den halben Weg. Sollte das letztendliche Vakuum nicht frei von allen physikalischen Anregungen sein, selbst von Raum? Um uns den leersten Raum vorzustellen, müssen wir die Einsichten der Allgemeinen Relativitätstheorie mit denen der Quantentheorie verbinden. Erst dann kann es gelingen, die vollkommene Leere zu verstehen. Schon das materielle Vakuum wird gemeinhin als „das Nichts" bezeichnet. Das Vakuum der Quantengravitation ist gewissermaßen „nichter".

Wenn man die Sprache so weit dehnen muss, kann eigentlich nur noch die Mathematik weiterhelfen. Es überrascht daher nicht, dass weite Teile der Quantengravitation hochabstrakt sind und erhebliche Mühe haben, über den Status der Mathematischen Physik hinaus zu gelangen. Beobachtungen und experimentelle Tests stehen in allen Fällen aus, und selbst Testmöglichkeiten sind oft nur schwer zu identifizieren. Gerade für einen speziellen Zugang, die Schleifenquantengravitation[1, 2][1)], zeichnen sich jedoch mittlerweile Konsequenzen ab, vor allem in der Kosmologie. Die Schleifenquantengravitation ist auch die umfassendste Theorie des vollkommenen Vakuums, und dessen Eigenschaften hängen eng mit möglichen Konsequenzen bei alltäglicheren Energien zusammen.

1) Die Bücher in [1] bieten Details der Theorie, [2] beschreibt zudem Alternativen zur Schleifenquantengravitation.

KOMPAKT

- Die Schleifenquantengravitation baut den Raum wie Materie aus elementaren Bestandteilen auf, mathematisch beschrieben durch Erzeugungsoperatoren.
- Als anregungsfreien Zustand erhält man den leersten Raum, in dem weder Materieteilchen noch Raum vorliegen („Höllenzustand").
- Folgt man der Expansion des Raumes durch die Erzeugung von Raumatomen rückwärts zurück bis zum Urknall oder sogar davor, ergeben sich Testmöglichkeiten für die Kosmologie.

Prof. Dr. Martin Bojowald, Institute for Gravitation and the Cosmos, The Pennsylvania State University, 104 Davey Lab, University Park, PA 16802, USA

Will man die physikalische Struktur des absolut leeren Raumes herleiten, so sollten Raum und Geometrie nicht von Anfang an im mathematischen Fundament benutzt werden. Das mag offensichtlich klingen, ist aber schwer umzusetzen. Die elementarsten Konzepte der Quantenfeldtheorie – Teilchen, Antiteilchen, Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, ja selbst der Vakuumzustand – machen Gebrauch von einer im Hintergrund des Quantenfeldes gegebenen Geometrie. Ob es nun die flache Minkowski-Raumzeit ist oder eine gekrümmte wie um ein Schwarzes Loch, die Geometrie wird unabänderlich in das mathematische Fundament eingebaut. Auch wenn einige Zugänge zur Quantengravitation immer noch von einem geometrischen Hintergrund ausgehen, manchmal zumindest in abgeschwächter Form, muss man sich für eine vollständige Beschreibung der Quanten-Raumzeit davon lösen.

Die Stringtheorie beispielsweise, als bestbekannter Ansatz, startet mit der Quantisierung von stringartigen, sich in einer gegebenen Raumzeit bewegenden Objekten und mündet schließlich in einer vereinheitlichten Beschreibung aller Kräfte, samt Gravitation [3]. Auf diese Weise führt die Stringtheorie unter anderem zu einer Vielzahl von Vorschlägen für eine mögliche Erweiterung des Standardmodells der Teilchenphysik. Während neuere Entwicklungen (wie die AdS/CFT-Korrespondenz) den Bezug zur Hintergrund-Raumzeit zumindest teilweise aufheben können, behandeln die Methoden der Stringtheorie Raum und Zeit jedoch nicht direkt. Wenn Raum und Zeit zu selbstständigen Akteuren werden sollen, kann das nur in einer so genannten hintergrundunabhängigen Theorie der Quantengravitation geschehen. Der bestverstandene Zugang hierzu ist die Schleifenquantengravitation.

Diese führt zwangsläufig zum kompletten Vakuum. Mathematisch ist dieser Zustand analog zu gewissen anderen in der materiellen Quantenfeldtheorie, wie Klaus Fredenhagen als Erster feststellte. Die Analogie dieser absoluten, weltverneinenden Leere ist aber nicht das materielle Vakuum, sondern ein Zustand unendlicher Temperatur. Diesen taufte Fredenhagen „Höllenzustand“. Die Vereinheitlichungsfrage spielt vom Standpunkt der Schleifenquantengravitation aus eine geringere Rolle. Sie zunächst unberücksichtigt zu lassen hilft, die Entwicklung der Theorie zu fokussieren. Außerdem lässt sich so Ballast wie Extradimensionen oder die Vielzahl an Lösungen, mit denen die Stringtheorie die Vereinheitlichung zu erkaufen scheint, vermeiden.

Mit Schleifen zum Raum

Die klassische Allgemeine Relativitätstheorie ist bereits äußerst kompliziert, zum Beispiel wegen ihrer nichtlinearen Dynamik. Eine quantentheoretische Beschreibung geht man also besser in Etappen an. Als Vorläufer der Schleifenquantengravitation lassen sich die Versuche von John Wheeler und Bryce DeWitt in den 1960er-Jahren (nach wichtigen Vorarbeiten durch Peter

HOLONOMIEN UND SPINNETZWERKE

Um die Darstellung der Schleifenquantengravitation zu illustrieren, ist es vorteilhaft, mit einem einfacheren System zu beginnen. Der Konfigurationsraum der Schleifenquantengravitation ist kompakt, wenn auch unendlich dimensional. Gewisse Eigenschaften sind dann analog zu denen der Quantenmechanik auf einem Kreis mit Winkel φ. Hier hat man eine Orthonormalbasis von Zuständen $\{|n\rangle\}$ ($n \in \mathbb{Z}$) dargestellt z. B. durch $\langle\varphi|n\rangle = \exp(in\varphi)$, auf denen der Impuls wie $\hat{F}\,|n\rangle = \hbar\, n|n\rangle$ und der Winkel φ über $h = \exp(i\varphi)$ wie $\hat{h}|n\rangle = |n+1\rangle$ wirkt. Über Periodizitätsbedingungen für Wellenfunktionen führt die Kompaktheit des Kreises zu diskreten Impulseigenwerten.

Der Zustand $|0\rangle$ ist besonders einfach, da er nicht vom Winkel abhängt. Andererseits enthält er schon eine gute Menge an Information über das gesamte Quantensystem: Jeder andere Zustand $|n\rangle$ lässt sich durch die Wirkung von $\hat{h}$ als $|n\rangle = \hat{h}^n|0\rangle$ erhalten. Der Operator $\hat{h}$ ist analog zu Erzeugungsoperatoren, wie man sie vom harmonischen Oszillator oder aus der Quantenfeldtheorie kennt, und sein Inverses $\hat{h}^{-1}$ ist der Vernichtungsoperator.

Die Schleifenquantengravitation verwendet Funktionale, die **Holonomien**[2)]

$$h_K(\underset{\rightarrow}{A}_i) = \mathcal{P}\exp\left(i\oint_K \sum_{i=1}^{3} \underset{\rightarrow}{A}_i \sigma_i \,\mathrm{d}\vec{s}\right) \qquad (1)$$

entlang beliebiger Kurven K, die beschränkt sind und so Werte in einem kompakten Raum annehmen. Die Summe der diagonalen Matrixelemente („Spur“) von Holonomien ist eichinvariant. Wie der Teilchenort in der Quantenmechanik spielen Holonomien eine Doppelrolle: zum einen als Argumente von Wellenfunktionen $\psi[h_{K_1}(\underset{\rightarrow}{A}_i), \ldots, h_{K_n}(\underset{\rightarrow}{A}_i)]$, die über die Holonomien vom Zusammenhang abhängen, zum anderen als Multiplikationsoperatoren auf diesen Wellenfunktionen. Wegen der Beschränktheit von Holonomien als Funktionen von $\underset{\rightarrow}{A}_i$ sind die Wellenfunktionen auf einem kompakten Raum definiert, wenn auch auf einem viel komplizierteren als einem Kreis.

Auch hier ist der einfachste Zustand ψ_0 der, der gar nicht von den Zusammenhangsvariablen $\underset{\rightarrow}{A}_i$ abhängt. Durch die Wirkung von h_K durch Multiplikation entsteht ein neuer Zustand. Ein Unterschied zum Kreisbeispiel ist, dass man unterschiedliche Kurven K wählen kann und so eine Vielzahl verschiedener Zustände erhält. Allgemein lässt sich ein Zustand durch $\psi_{K_1,n_1;\ldots;K_k,n_k}$ kennzeichnen (K_k: benutzte Kurven, n_k: Potenzen der entsprechenden Holonomie). Für jede denkbare Kurve im Raum hat man also eine eigene kompakte Quantenmechanik, wodurch die Unendlichdimensionalität erkennbar wird.[3)] Eine geeignete orthonormale Basis ist durch **Spinnetzwerk-Zustände** gegeben [5].

Benutzt man für jede Kurve die Quantenmechanik auf einem Kreis, so erhält man eine Quantisierung des Elektromagnetismus, einer Eichtheorie zur Gruppe U(1). Benutzt man die Quantenmechanik auf einer dreidimensionalen Kugelfläche als Menge der Gruppe SU(2), so erhält man eine Quantisierung räumlicher Geometrie, wie sie der Schleifenquantengravitation zugrunde liegt. Wie der Operator $\hat{F}$ für die Kreisquantisierung oder wie im quantisierten Elektromagnetismus die durch das Gaußsche Gesetz dem elektrischen Fluss durch eine sie umgebende Fläche entsprechende Ladung, so haben die Flussoperatoren $\int_F \sum_{i=1}^{3} \vec{E}_i \sigma_i \,\mathrm{d}\underset{\rightarrow}{F}$ der Schleifenquantengravitation diskrete Spektren. Die räumliche Geometrie ist also diskret.

2) In diesem Fall eines nicht-abelschen Zusammenhangs zur Strukturgruppe SU(2) treten die Paulimatrizen σ_i im Integral auf. Die Anordnung der nichtkommutierenden Matrizen $\sum_i \underset{\rightarrow}{A}_i \sigma_i$ entlang des Integrationsweges ist hierbei wichtig; eine Standardordnung ist durch das Symbol $\mathcal{P}$ angedeutet, wonach die Matrizen nach ihrer entlang des Integrationsweges auftretenden Ordnung gewählt werden. Die Integration kann dann nur noch in Kombination mit der Exponentialfunktion brauchbar definiert werden.

3) C. Fleischhack, J. Lewandowski, A. Okołów, H. Sahlmann und T. Thiemann haben Eindeutigkeitsbeweise dieser Darstellung geliefert [4].

Bergmann und Paul Dirac) ansehen, eine kanonische Quantisierung der Allgemeinen Relativitätstheorie nach den bekannten Regeln der Quantenmechanik aufzubauen. Eine geometrische Konfiguration der Gravitation ist durch die Raummetrik bestimmt, die formal Ortskoordinaten der klassischen Mechanik ersetzt, und Impulse sind durch die Änderungsrate der Raummetrik gegeben (genannt äußere Krümmung). Nimmt man ein isotropes Universum an, ergibt sich die Raummetrik über das Volumen (oder genauer den Skalenfaktor a) und der Impuls über den Hubble-Parameter $H=\dot{a}/a$.

Allgemein ist die Menge aller Raummetriken $\boldsymbol{q}$ allerdings unendlich dimensional, da die Matrixelemente einer Metrik an allen Punkten unterschiedliche Werte annehmen können. In einer lokalen Beschreibung würde man erwarten, dass ein Zustand der Quantengravitation durch eine Art Wellenfunktion $\psi(\boldsymbol{q})$ auf dieser Menge beschrieben sein sollte, versehen mit einer geeigneten Integration für ein inneres Produkt. Wie in der üblichen Interpretation der Quantenmechanik würde eine Kombination von Wellenfunktionen mit Integration und innerem Produkt die Berechnung von Erwartungswerten und Quantenfluktuationen ermöglichen, hier allerdings Messungen entsprechend der Raumgeometrie. Abstände oder Größenverhältnisse wären also einer ähnlichen Quantenunschärfe unterworfen wie die Position eines Teilchens. Dafür eine mathematisch vernünftige Behandlung zu finden stellt ein horrendes, bis heute ungelöstes Problem dar.

Die Schleifenquantengravitation nahm ihren Anfang in einer Umformulierung dieses Problems – zunächst auf klassischem Niveau, sodass die Allgemeine Relativitätstheorie in ihren physikalischen Konsequenzen unbehelligt blieb. Wie Abhay Ashtekar 1986 herausstellte, lässt sich die Raummetrik der kanonischen Formulierung durch eine Art mehrkomponentiges Vektorpotential ersetzen, einen so genannten Zusammenhang [6]. Mathematisch lassen die neuen Variablen die Gravitation analog zur Elektrodynamik erscheinen:[4] Zusätzlich zum „Vektorpotential" $\underset{\sim}{A}_i$ (i=1, 2, 3) gibt es, kanonisch konjugiert, ein „elektrisches Feld", das Dreibein $\vec{E}_i$.[5] Es bestimmt Eigenschaften der räumlichen Geometrie wie den Flächeninhalt.

Die Dynamik ist in dieser kanonischen Theorie durch eine Hamilton-Funktion oder die Energie bestimmt. In der Elektrodynamik ist die bekannte Energie

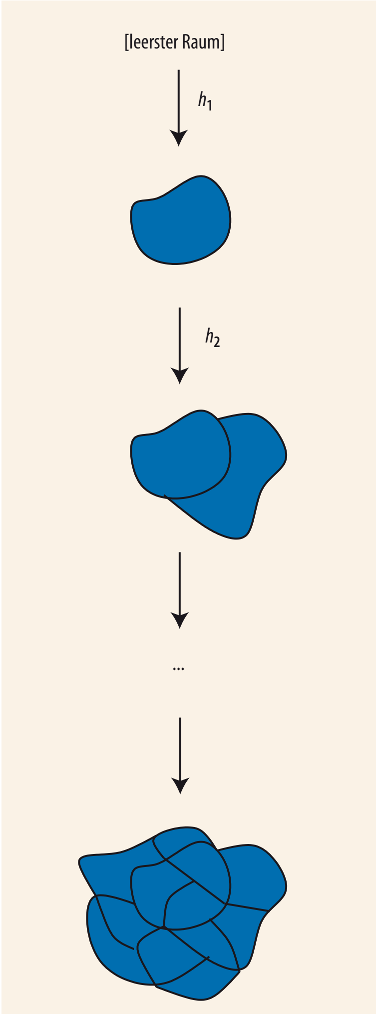


Abb. 1 Holonomien erzeugen von einer vollkommenen Leere ausgehend einen dichten Graphen, wodurch ein nahezu kontinuierlicher Raum entsteht.

quadratisch in elektrischem und magnetischem Feld $\vec{B} = \underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{A}$. In Yang-Mills-Theorien, wie sie der schwachen Wechselwirkung und der QCD zugrunde liegen, wird dieser Ausdruck „nicht-abelsch" verallgemeinert, ist aber immer noch quadratisch in mehrkomponentigen Feldern $\vec{E}_i$ und $\vec{B}_i$. Die Gravitation benutzt ähnliche Felder, hat jedoch eine kompliziertere, nicht-polynomiale Hamilton-Funktion.[6] Es besteht ein weiterer entscheidender Unterschied zwischen den Theorien. In der Gravitationstheorie sind die physikalischen Felder nicht auf einem geometrischen Raum gegeben, sondern ihre Werte bestimmen erst die Struktur des Raumes und Größenmessungen. Einige Quantisierungstechniken, insbesondere der Gittereichtheorie, lassen sich übernehmen; andere gilt es wegen des Raumbezugs neu zu erarbeiten.

Nachdem Carlo Rovelli und Lee Smolin 1990 die sich aus Ashtekars neuen Variablen ergebenden Vorteile für die Quantengravitation betont und erste Schlüsse für die Geometrie gezogen hatten [7], ist in den 1990er-Jahren ein mathematischer Formalismus zur Differentiation und Integration auf der Menge der Vektorpotentiale entwickelt worden. Damit lassen sich nun Wellenfunktionen der Quantengravitation repräsentieren und normieren. Vor allem das so genannte Ashtekar-Lewandowski-Maß spielt hierfür eine entscheidende Rolle [8]. Diese Wellenfunktionen von der Form $\psi(\underset{\sim}{A}_i)$ hängen vom Vektorpotential nicht lokal ab, sondern über dessen Werte integriert entlang Kurven, die einen in sich geschlossenen Graphen ergeben (**Infokasten** „Holonomien und Spinnetzwerke"). In diesem kanonischen Zugang zu einer Quantisierung sind die benutzten Kurven rein räumlich; ein Zusammenhang mit Pfadintegralquantisierungen besteht an dieser Stelle nicht. Gemäß der Analogie zur Elektrodynamik lassen sich die Kurven als Flusslinien ansehen, die beispielsweise eine von ihnen durchstoßene Fläche statt Ladung mit Inhalt versehen. Ursprünglich wurden nur geschlossene, schnittpunktfreie Kurven benutzt – oder Schleifen, daher der Name Schleifenquantengravitation. Schnittpunkte unterschiedlicher Kurven, die dann verzweigte Graphen ergeben, hatten sich aber schnell als wichtig herausgestellt; anderenfalls wäre das Volumen immer null.

Rovelli und Smolin erkannten, dass ihre Schleifenoperatoren den Quantenraum hintergrundunabhängig aufbauen. Die Wirkung eines Schleifenoperators erzeugt ein Raumatom, das nicht etwa punktförmig

4) Eine ausführliche Tabelle mit den sich entsprechenden Variablen und Grundgleichungen findet sich im Online-Inhaltsverzeichnis dieses Hefts.

5) In Gravitationstheorien ist es wichtig, zwischen kontravarianten und kovarianten Vektorfeldern zu unterscheiden, was hier durch die Position des Vektorpfeiles angedeutet ist. In einem metrischen Raum lässt sich eindeutig zwischen diesen zwei Arten von Vektorfeldern wechseln, in der Gravitation wird die Metrik aber erst aus dem Dreibein $\vec{E}_i$ hergeleitet, sodass sie für eine Definition der fundamentalen Felder nicht zur Verfügung steht.

6) Wegen der Abwesenheit einer absoluten Zeit muss diese Hamilton-Funktion immer verschwinden, da ihr Wert ansonsten als Energie kanonisch konjugiert zu einer ausgezeichneten Zeitkoordinate sein müsste. Die Hamilton-Funktion ist also eine Zwangsbedingung, die – wenn sie vollständig gelöst wird – die raumzeitliche Kovarianz dieser zunächst räumlich formulierten kanonischen Theorie sicherstellt.

oder sphärisch ist, sondern eindimensional entlang der Schleife ausgedehnt. Nach der Wirkung eines Schleifenoperators hat sich die Größe des Raumes um eine diskrete kleinste Einheit geändert. Umgekehrt entfernt das Inverse des Operators Raumatome und verringert die Größe. Startet man mit einem beliebigen Zustand endlich vieler Raumatome, so führt die Vernichtungsarbeit inverser Schleifenoperatoren auf einen Zustand, in dem kein Raumatom – kein Raum – mehr vorhanden ist: der Höllenzustand absoluter Leere (**Infokasten unten** und **Abb. 1**).

Soweit ist die Erzeugung oder Vernichtung von Raumatomen ein mathematischer Prozess, beschrieben durch die Schleifenoperatoren. Nun ändern sich der Raum und sein Volumen mit der Zeit, denn das Universum dehnt sich aus. Raumatome müssen also dynamisch erzeugt werden, nicht durch die mutwillige Handlung von Mathematikern, sondern durch das Wechselspiel von Materie und Raumzeit. Auch hierfür stellt die Schleifenquantengravitation eine Gleichung bereit, welche die klassische Einstein-Gleichung quantisiert. Rovelli und Smolin hatten dieses Problem schon angegangen, aber erst 1996, nach der Entwicklung mathematischer Methodik, lieferte Thomas Thiemann eine brauchbare Lösung [9]. Noch immer bestehen zahlreiche wichtige Fragen zu diesem Problemkreis, etwa nach der vollständigen Konsistenz oder der Eindeutigkeit der Thiemannschen Dynamik. Dennoch ist es möglich, ihre charakteristische Form – gerade die atomaren, von dem Höllenzustand startenden Erzeugungsprozesse einer diskreten Raumzeit betreffend – in vielen Modellen schon im Detail zu untersuchen. Und mittlerweile ist klar: Der radikale Dekonstruktivismus der Schleifenquantengravitation birgt eine enorme schöpferische Kraft. Offen bleibt allerdings die Frage, wie weit die Theoretiker diese Kraft beherrschen können.

DIE ABSOLUTE LEERE ALS HÖLLENZUSTAND

Holonomien h_K spielen mathematisch die Rolle von Erzeugungsoperatoren der Quantengeometrie. Allerdings ist die Analogie zur Teilchenerzeugung in der Quantenfeldtheorie nur formal. So wird etwa die Energie durch die Anwendung von $\hat{h}_K$ nicht erhöht. Der Basiszustand $|0\rangle$ der Kreisquantisierung oder ψ_0 der Schleifenquantengravitation entsprechen deshalb nicht dem gewöhnlichen Vakuum.

Stattdessen lassen sich diese Zustände vermittelt durch die **Erwartungswerte von Holonomieoperatoren** interpretieren. Schon in der gängigen Quantenfeldtheorie spielen solche eine große Rolle, z. B. um das Confinement in der QCD zu diskutieren. Auch in der Quantenmechanik sind Erwartungswertfunktionale von grundlegender Bedeutung, denn wenn man alle Werte $\langle\hat{h}\rangle$, $\langle\hat{h}^2\rangle$, … kennt, so erhält man Auskunft über alle möglichen, mit der Observablen $\hat{h}$ zusammenhängenden Messungen einschließlich Quantenfluktuationen. Für $|0\rangle$ wie für ψ_0 erhalten wir Holonomieerwartungswerte $\langle\hat{h}^n\rangle$, die nur für $n = 0$ nicht verschwinden (unabhängig von der gewählten Kurve im Fall von ψ_0). In diesem Sinne sind die Zustände also in der Tat analog.

Als weiterer Vergleich bietet sich der thermodynamische Gleichgewichtszustand bei der Temperatur T an. Für endliches T ist ein solcher Zustand gemischt und über den Energieoperator $\hat{E}$ durch die Dichtematrix $\hat{\rho}_T \propto \exp(\hat{E}/k_B T)$ gegeben. Im Grenzwert $T \to \infty$ ist $\hat{\rho}_T$ energieunabhängig und liefert, wie sich nachrechnen lässt, Erwartungswerte von $\hat{h}^n$, die ebenfalls für $n \neq 0$ verschwinden. Der Zustand $|0\rangle$ sowie das Gravitationsvakuum ψ_0 entsprechen einem Zustand unendlicher Temperatur, dem **Höllenzustand**. Auch wenn die Analogie abstrakt und rein formal ist, erfasst sie die physikalische Bedeutung des Zustandes für den Urknall doch sehr genau.

Taktvoll durch den Urknall

Augenzwinkernd lässt sich feststellen, dass der Höllenzustand schon bei der Geburt der modernen Physik eine gewisse Rolle gespielt hat. Eines der ersten Werke von Galileo Galilei war eine mathematische Ausschmückung von Dantes „Göttlicher Komödie", in der er gegebene Beschreibungen der Höllenkreise sowie der Proportionen Luzifers zu einer Berechnung von deren Größe benutzt. Die Schleifenquantengravitation führt dieses Beispiel gewissermaßen fort.

Aber wozu sonst kann man die Schleifenquantengravitation – oder allgemeiner die Quantengravitation – gebrauchen? Wenn sie nur dazu dienen würde, das Vakuum ganz zu entleeren, wären die jahrzehntelangen Anstrengungen ihrer Entwicklung wohl schwer zu rechtfertigen. Die klassische Allgemeine Relativitätstheorie beschreibt die Raumzeit vorzüglich und ist mittlerweile fester Bestandteil des physikalischen Weltbildes. Zahlreiche ihrer Vorhersagen sind auf vielfältige und überzeugende Weise bestätigt worden, ohne Abweichungen, die eine Quantentheorie der Gravitation verlangen würden. Weitere Tests werden immer wieder neu ersonnen und durchgeführt. In der Kosmologie ist die Allgemeine Relativitätstheorie unverzichtbar. Wir stehen wohl kurz vor dem ersten direkten Nachweis von Gravitationswellen – mit Detektoren wie LIGO und GEO600 – und deren Nutzbarmachung als ganz neue Signalquelle für die Astronomie. Die erstmalige Auflösung des Horizontes eines Schwarzen Loches mithilfe der Submillimeter-Radiointerferometrie ist schon fest eingeplant. Auch mathematisch gibt die Allgemeine Relativitätstheorie mit ihren Rätseln immer wieder zu wichtigen Entwicklungen Anlass, wie beim Beweis der Penrose-Ungleichung [10], und sie weckt immer wieder neues Interesse. Die Einsteinsche Gleichung mit ihrem geometrischen Antlitz ist von betörender Schönheit – und führt uns doch geradewegs in die Hölle.

Wie alles Große hat die Allgemeine Relativitätstheorie eine entscheidende Schwäche. Sie geht zwar weit über die Newtonsche Theorie der Gravitation hinaus, doch behält sie ein wesentliches Merkmal bei: Massen und Energieverteilungen ziehen sich immer an. Obwohl negativer Druck, vielleicht in Form Dunkler Energie, auch zur Abstoßung führen kann, gibt es keine Massenkompensation oder gänzliche Neutralisierung wie im Fall elektrischer Ladungen. Ist einmal genug Masse auf einen gewissen Raumbereich konzentriert, gibt es kein Halten mehr. Alles zieht sich gegenseitig an und materielle Kräfte, selbst exotische wie die auf dem Paulischen Ausschließungsprinzip beruhenden in Weißen Zwergen oder Neutronensternen, müssen versagen. Die Materieverteilung kollabiert zu einem Schwarzen Loch oder, im zeitlichen Rückwärtsblick auf das ganze Universum, in den Urknall.

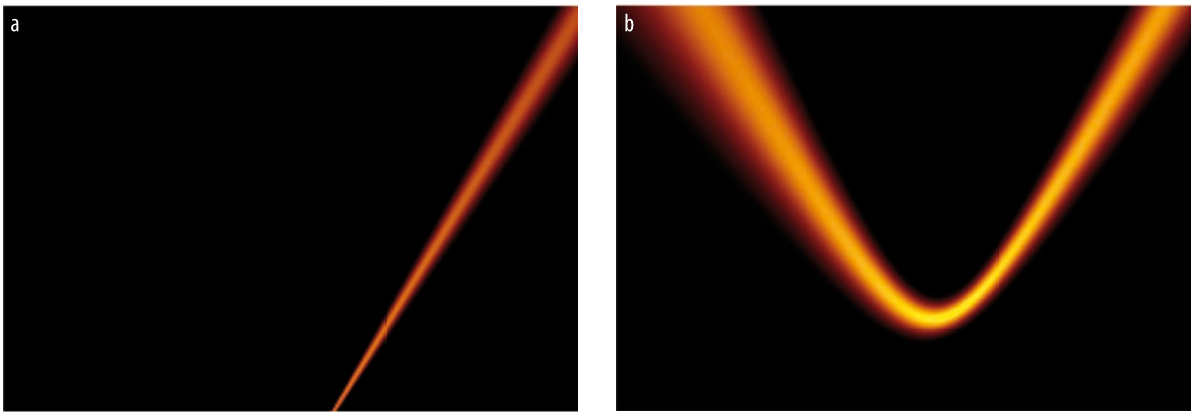


Abb. 2 Für ein freies masseloses Skalarfeld, das mit der Raumzeit nur über seine kinetische Energie wechselwirkt, erhält man ein exakt lösbares Modell der Quantenkosmologie. Analog zum harmonischen Oszillator folgen Zustände den klassischen Lösungen; höchstens Änderugen durch die Quantenstruktur des Raumes können auftreten. Hier sind zwei Beispiele gezeigt, wobei die Farbe dem Betragsquadrat der Wellenfunktion entspricht (schwarz=0). Bei der einen handelt es sich um eine Lösung der Wheeler-DeWitt-Gleichung, die in die klassische Singularität läuft (a). Mit den diskreten Effekten der Schleifenquantenkosmologie ergibt sich rechtzeitig ein Umschwung von Kollaps zu Expansion (b). Gezeigt ist in beiden Fällen die Wellenfunktion in einem durch Volumen (vertikal) und die Zeit (horizontal) gegebenen Diagramm, samt Fluktuationen, die sich in der Umschwungsphase ändern können. Wie genau man vorherige Information über das Universum rekonstruieren kann und wie allgemein die Bedingungen (z. B. an Materie) sind, um die Singularität durch einen Umschwung zu ersetzen, ist noch ein offenes Problem.

Mathematisch wie physikalisch resultiert eine Singularität: ein Zeitpunkt, an dem Dichte, Temperatur und Gezeitenkräfte unendlich werden, ein Raumbereich oder das ganze Universum auf verschwindende Größe kollabieren und die Einsteinschen Differentialgleichungen zusammenbrechen. All das geschieht nicht etwa, wie man während der ersten Jahrzehnte der Allgemeinen Relativitätstheorie noch glauben durfte, nur für einfache hochsymmetrische Lösungen, bei denen ohnehin alles zielgenau auf einen Punkt hinstürzt, sondern generell. Alle Zweifel daran sind durch die Singularitätentheoreme von Roger Penrose und Stephen Hawking ausgeräumt worden. Die Allgemeine Relativitätstheorie kann nur einen begrenzten Teil des Universums beschreiben; an den Singularitäten des Urknalls oder Schwarzer Löcher verliert sie ihre Gültigkeit. Somit ist insbesondere die Interpretation des Urknalls als Anfang nicht gerechtfertigt, denn das Versagen der Theorie bedeutet noch keine Grenze der Welt. Erst eine umfassende Theorie, die auch die unendlich heiße Urknallsingularität beherrscht, kann darüber Aufschluss geben, sowie über die Möglichkeit eines „vor dem Urknall".

Die Schleifenquantengravitation hat sich seit jeher mit einem Zustand unendlich hoher Temperatur, verschwindender Ausdehnung befasst und zwar aus unterschiedlichen Gründen.[7] Es liegt also nahe, sie auf die Kosmologie anzuwenden; eine Erweiterung der Allgemeinen Relativitätstheorie durch Quanteneigenschaften wäre sie jedenfalls. Doch ihre Dynamik ist noch weit komplizierter als die der Einsteinschen Gleichung. Manchen erscheint eine Analyse fast aussichtslos, und wie Vergil zu Dante mag man versucht sein auszurufen:

Doch du, warum kehrst du zu solchen Leiden?
Warum besteigst du nicht den Berg der Wonnen
[die Stringtheorie?],
Der Anfang ist und Urgrund aller Freuden?[8]

Und dennoch gibt es Grund zu Hoffnung. In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist man im Wesentlichen auf symmetrische Lösungen angewiesen, die wie die Friedmannschen in der Kosmologie oder die Schwarzschilds für Schwarze Löcher schon viele der physikalischen Phänomene enthüllen. In der Schleifenquantengravitation führt dies zur Schleifenquantenkosmologie [11].

Wenn man das Kopernikanische Prinzip sowie die Galaxienverteilung anhand moderner Himmelsdurchmusterungen[9] zugrunde legt, ist die Materieverteilung im Universum auf großen Skalen weitgehend homogen und isotrop. Somit ist in erster Näherung allein das Gesamtvolumen des sichtbaren Universums für dessen zeitliche Entwicklung ausschlaggebend. Der zeitabhängige Skalenfaktor $a(t)$ beschreibt die Ausdehnung. Abstände zwischen zwei entfernten Objekten im expandierenden Universum sind proportional zu a; andererseits ziehen sich Massen über die Gravitationskraft an. Nach Newtonschen Vorstellungen würde man von einer Gesamtenergie (pro Einheitsmasse) $\dot{a}^2 - 8\pi\, GM/3a$ ausgehen, bestehend aus kinetischer und potentieller Energie außerhalb einer Massenverteilung M (und mit der Newtonschen Konstanten G). In der Tat ist die Einsteinsche Gleichung für isotrope Raumzeiten und nichtrelativistische, staubartige Materie von dieser Form, wobei die Gesamtenergie verschwinden muss (vgl. Fußnote 6). Allgemeiner wird dies als Friedmann-Gleichung

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \qquad (2)$$

für den Hubble-Parameter $H = \dot{a}/a$ geschrieben, mit der Energiedichte ρ. Im Fall staubartiger Materie, wie in allen anderen realistischen Fällen, erhält man eine singuläre Lösung: einen Skalenfaktor wie $a(t) \propto (t - t_0)^{2/3}$, der zu einer Zeit t_0 verschwindet, an der die Energiedichte $\rho(t_0)$ divergiert. Dieses Problem zeigt die Unvollstän-

7) Inmitten des Urknalls sitzt in diesem Bild der Zustand absoluter Leere, und in der Tat verschwinden dort materielle Energieoperatoren der Schleifenquantengravitation. Materie wird erst in der nachfolgenden Expansion angeregt.

8) Dante, Die Göttliche Komödie, Die Hölle, 1. Gesang (Übersetzung von Wilhelm G. Hertz, 1955)

9) beispielsweise der Sloan Digital Sky Survey (www.sdss.org)

digkeit der Allgemeinen Relativitätstheorie auf, deren Gleichungen an der Singularität versagen. Ein Blick in Zeiten vor den Urknall, der Singularität der Theorie, bleibt ihr somit verschlossen.

Man könnte zunächst annehmen, dass ein solches Modell in seiner quantentheoretischen Beschreibung nichts von den raumatomaren Eigenschaften zeigen kann, denn jegliche räumliche Struktur scheint durch die Symmetrieannahme verwaschen. Dennoch trägt die auf dem gleichen Symmetrieprinzip beruhende Schleifenquantenkosmologie noch die wesentlichen Merkmale der Schleifenquantengravitation samt Diskretheit (**Infokasten unten**): Insbesondere die Zeit ändert sich nicht kontinuierlich, sondern, das atomare Wechselspiel wiedergebend, mit einem durch die Quantisierung gegebenen Takt. Dieses diskrete, taktvolle Verhalten bewahrt das Universum vor dem Höllenzustand. Denn diese dynamischen Gleichungen zerbrechen an diesem Zustand nicht, und in manchen Modellen lässt sich konkret ein oberer Grenzwert für die Dichte finden. Ist dieser erreicht, so baut sich eine Abstoßungskraft auf und ein kollabierendes Universum, wie es nach diesem Bild vor dem Urknall vorgelegen haben könnte, wird wieder auseinandergetrieben (**Abb. 2**). So liefert die Schleifenquantenkosmologie einen Mechanismus zur Singularitätsvermeidung nicht nur im Fall kosmologischer Modelle, sondern auch für das Innere Schwarzer Löcher. Nebenbei kann die Abstoßungskraft das nach dem Urknall expandierende Universum beschleunigen und dabei zu einer inflationären Phase Anlass geben, wie sie zur Erklärung der Strukturbildung im Kosmos hilfreich sein kann. Die Anwendungen auf Schwarze Löcher sowie auf Details der kosmologischen Struktur verlangen allerdings eine deutlich bessere Methodik, um realistische Modelle zu ermöglichen.

Auswege aus der und in die Hölle

Soweit sind kosmologische Lösungen nur für sehr symmetrische, räumlich isotrope Raumzeiten hergeleitet worden. Ein tiefergehendes Verständnis des Höllenzustandes und der raumatomaren Dynamik sind nötig, um die Resultate auf allgemeine Situationen auszudehnen. Arbeiten hierzu haben in jüngerer Zeit vor allem Bianca Dittrich (Albert-Einstein-Institut, Potsdam), Kristina Giesel (Louisiana State University), Jerzy Lewandowski (Warschau) sowie Thomas Thiemann (U Erlangen-Nürnberg) beigesteuert. Christian Fleischhack (U Paderborn) und Hanno Sahlmann (Pohang, Korea) haben mehrere mathematische Beiträge geliefert. Eine alternative Sichtweise zur kanonischen Formulierung ist die zum Beispiel in Daniele Oritis Gruppe (Potsdam) untersuchte Gruppenfeldtheorie, die den atomaren Raum als riesiges, verzweigtes Feynman-Diagramm beschreibt; der Höllenzustand ist in diesem Bild wechselwirkungsfrei. Weitere alternative Sichtweisen auf diskrete Raumzeit sind die pfadintegralartigen Spinschäume (insbesondere Rovelli in Marseille) oder kausale dynamische

ELEMENTE DER QUANTENKOSMOLOGIE

Bei den hohen Energiedichten des Urknalls sollte die Quantentheorie eine große Rolle spielen, nicht nur in Bezug auf die Materie, sondern auch auf Raum und Zeit. Zu hoffen wäre, dass die Quantengravitation hilft, die Singularitäten zu eliminieren. Im kosmologischen Rahmen, mit der Annahme eines homogenen Raumes, lässt sie sich einfacher formulieren. Dies geschieht im Rahmen der Quantenkosmologie. Hierzu benutzt man in der Friedmann-Gleichung kanonische Variable, wobei sich der Hubble-Parameter H dividiert durch die Gravitationskonstante G als kanonischer Impuls des Volumens $V=a^3$ herausstellt. Die Friedmann-Gleichung (2), multipliziert mit dem Volumen, erscheint dann in der Form einer die Energiebilanz wiedergebenden Hamilton-Funktion

$$H^2 V = \frac{8\pi G}{3} E \qquad (3)$$

mit der Materieenergie $E=\rho V$.

Wie üblich quantisiert man durch Benutzung von Wellenfunktionen $\psi(V)$ in der Volumendarstellung, in welcher der Impuls H zu einem Ableitungsoperator $\hat{H}=-i\hbar G\,\partial/\partial V$ wird. (Hierin ist $\hbar G=\ell_P^2$ das Quadrat der Planck-Länge.) In Gl. (3) führt dies zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, der **Wheeler-DeWitt-Gleichung**

$$-\ell_P^4 \frac{\partial^2 (V\psi)}{\partial V^2} = \frac{8\pi G}{3}\hat{E}\psi \qquad (4)$$

für die „Wellenfunktion des Universums" ψ. Die Form des Energieoperators $\hat{E}$ hängt vom genauen Materieinhalt des Universums ab, was auch weitere Freiheitsgrade unabhängig von V bedingt. Gleichung (4) lässt sich ähnlich wie die Klein-Gordon-Gleichung behandeln und in einigen Fällen exakt lösen. Leider kann diese Quantisierung das Singularitätenproblem nicht allgemein eliminieren: Man findet leicht Modelle, in denen Wellenpakete wie die klassischen Lösungen in eine Singularität laufen (**Abb. 2a**).

Die Darstellung der Schleifenquantenkosmologie benutzt die Erkenntnisse der Schleifenquantengravitation. Während V durch Flussvariable repräsentiert wird, hat man für H (das mit dem isotropen Ashtekar-Zusammenhang in Beziehung steht) nur exponierte Holonomievariable $h_\delta=\exp(i\delta H)$ mit einem die Diskretheitsskala angebenden Parameter δ. In diesem symmetrischen Modell kann man sich δ als die einzig relevante Information über die allgemeiner in Gl. (1) auftretenden Kurven vorstellen. Der (noch nicht eindeutig bestimmte) Wert von δ gibt also die elementare Gitterstruktur wieder.

Wenn H nach Quantisierung zu einem Ableitungsoperator wird, stellt $\exp(i\delta\hat{H})\,\psi(V)$ die gesamte Taylor-Reihe von $\psi(V+\delta\ell_P^2)$ dar. Somit wird die Friedmann-Gleichung nun nicht zu einer Differential- sondern zu einer Differenzengleichung quantisiert:

$$\begin{aligned}&(V+2\delta\ell_P^2)\psi(V+2\delta\ell_P^2) - 2V\psi(V)\\ &+ (V-2\delta\ell_P^2)\psi(V-2\delta\ell_P^2)\\ &= -\frac{32\pi G\delta^2}{3}\hat{E}\psi(V)\,.\end{aligned} \qquad (5)$$

Im Vergleich zu (4) beinhaltet (5) höhere Potenzen der Impulsvariablen H, die man als Quantenkorrekturen bei hoher Dichte des Universums verstehen kann. Unabhängig von der genauen Form des Materieoperators $\hat{E}$ zeigt die sich ergebende Rekursion für $\psi(V)$, dass die Wellenfunktion durch den Höllenzustand $|0\rangle$ hindurch fortgesetzt wird. Der kollabierte Raum mit $V=0$ stellt keine Grenze der Raumzeit mehr dar, und die Singularität ist eliminiert. In exakt lösbaren Modellen für spezielle Materieformen (deren kinetische Energie die potentielle dominiert) kann man explizit den Umschwung sehen (**Abb. 2b**).

Triangulierungen, die vor allem Jan Ambjørn (Kopenhagen) und Renate Loll (Utrecht) entwickeln.

Bis solche, an komplizierte Probleme der Vielteilchenphysik erinnernde Verfahren anwendbar sind, bemüht man Störungstheorien, um die homogene Schleifenquantenkosmologie zu einer Analyse von möglicherweise detektierbaren Auswirkungen in der kosmischen Strukturbildung zu nutzen. Im Hinblick auf die Ausbreitung von Wellen verhält sich ein diskreter Raum wie ein Kristall, in dem Abweichungen vom klassischen Verhalten insbesondere bei Propagation über weite Strecken oder Zeiträume auftreten. Aus Arbeiten vor allem von Gianluca Calcagni (Potsdam) ist kürzlich hervorgegangen, dass sich manche der bisher gehandelten Modelle bereits ausschließen lassen. Weiterhin ergeben sich charakteristische Signaturen zum Beispiel im Verhältnis der Dichtefluktuationen in der kosmischen Hintergrundstrahlung zu der Intensität von primordialen Gravitationswellen. Zumindest indirekt sind also konkrete Beobachtungsdaten über den Höllenzustand absoluter Leere zu erwarten, ohne sich auf Dantes Höllenfahrt direkt begeben zu müssen.

Literatur

[1] *C. Kiefer*, Quantum Gravity, Oxford Univ. Press, Oxford (2004); *C. Rovelli*, Quantum Gravity, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2004); *T. Thiemann*, Introduction to Modern Canonical Quantum General Relativity, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2007)

[2] *D. Oriti*, Approaches to Quantum Gravity, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2009); *G. F. R. Ellis*, *J. Murugan* und *A. Weltman*, Foundations of Space and Time, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2011)

[3] *J. Louis*, Die vielen Saiten der Stringtheorie, Physik Journal, Juli 2009, S. 29

[4] *J. Lewandowski, A. Okołów, H. Sahlmann* und *T. Thiemann*, Commun. Math. Phys. **267**, 703 (2006); *C. Fleischhack*, Commun. Math. Phys. **285**, 67 (2009)

[5] *C. Rovelli* und *L. Smolin*, Phys. Rev. D **52**, 5743 (1995)

[6] *A. Ashtekar*, Phys. Rev. Lett. **57**, 2244 (1986)

[7] *C. Rovelli* und *L. Smolin*, Nucl. Phys. B **331**, 80 (1990)

[8] *A. Ashtekar* und *J. Lewandowski*, J. Math. Phys. **36**, 2170 (1995)

[9] *T. Thiemann*, Phys. Lett. B **380**, 257 (1996)

[10] *G. Huisken* und *T. Ilmanen*, Int. Math. Res. Not. **20**, 1045 (1997)

[11] *M. Bojowald*, Loop Quantum Cosmology, Living Rev. Relativity **11**, 4 (2008), www.livingreviews.org/lrr-2008-4; *M. Bojowald*, Quantum Cosmology, Springer, New York (2011)

DER AUTOR

Martin Bojowald (FV Gravitation und Relativitätstheorie) promovierte an der RWTH Aachen im Jahr 2000 unter der Betreuung von Hans Kastrup, dem Stammvater der Schleifenquantengravitation in Deutschland. Er ist immer noch bemüht, sein ursprüngliches Promotionsthema – die Formulierung Schwarzer Löcher in der Schleifenquantengravitation – zu lösen. Während der Promotion war dies leider nicht gelungen; stattdessen hatte er die Schleifenquantenkosmologie entwickelt, die seitdem den Hauptteil seiner Forschungsinteressen darstellt. Privat spürt er dem Höllenzustand in klassischer Literatur sowie in zahlreichen Schwächephasen während seiner Langstreckenläufe in den Ausläufern der Appalachen nach.