Strömungsphysik

Hundert Jahre Grenzschichtphysik

Warum kann man sich durch Paddeln fortbewegen? Warum fliegt ein Flugzeug? Ludwig Prandtl lieferte die Erklärung für Strömungswiderstand und Auftrieb von umströmten Körpern.

Siegfried Großmann, Bruno Eckhardt und Detlef Lohse

Strömungen von Wasser oder Luft finden in Behältern statt. Sie bedürfen der dauernden Energiezufuhr durch Rühren, Scheren, Druck- oder Temperaturdifferenzen. Solche Strömungen haben also einen zumindest stückweise festen Rand, und sei es den des rührenden Paddels. Dass dieser Rand einen wesentlichen Einfluss auf die gesamte Strömung hat, verdankt er der Viskosität der Fluide. Dass er das Strömungsgeschehen auch weit von den Rändern entfernt und auch dann mitbestimmt, wenn bei starken Strömungen und großen Reynolds-Zahlen die Konvektion „das bisschen Zähigkeit" weit zu überwiegen scheint, verdanken wir der singulären Wirksamkeit der Viskosität durch Randschichtablösung und -wirbelbildung. Diese Einsicht haben wir erst seit Ludwig Prandtls bahnbrechender Arbeit, die am 12. August diesen Jahres ihren 100sten Geburtstag feierte, sich aber nach wie vor erfrischender jugendlicher Kraft und größten Ansehens und Einflusses in der Strömungsphysik erfreut.

Abb. 1: Ludwig Prandtl in den 1930er Jahren. Fotografie eines Gemäldes, das Vishnu Madhav Ghatage in seiner Zeit als Doktorand und Mitarbeiter von Prandtl in Göttingen gemalt hat. (Mit freundlicher Genehmigung von Prof. Roddam Narasimha, Indian Institute of Science, Bangalore)

Als der jugendliche Maschineningenieur Ludwig Prandtl am 12. August 1904 auf dem dritten internationalen Mathematikerkongress in Heidelberg seinen Beitrag „Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung" vortrug [1, 2], war er er im Grunde ein Newcomer auf dem Gebiet. Wenige Tage zuvor hatte er sein Ernennungsschreiben zum außerordentlichen Professor für technische Physik und landwirtschaftliche Maschinenkunde an der Universität Göttingen bekommen [3].[1)] Felix Klein war es gelungen, den seit 1901, gerade 26-jährig, als jüngster preußischer ordentlicher Professor für Mechanik in Hannover Lehrenden trotz des Abstiegs von einer ordentlichen auf eine außerordentliche Professur nach Göttingen zu locken. Er war durch dessen Vorträge auf der Tagung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Kassel im September 1903 auf das junge Genie aufmerksam geworden.

Prandtls auf dem Mathematikerkongress vorgetragene Ergebnisse resultierten aus seiner Ingenieurstätigkeit bei MAN, wo er sich im Zusammenhang mit der pneumatischen Absaugung von Hobelspänen erstmals mit der Strömungsphysik beschäftigt hatte. Sie erwiesen sich als ein epochaler Durchbruch, der die ästhetisch-mathematische, den realen Phänomenen aber oft recht ferne Fluiddynamik des 19. Jahrhunderts in die Welt der realen Strömungen katapultierte. Erstmals wurde klar, warum es Strömungswiderstand gibt, weshalb man sich durch Paddeln fortbewegen kann und warum durch die Luft bewegte Flügel einen Auftrieb erfahren.[2)] Die Arbeit [1] geriet zum Ausgangspunkt der Grenzschichtphysik von realen Strömungen aller Art und zum Kondensationskeim der modernen Fluiddynamik, wie sie sich im 20. Jahrhundert entwickelt hat.

Ideale Strömungen

Um den gewaltigen Erkenntniszuwachs durch Prandtls Arbeit [1] richtig einzuordnen, halten wir uns den damaligen Stand der Strömungsphysik vor Augen. Seit Leonhard Euler war bekannt, dass man Strömungen zweckmäßiger Weise durch ein vom Ort und der Zeit abhängiges Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ beschreibt. Für dessen zeitliche Entwicklung gab Euler 1755 die Gleichung

$$\partial_t \boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \frac{1}{\varrho}\nabla p \qquad (1)$$

an. Gleichung (1) ist die Newtonsche Bewegungsgleichung für die Flüssigkeitselemente des Fluids und entsteht aus der Vorstellung, dass deren Beschleunigung $d\boldsymbol{u}/dt = \partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ durch die Druckkräfte $-\nabla p$ be-

1) Auf [3] sei der Leser auch verwiesen, wenn er den Menschen Ludwig Prandtl und seinen weiteren Lebensweg kennenlernen möchte.

Prof. Dr. Siegfried Großmann, Prof. Dr. Bruno Eckhardt, Fachbereich Physik der Philipps-Universität, Renthof 6, 35032 Marburg; Prof. Dr. Detlef Lohse, Department of Applied Physics, University of Twente, P.O.Box 217, 7500 AE Enschede, Niederlande

 1617-9439/04/1010-31

2) Ludwig Prandtl war an der Erforschung der sich entwickelnden Fliegerei sehr interessiert, selbst aber kein aktiver Flieger, sondern Ballonfahrer. Seine zahlreichen Arbeiten zur Strömungsphysik um Tragflügel und Luftschrauben finden sich im langen Abschnitt III seiner Gesammelten Abhandlungen [2].

stimmt wird. Die *lokale* zeitliche Änderung $\partial_t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ ergibt sich als Summe der Druckkräfte und des Konvektionsterms $-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$. Im Unterschied zu Prandtl wollen wir uns hier auf inkompressible Strömungen beschränken, bei denen die Dichte ϱ konstant ist. Dann reduziert sich die Kontinuitätsgleichung $\partial_t\varrho + \mathrm{div}(\varrho\boldsymbol{u}) = 0$ auf

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0. \tag{2}$$

Das Strömungsfeld hat also keine Quellen.

Gleichung (1) ist eine in $\boldsymbol{u}$ nichtlineare Gleichung. An festen Oberflächen gilt die Randbedingung, dass das Fluid nicht eindringt, also die Normalkomponente u_n der Geschwindigkeit verschwindet. In stationären Strömungen folgt aus Gleichung (1) Daniel Bernoullis Gleichung (1738) $\varrho\boldsymbol{u}^2/2 + p = \mathrm{const.}$, die, über das Gesamtvolumen integriert, auch die zeitliche Erhaltung der gesamten (kinetischen) Energie des Strömungsfeldes $\int (\varrho\boldsymbol{u}^2/2)\, dV$ widerspiegelt. Sofern eine Strömung keine Wirbel hat, entstehen auch keine, hat sie welche, gelten die Wirbelerhaltungssätze (Hermann von Helmholtz, 1858; William Thomson, 1869). Aus (1) folgt eine wunderbare Mathematik der Strömungsfelder, eng verbunden mit der Funktionentheorie. Allerdings sagt die Gleichung auch, dass ein Paddel widerstandsfrei durch eine Strömung gleitet, in offenkundigem Widerspruch zur Realität. Auch sind reale Strömungen keineswegs energieerhaltend: Sie kommen zum Erliegen, wenn nicht andauernd, etwa durch Rühren, Energie zugeführt wird. Es fehlt nämlich in (1) noch die Viskosität.

Navier-Stokes-Gleichung

Nach Euler dauerte es ein Jahrhundert, bis es Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (1823) bzw. Claude Louis Maria Henri Navier (1827) und George Gabriel Stokes (1845) gelang, den Reibungseinfluss in die Strömungsgleichung einzubeziehen. Sie erkannten, dass eine Materialeigenschaft, die dynamische Viskosität η bzw. die kinematische Viskosität $\nu = \eta/\varrho$ berücksichtigt und die Gleichung (1) um einen Term erweitert werden muss. Es entsteht die Navier-Stokes-Gleichung

$$\partial_t\boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \frac{1}{\varrho}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{u}\,. \tag{3}$$

Die Viskosität ist dafür verantwortlich, dass Flüssigkeiten an Oberflächen haften, und nicht nur die normalen, sondern auch die tangentialen Geschwindigkeitskomponenten verschwinden, wenn der Körper ruht, d. h. der ganze Geschwindigkeits*vektor* verschwindet, $\boldsymbol{u}|_{\text{Oberfläche}} = 0$.

Die dynamische Viskosität lässt sich durch die definierende Gleichung $F = \eta AU/d$ für die Zugkraft F messen, die erforderlich ist, um eine Platte der Fläche A parallel zu einer festen Wand im (kleinen) Abstand d mit der Geschwindigkeit U durch eine Flüssigkeit zu ziehen. Die Normierung auf die Dichte hat übrigens die zunächst verblüffende Konsequenz, dass die kinematische Viskosität von Luft, $\nu = 15\cdot10^{-6}$ m^2/s, größer ist als die von Wasser, $\nu = 1\cdot10^{-6}$ m^2/s (beides bei Zimmertemperatur).

Die relative Bedeutung des konvektiven, quadratischen Gliedes im Vergleich zum viskosen, linearen Glied wird durch die Reynolds-Zahl Re beschrieben (Osborne Reynolds, 1883). Re ist das Verhältnis beider Terme, $UL^{-1}U/\nu L^{-2}U$, also $Re \equiv UL/\nu$. Dabei ist L eine durch die Geometrie des Strömungsfeldes von außen vorgegebene Länge, also etwa der Rohrdurchmesser, der Plattenabstand in einem Strömungskanal, die Länge einer angeströmten Platte o. ä., und U ist eine typische, ebenfalls von außen vorgegebene Geschwindigkeit der untersuchten Strömung.

Das in $\boldsymbol{u}$ lineare Zähigkeitsglied in (3) zerstört die mathematische Eleganz der nichtlinearen Eulerschen Gleichung nachhaltig. Daher studierte man im 19. Jahrhundert bevorzugt zwei Grenzfälle. In einem Fall, bei nur kleinen Geschwindigkeiten U, genauer bei kleiner Reynolds-Zahl, wurden die quadratischen Glieder gegenüber den viskosen vernachlässigt. Das ergibt die Stokesschen viskosen Strömungen, mit der nunmehr linearen Bewegungsgleichung

$$\partial_t\boldsymbol{u} = \nu\Delta\boldsymbol{u}. \tag{4}$$

Diese Stokes-Gleichung hat heutzutage neue Relevanz in der Mikrofluidik bekommen, in der die Reynolds-Zahl wegen der kleinen Längenskala L oft kleiner als 1 ist. Im anderen Grenzfall großer Reynolds-Zahl, also großer Skala L oder Strömungsgeschwindigkeit U, schienen die viskosen Kräfte gegenüber den konvektiven, quadratischen vernachlässigbar klein, so dass sich wieder die Euler-Gleichung (1) ergab – um den Preis mangelnder Realitätsnähe, etwa dem fehlenden Strömungswiderstand.

Prandtls Ansatz

Prandtls genialer Beitrag zum Verständnis realer Strömungen war die Einsicht, dass vor allem in der Nähe der festen Ränder der viskose, lineare Term *immer* den konvektiven, quadratischen Term dominiert, da die Geschwindigkeit dort klein werden *muss*. Damit ist die Navier-Stokes-Gleichung *immer* anders als die Eulersche für die idealen, also zähigkeitslosen Strömungen, egal wie klein die kinematische Viskosität bzw. wie groß Re auch immer sein mag. Wörtlich schreibt Prandtl [1]: „Wenn man von der Bewegung mit Reibung zur Grenze der Reibungslosigkeit übergeht, so erhält man etwas ganz anderes als die Dirichlet-Bewegung“ (gemeint ist die ideale Eulersche Strömung ohne jede Viskosität). Kurz: $\nu \to 0$ ist etwas anderes als $\nu = 0$.

Ludwig Prandtl

- 4. Feb. 1875: geboren in Freising
- 1898 Studium in München, TU, Abschluss Maschineningenieur
- 29. Jan. 1900: Promotion an der Universität München; Arbeit bei MAN in Nürnberg
- 21. Aug. 1901: ordentlicher Professor, Lehrstuhl für Mechanik an der Technischen Hochschule Hannover
- 1. Juli 1904: Entscheidung für außerordentliches Ordinariat für technische Physik und landwirtschaftliche Maschinenkunde an der Universität Göttingen
- 12. Aug. 1904: Vortrag auf dem III. Mathematikerkongress in Heidelberg; Begründung der Grenzschichttheorie
- 1. Sept. 1904: Dienstantritt in Göttingen
- 1907: Persönlicher Ordinarius nach der Rückgabe eines Rufes nach Stuttgart; Gründung der Aerodynamischen Versuchsanstalt
- 1912: Gründung der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt (heute: Deutsche Gesellschaft für Luft- und Raumfahrt)
- 1922: Gründung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM)
- 1925: Gründung des Kaiser-Wilhelm Instituts für Strömungsforschung
- 1932: turbulente Grenzschicht, logarithmisches Geschwindigkeitsprofil
- Ludwig Prandtl betreute 83 Dissertationen. Er wurde mit den Ehrenpromotionen der Technischen Hochschulen Danzig, Zürich, Prag, Trondheim und der Universitäten Cambridge, Bukarest und Istanbul ausgezeichnet. Ein Nobelpreis blieb ihm verwehrt.
- 1947: Emeritierung
- 6. Sept. 1947: Ehrenmitglied der DPG
- 15. Aug. 1953: gestorben in Göttingen

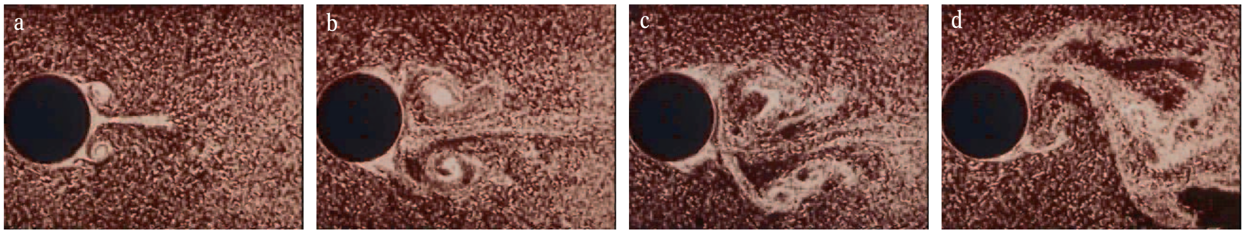

Abb. 2:
Visualisierung der Strömung um einen Zylinder mit Hilfe von Eisenglimmerplättchen. Diese Bilder entstammen einem Film, den Prandtl in den zwanziger Jahren aufgenommen hat. Beim Anfahren löst sich die Grenzschicht von der Zylinderoberfläche, es bilden sich hinter dem Zylinder Wirbel (a), die dann von der Strömung weggetragen werden (b). Dahinter bilden sich dann erneut Wirbel (c, d). Der Film ist unter http://multimedia.physik-journal.de zu finden. (aus [4])

Diese Erkenntnis wird auch heute noch, 100 Jahre nach Prandtl, immer wieder mal missachtet.

Mathematisch handelt es sich um einen Fall singulärer Störungen. Die Vernachlässigung der viskosen Terme reduziert die höchsten (zweiten) Ableitungen in der Differentialgleichung von zweiter Ordnung im Raum auf die erste Ordnung: Damit können nicht mehr alle physikalisch notwendigen Randbedingungen erfüllt werden. Ein Eulersches Fluid ($\nu = 0$) kann zwar in eine Grenzfläche nicht eindringen, wohl aber an der Oberfläche entlangrutschen. Seine Randbedingung ist daher das Verschwinden nur der Normalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit. Ein viskoses Fluid wird, egal wie klein ν ist, immer an der Oberfläche haften. Deshalb verschwindet in diesem Fall die Geschwindigkeit dort insgesamt. Man unterscheidet „free-slip"-Randbedingungen für Eulersche Fluide und „no-slip"-Randbedingungen für viskose Fluide. Was no-slip heißt, kann man beobachten, wenn man den Staub von seinen Brillengläsern wegzupusten trachtet: vergeblich, an der Glasoberfläche bewegt sich die Luft nicht, wie stark man auch pustet.

Im Falle von realen, no-slip-Randbedingungen steigt das Geschwindigkeitsfeld erst in einem endlichen Abstand von der Oberfläche von der Geschwindigkeit 0 an der Oberfläche auf die Anströmgeschwindigkeit U im Inneren der Strömung an. Dieser Übergangsbereich ist die Prandtlsche Grenzschicht. Prandtl erkannte, dass die Grenzschicht eine Dicke von $\delta \propto L/\sqrt{Re}$ hat. Sie wird also mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit, also wachsendem Re, immer dünner, bleibt allerdings für jedes $\nu \neq 0$ endlich dick, wie klein ν auch sei. Es gilt für festes U und L nämlich $\delta \propto \sqrt{\nu}$.

Die zweite wichtige Einsicht Prandtls ist die Beobachtung, dass sich die Grenzschicht vom Rand „ablösen" kann, und dass so die viskositätsdominierten und meist Wirbel tragenden Randeinflüsse auch ins Innere der Strömung gelangen können. Eine idealisierte Form von Randablösung gibt es auch bei Eulerschen Strömungen, nämlich in Form von Unstetigkeitsflächen, die vom Rand ins Innere verlaufen. Bei realen, viskosen Fluiden sind es aber keine Flächen unstetigen Sprungs der Tangentialgeschwindigkeiten vor und hinter der Fläche, sondern endlich breite Übergangsbereiche, eben abgelöste Grenzschichten. Diese trennen hier allerdings zwei unterschiedliche Strömungsbereiche anstatt, wie sonst, eine Strömung von einer festen Oberfläche.

Der Leser stelle sich diese Ablösungen nicht zu wörtlich vor. Natürlich gibt es auch auf der Oberfläche hinter einer Ablösung wieder eine anliegende Randschicht, eben wegen der Haftbedingungen. Aber vor und nach der Ablösung kann die Strömung sehr verschieden sein, ganz andere Muster haben. Vor allem aber trägt die abgelöste Schicht viskositätsdominierte Elemente ins Strömungsinnere, mit dramatischen Auswirkungen auf die gesamte Strömung. Wäre diese zum Beispiel ursprünglich eine glatte, laminare Potentialströmung gewesen, so wäre sie nun durch die Ablösung mit viskosen Einflüssen verseucht, die auch zur Wirbelbildung führen. Ihr Charakter hat sich völlig verändert. Abbildungen 2 und 3 zeigen Visualisierungen von Strömungen mit Randschichtablösung (s. auch Abb. 5).

Aber auch ohne diese expliziten Randeinflüsse spürt die Strömung lokal stets die Zähigkeit. Diese erzwingt nämlich eine glatte Orts- und damit auch Zeitabhängigkeit von $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$. Die Differenz $\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ wächst zunächst linear mit $\boldsymbol{r}$ an. Turbulente Wirbel können deshalb nicht beliebig klein sein; die Strömung ist auf kleinen Abständen glatt.

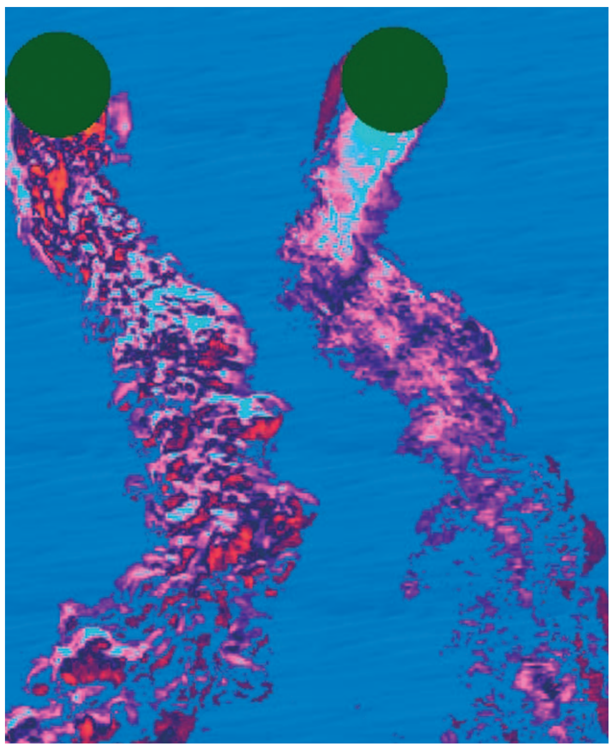

Abb. 3:
Bei großer Reynolds-Zahl geht die geordnete (Theodor) von Kármánsche Wirbelstraße in einen ungeordnet verwirbelten Nachlauf über. Er wird hier am Beispiel einer schnell in Wasser spiralförmig aufsteigenden leichten Kugel mit Hilfe der Schlierentechnik sichtbar gemacht. Die Schlierentechnik nutzt die Abhängigkeit des Brechungsindexes der Flüssigkeit von der Temperatur. Die sich mit der Geschwindigkeit $U = 390$ mm/s bewegende Kugel hat einen Durchmesser von $L = 9{,}5$ mm, so dass sich mit der kinematischen Viskosität des Wassers von $\nu = 0{,}8\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s}$ bei einer Temperatur von 30 °C für die Reynolds-Zahl ein Wert $Re = 4600$ ergibt. Die relative Dichte der Kugel zum Wasser ist 1/2, der Temperaturgradient beträgt 1 K/cm. (Foto: Christian Veldhuis, Twente).

Die Wirksamkeit von ν im Inneren von Strömungen ist auch der Grund für deren dauernden Energieverlust. Die Dissipationsrate pro Masse ist $\varepsilon = \nu \langle (\partial u_i / \partial x_j)^2 \rangle_{V,t}$, gemittelt über Volumen und Zeit. Wenn ν kleiner wird, wachsen die Geschwindigkeitsgradienten an, und zwar so, dass ε auch für $\nu \to 0$ endlich bleibt.

Prandtl sah die wesentlichen Konsequenzen der Grenzschichten, nachdem er seine Überlegungen auch experimentell mit einem Strömungsapparat untersucht und durch auf Vorrat präparierte Eisenglimmerplättchen aus seinem Jahr bei MAN sichtbar gemacht hatte. Abb. 2 zeigt sehr schön die Ausbildung der Wirbel im Nachlauf und den Wegtransport von der Oberfläche in die Strömung hinein.

Die Prandtlschen Grenzschichtgleichungen

Es gelang Prandtl auch, das Profil der Randschicht zu berechnen, indem er die Navier-Stokes-Gleichung scharfsinnig so vereinfachte, dass sie behandelbar wurde, ihre wesentlichen Eigenschaften aber eben *nicht* verloren gingen. Im stationären Fall zum Beispiel, also wenn $\partial_t \boldsymbol{u} = 0$ gilt, ist entlang einer angeströmten Platte (Abb. 4) in x- (Platten-) Richtung nicht nur das konvektive Glied $u_x \partial_x u_x$ wichtig, sondern auch die

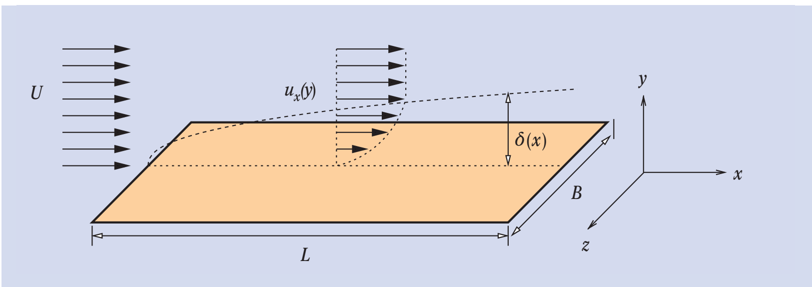

Abb. 4:
Skizze der von Prandtl diskutierten Strömungssituation des Anströmens einer Platte der Tiefe *L*. Es bildet sich eine Randschicht der Dicke $\delta(x)$ aus, die bei wachsender Anströmgeschwindigkeit wie $1/\sqrt{Re}$ dünner wird.

Änderung von u_x senkrecht zur Platte (als y-Richtung bezeichnet), also auch $u_y \partial_y u_x$. Und natürlich darf die Zähigkeit nicht fehlen, die ja der Hauptspieler in der Grenzschicht ist. In $\nu \Delta u_x = \nu(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) u_x$ dominiert die starke Veränderung in y-Richtung. So entsteht die berühmte Prandtlsche Grenzschichtgleichung

$$u_x \partial_x u_x + u_y \partial_y u_x + \partial_x p / \varrho = \nu\, \partial_y^2 u_x \; . \tag{5}$$

Hinzu kommt die Inkompressibilität $\partial_x u_x + \partial_y u_y = 0$. Konsequent wird die laterale (z-)Bewegung vernachlässigt. Zur Lösung dieser immer noch komplizierten partiellen Differentialgleichung erkannte Prandtl, dass man u_x als Funktion der „Skalenvariablen" $y/\sqrt{x}$ studieren sollte. Dann ist (5) nämlich durch Quadratur zu lösen. Er tut das ebenso, wie er auch den Strömungswiderstand F_d der Platte ausrechnet (d wie „drag"),

$$F_\mathrm{d} = 1{,}1 \cdot BL\varrho U^2 / \sqrt{Re}. \tag{6}$$

B ist die seitliche Breite und L die Tiefe der Platte in Anströmungsrichtung. In seinem Konferenzbericht von 1904 stehen zwar nur die Ergebnisse, aber heute würden wir zur Herleitung wie folgt schließen:

Offenbar kann man (5) zunächst dadurch dimensionslos machen, dass man mit L/U^2 multipliziert, und $u_x/U = \tilde{u}_x$, $x/L = \tilde{x}$ als dimensionslose Variable der Ordnung $O(1)$ einführt. Das gilt dann auch für das Druckglied, was in $-U \partial_x U$ umgerechnet werden kann, also vorgegeben und danach $O(1)$ ist. Damit aber das ν-Glied seine Rolle spielen kann, muss im verbleibenden Ausdruck $\nu(L/U)\partial_y^2 \tilde{u}_x$ offenbar y genau in *der* Weise dimensionslos gemacht werden, dass ein Term $\partial_{\tilde{y}}^2 \tilde{u}_x$ entsteht, der ebenfalls $O(1)$ ist. Folglich *muss* man setzen

$$\frac{y}{L/\sqrt{Re}} = \tilde{y}, \tag{7}$$

wobei $Re = UL/\nu$. Hat man sich nun bei y festgelegt, folgt aus dem einzig noch nicht behandelten zweiten Konvektionsterm zwangsläufig, wie man u_y dimensionslos zu machen hat:

$$\frac{u_y}{U/\sqrt{Re}} = \tilde{u}_y \, . \tag{8}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (Inkompressibilitätsbedingung) wird $\partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_x + \partial_{\tilde{y}} \tilde{u}_y = 0$, beide Terme von O(1).

Mehr ist für das physikalische Verständnis der bisher genannten Prandtlschen Einsichten gar nicht zu tun. Man sieht schnell, dass genau die Kombination $y/\sqrt{x} = \tilde{y}/\sqrt{\tilde{x}} \cdot \sqrt{\nu/U}$ von der Plattentiefe L unabhängig ist, also eine geometrieunabhängige Lösung erlaubt. (Hieraus ist kurz danach die Blasiussche analytische Lösung erwachsen; Heinrich Blasius war einer der ersten Doktoranden von Prandtl und promovierte 1907.)

Man denke sich das Lösungsprofil $\tilde{u}_x(\tilde{x}, \tilde{y})$ bestimmt und lese seine dimensionslose Dicke $a(\tilde{x})$ ab. Der Wert von a hängt natürlich von der genauen Definition dessen ab, wo man die Grenzschicht als beendet ansieht, etwa wenn 90 % der asymptotischen Strömungsgeschwindigkeit erreicht sind. Die Grenzschichtdicke $y = \delta$ ist dann $\delta = aL/\sqrt{Re}$. Für große Reynolds-Zahlen des die Platte anströmenden Fluids, etwa $Re = 10^6$, ist die Randschichtdicke also gerade mal etwa 0,1 % der Plattentiefe L: ein hauchdünner Überzug, aber für den Zähigkeitseinfluss und damit für den Strömungswiderstand verantwortlich!

Das vorgetragene Argument hat vereinfacht, dass die Randschicht selbstverständlich vom Abstand x vom vorderen Plattenrand abhängt. Es wird sofort einleuchten, dass $\delta(x) \sim \sqrt{x\nu/U}$ ist. Auch diese Form enthält noch die vereinfachende Annahme einer x-unabhängigen Anströmgeschwindigkeit U.

Man wird sich fragen, ob bei so großen Reynolds-Zahlen die Randschicht nicht längst turbulent ist, also die statische Prandtl-Gleichung (5) gar nicht mehr gilt. Die Antwort darauf ist mehrschichtig. Zunächst machen wir uns klar, dass die auf der Randschichtdicke δ basierte Reynolds-Zahl so groß gar nicht ist! Nämlich, diese Reynolds-Zahl lautet

$$Re_\delta \equiv U\delta/\nu = a\sqrt{Re} \ll Re. \tag{9}$$

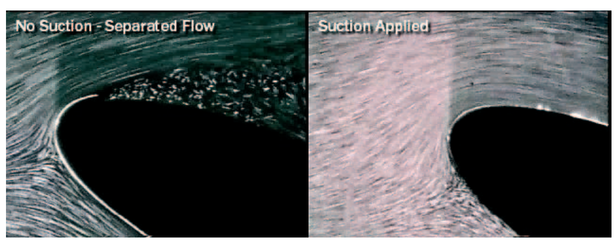

Abb. 5:
Ablösung und Grenzschichtbeeinflussung an einem schräg gestellten Körper. Klar erkennbar ist links die laminare Strömung vor dem Körper, die Ablösung der Grenzschicht und die turbulente Strömung hinter der Ablöselinie. Auf der Unterseite bleibt die Strömung weitgehend laminar. Saugt man Fluid im Ablösebereich durch den Rand ab (rechts), lässt sich der Druckanstieg und damit die Ablösung der Grenzschicht verhindern. Das verringert den Strömungswiderstand. (aus [4])

Ein Übergang zur Turbulenz in der Randschicht findet also so schnell gar nicht statt. Wenn er aber erfolgt, nämlich bei Re_δ von der Ordnung 400, kann man die Eigenschaften der turbulenten Randschicht auch wieder bei Prandtl nachlesen, siehe [5]. Es bildet sich dann unmittelbar an der Oberfläche eine sehr dünne, im zeitlichen Mittel linear anwachsende Schicht aus, die sogenannte „zähe Unterschicht", anschließend aber ein logarithmisches Profil. Bei turbulenter Rohrströmung füllt dieses den ganzen Rohrdurchmesser aus.

Und schließlich lässt sich auch der Strömungswiderstand der Platte und wie er von den physikalischen Bedingungen abhängt ohne Schwierigkeiten aus der Skalierung (7) bestimmen: die Reibungskraft pro Fläche ist nach dem oben Gesagten

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \eta\partial_y u_x|_{y=0} = \eta\, U/(L/\sqrt{Re}) \cdot \partial_{\tilde{y}}\tilde{u}_x \\ &\propto \eta\,(U^3/L\nu)^{1/2} \propto (\eta\varrho\, U^3/L)^{1/2}.\end{aligned} \tag{10}$$

Auf die ganze Plattentiefe L und die seitliche Breite B bezogen ergibt sich daraus die obige Prandtl-Formel $F_\mathrm{d} = B\,L\,\sigma_{xy} \propto B\,L\,Re^{-1/2}\,\varrho U^2$. (Den Vorfaktor 1,1 hatte Prandtl durch die numerische Lösung gefunden.)

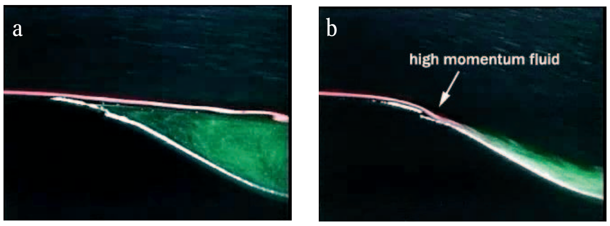

Abb. 6:
Neben der Absaugung ist es auch möglich, die Grenzschicht durch Einblasen von schnellem Fluid zu stabilisieren, wie hier für einen Tragflügel gezeigt wird. (aus [4])

Wie genial und außerordentlich Prandtls Ergebnisse waren, wird noch deutlicher, wenn man sich den Ausbildungsstand des jungen Prandtl vorstellt, wie er ihn in seinen eigenen Rückerinnerungen schildert [6]: Anlässlich der Verleihung seiner Ehrenmitgliedschaft in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft am 6. September 1947 berichtet Prandtl über einige Schritte seiner Entwicklung in Erwiderung auf Werner Heisenbergs Glückwunsch-Ansprache.

Ablösung, Strömungswiderstand und Fliegen

Zu den zweifellos bedeutendsten Erkenntnissen Prandtls gehören seine Beobachtungen und seine Erklärung des Phänomens der *Ablösung*. Sie ist der eigentliche Schlüssel, um den Strömungswiderstand und den Auftrieb von umströmten Körpern zu verstehen. Mit dem real ja vorhandenen Strömungswiderstand in laminaren, wirbelfrei erscheinenden Strömungen hatte die klassische, mathematisch orientierte Hydrodynamik des 19. Jahrhunderts einen Erklärungsnotstand. Rechnet man nämlich aus, welche Widerstandskraft ein Körper in einer laminaren Potentialströmung erfährt, so findet man: keine. Dieses Paradoxon hatten schon D'Alembert und auch Euler bemerkt.

Des Rätsels physikalische Lösung ist die *Ablösung der Grenzschicht* vom Körper. Entlang der von der Ablöselinie am Körper ausgehenden Ablösefläche wird die ankommende laminare Strömung von einem dahinter sich in der Regel wirbelhaft ausbildenden ganz anderen Strömungsbereich abgetrennt. In ihm zieht der Körper eine Schleppe von Wirbeln hinter sich her, Nachlauf genannt. Dieser Nachlauf kann breit oder auch sehr schmal sein, je nach der Geometrie und Lage des umströmten Körpers. Zum Beispiel hat der von einer umströmten Kugel erzeugte Nachlauf zunächst etwa Kugeldurchmesser. Stromlinienförmige Tragflügelprofile verursachen dagegen sehr schlanke Nachläufe. Jedenfalls sind die Nachläufe wirbelhaltig, verbreitern sich und schwächen sich mit zunehmendem Abstand vom Körper entsprechend ab. Aber los wird man ihren Einfluss eben nicht mehr! Berücksichtigt man in der Rechnung diesen Nachlauf, finden Strömungswiderstand und Auftrieb von umströmten Körpern ihre quantitative Erklärung.

Besonders anschaulich ist, wodurch die Widerstandskraft F_x $(=F_\mathrm{d})$ in Strömungsrichtung entsteht. Die Wirbel im Nachlauf werden mit der Strömungsschleppe laufend abtransportiert und am Körper durch Ablösung immer wieder neu erzeugt. Das erfordert eine andauernde Einfütterung von Energie bzw. eine zur Geschwindigkeit proportionale Leistung $W = F_x U$. Ohne zugeführte Leistung keine Bewegung des Körpers relativ zur Flüssigkeit. Genauere Rechnung ergibt

$$F_x = -\,\varrho U \int_{A_\mathrm{Nachlauf}} v_x\, dydz. \tag{11}$$

A_Nachlauf bezeichnet eine Querschnittsfläche im Nachlauf (in ausreichendem Abstand) hinter dem Körper. v_x ist die Geschwindigkeits*abweichung* von der mittleren Anströmgeschwindigkeit U. Sie ist im Nachlauf natürlich negativ, da die Strömung ja in der Randschicht abgebremst worden ist.

Ganz entsprechend liefert

$$F_y = -\,\varrho U \int_{A_\mathrm{Nachlauf}} v_y\, dydz \tag{12}$$

eine quer zur Strömung gerichtete Kraft, die, sofern sie nach oben zeigt, als Auftrieb bezeichnet wird (auch F_l genannt, l wie „lift"). Wiederum ist der Nachlauf entscheidend, erzeugt und begrenzt durch die Ablösung. Flugzeuge fliegen also wegen – der Ablösung!

Aus (12) kann man übrigens die oft zur Berechnung des Aufriebs herangezogene Kutta-Joukowski-Formel für F_l herleiten. Und (12) ist auch das eigentliche Geheimnis hinter den zahlreichen Erklärungen für das Fliegen, die sich der Druckverteilung oder der Stromlinien um den Flugkörper bedienen. Zwar kann man die Druckkräfte $-\mathrm{grad}\, p$ bei stationärer Umströmung aus den Stromlinien bestimmen, nämlich via $(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad})\,\boldsymbol{u}$, und zwar sieht man dann bei geeigneten Profilen oberhalb des Tragflügels Bereiche mit einem Unterdruck

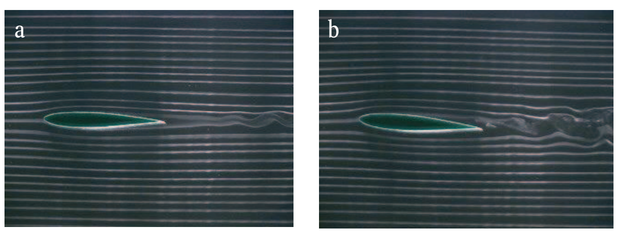

Abb. 7:
Das Strömungsprofil um ein Tragflügelmodell hängt vom Anstellwinkel ab: Parallel zur Strömungsrichtung orientiert (0 Grad; a) gibt es einen nur schmalen, verwirbelten Nachlauf, der Widerstand ist klein und bei symmetrischem Profil liefert Gl. (12) keinen Auftrieb, $F_y = 0$. Bei einem Anstellwinkel von 5 Grad (b) wird der turbulente Nachlauf breiter und asymmetrisch, was einen erhöhten Widerstand und einen Auftrieb zur Folge hat. Bei sehr großen Anstellwinkeln wächst der Widerstand noch, aber der Auftrieb nimmt wegen des plötzlich sehr weit vorn erfolgenden Abrisses der Grenzschicht stark ab, was von den Piloten gefürchtet wird. (aus [4])

und unterhalb solche mit einem Überdruck. Es kommt aber auf die Gesamtkraft an, also auf den Impulsstrom durch eine den Körper ganz umschließende Fläche. Und diese erfasst bei genauerem Hinsehen auch Bereiche mit anderen Druckverhältnissen. Bei wirbelloser Strömung ergäbe sich dann tatsächlich als Gesamtbilanz $F_y = 0$. Erst der Nachlauf infolge Ablösung macht diese Gesamtbilanz je nach Profil von null verschieden, $F_y \neq 0$, liefert den Auftrieb, lässt ein Flugzeug fliegen. Übrigens ist (12) genau das, was bei der Berechnung des Impulsstromes durch eine umhüllende Fläche schlussendlich herauskommt. Die Abbildungen 5 bis 8 demonstrieren das Gesagte.

Wodurch kommt es nun aber überhaupt zur Ablösung, deren physikalische Konsequenzen so aufregend sind, und wo geschieht das? Auch das beschreibt Prandtl bereits in seiner wegweisenden Arbeit [1]. In Oberflächennähe kann die umgebende Strömung je

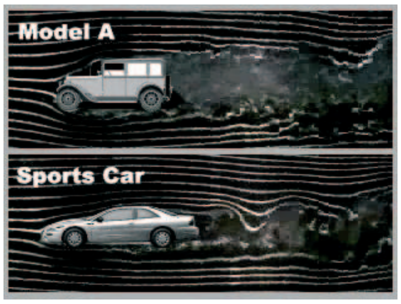

Abb. 8:
Die Fortschritte in der Entwicklung von stromlinigen Fahrzeugen mit entsprechend reduziertem Luftwiderstand sind an diesem Vergleich zwischen einem Ford Model A und einer modernen Limousine an dem deutlich schmaleren turbulenten Nachlauf abzulesen. (aus [4])

nach Krümmung oder Form der Oberfläche schneller oder langsamer sein; „umgebend“ heißt dabei, dicht an der Grenzschicht, aber doch bereits gerade außerhalb, wo also die Strömung laminar ist. Wird etwa eine Kugel angeströmt, so ist die Strömungsgeschwindigkeit unmittelbar vor der Kugel, die ja ein Hindernis darstellt, sehr klein. Bei der Umströmung des Hindernisses nimmt sie zu und dahinter wieder ab. Nach der Bernoulli-Gleichung $(1/2)\varrho \boldsymbol{u}^2 + p = \mathrm{const}$, die ja außerhalb der Grenzschicht in der laminaren Strömung gilt, ist also der Druck vor der Kugel groß, nimmt dann zur vollen Kugeldicke hin auf ein Minimum ab, um danach auf der Kugelrückseite wieder zuzunehmen, wenn auch wegen des Nachlaufs nicht mehr auf den Wert vor der Kugel. Dieser Druckanstieg auf der Kugelrückseite verlangsamt die Strömungsgeschwindigkeit u_x parallel zur Oberfläche, auch in der Grenzschicht selbst. (x bezeichnet im Folgenden die Koordinate entlang der gekrümmten Oberfläche, y diejenige im jeweiligen Punkt senkrecht dazu, also in Normalenrichtung.) Diese ist ja wegen des Haftens an der Oberfläche sowieso schon langsamer. Nun hat sie noch gegen den steigenden Druck „anzukämpfen“. Deshalb wird u_x noch kleiner, wird sogar negativ. In einer zunächst sehr dünnen, oberflächennahen Schicht gibt es dann eine zur äußeren Anströmung entgegengesetzte Strömung. Man sieht sehr anschaulich vor seinem Auge, wie sich daraus Ablösung und Wirbel entwickeln. Beispiele sind in Abb. 2 und 3 und besonders deutlich in Abb. 5 zu sehen.

Die quantitative Bedingung für die Ablösung lautet also, dass die Normalableitung der Tangentialgeschwindigkeit an der Oberfläche verschwindet,

$$(\partial u_x/\partial y)|_{\text{Oberfläche}} = 0. \qquad (13)$$

In den Punkten der Ablöselinie entlang der Oberfläche gibt es keinen positiven Geschwindigkeitsanstieg mehr, aber auch gerade noch keinen negativen. Ablösung erfolgt, wo die bereits oben bei der Definition der dynamischen Viskosität η angesprochene Scherkraft bzw. -spannung

$$(F_x/A)|_{\text{Oberfläche}} = \eta(\partial u_x/\partial y)|_{\text{Oberfläche}} = 0 \qquad (14)$$

verschwindet. Bei umströmten Kugeln beträgt der vom Staupunkt aus gemessene azimuthale Winkel bis zum Ablösepunkt etwa 110°. Erste Berechnungen der Ablösung führte Prandtls Doktorand Heinrich Blasius in seiner Dissertation 1907 durch. Weil sich die x-Koordinate in den Prandtl-Gleichungen ohne Zuhilfenahme von U dimensionslos machen lässt, ist die Ablösestelle auch nicht von U und somit nicht von der Reynolds-Zahl Re abhängig. In diesem Sinne sind die immer wieder zu beobachtenden 110° bei Kugeln universell (siehe die Abb. 2 und 3).

3) Mit [9] lässt sich vielleicht etwas besser verstehen, welche besondere Konstellation dazu führte, dass Prandtl der Nobelpreis versagt blieb. Seine außergewöhnlichen Leistungen waren bei den zeitgenössischen Strömungsmechanikern völlig anerkannt. So schrieb der zweite herausragende Fluiddynamiker des letzten Jahrhunderts, Geoffrey Ingram Taylor, in einem Brief vom 15. November 1935 an Ludwig Prandtl: „I feel very strongly that if the Nobel prize is open to non-atomic physicists it is definitely insulting to us that our chief – and I think that in England and USA at any rate that means you – should never have been rewarded in this way.“ ([10], S. 185)

Weiterentwicklung

Die Prandtlsche Grenzschichttheorie und ihre wesentlichen physikalischen Aspekte – Schichtdicke wie $1/\sqrt{Re}$ abnehmend mit zunehmender Reynolds-Zahl, Ablösung vom Rand kontaminiert die ganze Strömung, Erklärung von Strömungswiderstand und Auftrieb – fand sehr bald quantitative experimentelle Bestätigung. Schon die Dissertation seines Schülers Heinrich Blasius brachte sehr genaue und nachmessbare Ergebnisse über das Geschwindigkeitsprofil angeströmter Platten und über die Lage der Ablösungslinien sowie die Strömungsstruktur in ihrer Nachbarschaft. Die Bestimmung von Strömungswiderständen und die Optimierung des Auftriebs durch geeignete geometrische Formgebung oder durch Einflussnahme auf die Ablösung ist inzwischen Alltag der Flugzeug- und Fahrzeugindustrie geworden.

Viele Verzweigungen der Grenzschichtidee haben sich in der Strömungsphysik entwickelt (siehe z. B. das Standardwerk [7], den Rück- und Ausblick [8], u. a.). Um nur die Wichtigsten zu nennen: Ausarbeitung der 2- und 3-dimensionalen laminaren Grenzschichttheorie, Näherungsverfahren zur Ermittlung der Widerstands- und Auftriebskräfte von beliebigen Tragflügelprofilen, Turbinenschaufeln u. a., Singularitätentheorie der Ablösung, nichtstationäre Randschichten, Instabilitäten in Grenzschichten, turbulente Grenzschichten, Wärme- und Massentransport durch Grenzschichten, kompressible Grenzschichten, Grenzschichten bei Überschallanströmung, technische Kontrolle von Ablösungen, Reaktions- und Verbrennungsrandschichten, magnetohydrodynamische Grenzschichten, usw. Es gibt kaum ein Strömungsproblem, das um Prandtls Einsichten herumkommt, theoretisch wie experimentell ist die Fülle der Ergebnisse. So sind etwa auch ausgeklügelte Messverfahren für die Druckverteilungen und die Ablösungen entwickelt worden und vieles andere mehr.

Würdigung

Wenn man die Bedeutung und den wissenschaftlichen Einfluss der 1904er-Arbeit von Ludwig Prandtl einordnen möchte, so sieht man sie schnell als ein weiteres Element im Konzert der bahnbrechenden Arbeiten aus den schier unglaublich fruchtbaren Anfangsjahren des vorigen Jahrhunderts. Max Planck führte die Quantelung der Energie ein, $\hbar$ als neue Naturkonstante trat in die Physik. Eine weitere Konstante war gerade mit der Boltzmann-Konstanten $\varkappa$ dazugekommen. Albert Einstein hatte durch sorgfältige, vorurteilsfreie, gedankliche Analyse die spezielle Relativitätstheorie geschaffen und die charakteristische Invarianzgruppe der Maxwellschen Elektrodynamik identifiziert; die Lorentz-Gleichungen als solche gab es schon. Auch die Brownsche Bewegung war bekannt, Einsteins Analyse der Diffusion aber ein Durchbruch für die Statistische Physik.

Ludwig Prandtl fand seinerseits die Navier-Stokessche Strömungsgleichung vor. Seine Experimente und gleichzeitige scharfsinnige gedankliche Analyse aber brachten erst die entscheidenden Einsichten über die in den Bewegungsgleichungen wirksamen physikalischen Mechanismen bei realen Strömungen. Die Arbeit [1] befruchtete ein stagnierendes Gebiet und eröffnete eine neue Entwicklung der gesamten Hydrodynamik. Jung an Jahren (gerade mal 29-jährig) und jung im Gebiet (seine erste strömungsmechanische Veröffentlichung) gelang ihm mit der Grenzschichttheorie ein revolutionärer Durchbruch von einer mathematisch-ästhetischen zu einer realen Hydrodynamik und damit der Ausbruch aus einer langjährigen Sackgasse.

Man wird also [1] in die Reihe der Ausnahme-Arbeiten einordnen, deren Ergebnisse, auf mal gerade acht Seiten dargestellt, die Physik bahnbrechend verändert haben. Sie wäre ebenso nobelpreiswürdig gewesen wie die anderen genannten.[3)]

Die Fruchtbarkeit der Grenzschicht-Arbeit ist auch heute, zu ihrem hundertsten Geburtstag, noch keineswegs ausgeschöpft. Die Prandtlschen Gleichungen sind immer wieder für Überraschungen gut. Ein Beispiel: Ihre dynamischen, zeitabhängigen Lösungen im Temperaturgefälle sind noch immer eine Herausforderung.

Danksagung

Wir bedanken uns bei Eberhard Bodenschatz, Charles Doering, Bud Homsy, Hans Fernholz und Leen van Wijngaarden für Anregungen und Hinweise. Unser besonderer Dank gilt Katepalli Sreenivasan für Diskussionen und die Vermittlung der elektronischen Reproduktion des Gemäldes von Ludwig Prandtl. Adelheid Wegner-Demmer sei für die auszugsweise Übersetzung von [9] aus dem Schwedischen gedankt.

Literatur

[1] *Ludwig Prandtl*, Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses, Heidelberg, 8.–13. August 1904. Teubner, Leipzig (1905), 484–491; siehe auch [2], S. 575–584

[2] *Walter Tollmien, Hermann Schlichting* und *Henry Görtler* (Hrsg.), Ludwig Prandtl, Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik, 3 Bände, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg (1961)

[3] *Johanna Vogel-Prandtl*, Ludwig Prandtl, Ein Lebensbild, Erinnerungen, Dokumente, erschienen als Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Nr. 107: Göttingen (1993), 215 S.

[4] *George M. Homsy, Hassan Aref, Kenneth S. Breuer, Simone Hochgreb, Jeffrey R. Koseff* und *Bruce R. Munson*, Multi-Media Fluid Mechanics CD-ROM, Cambridge University Press: Cambridge (2000)

[5] *Ludwig Prandtl*, Zur turbulenten Strömung in Rohren und längs Platten, Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, IV. Lieferung, Verlag Oldenbourg, München-Berlin (1932), S. 18–29; siehe auch [2] S. 632–647

[6] *Ludwig Prandtl*, Mein Weg zu hydrodynamischen Theorien, Phys. Bl. **4**, 89–92 (1948)

[7] *Hermann Schlichting*, Grenzschicht-Theorie, Verlag G. Braun, Karlsruhe (1982) (8. Aufl.)

[8] *Stephen J. Cowley*, Laminar Boundary-Layer Theory: a 20th Century Paradox? In: *Hassen Aref* und *James W. Phillips* (Hrsg.), Mechanics for a New Millenium, ICTAM 2000, Chicago, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht (2001) S. 389–412

[9] *Karl Grandin*, Ett slags modernism i vetenskapen: teoretisk fysik i Sverige under 1920-talet (Der Einzug der modernen Wissenschaften: Theoretische Physics in Schweden in den 1920ern), Institutionen för idé-och lärdomshistoria, Uppsala universitet, Skrifter, No. 22, viii+244 S., Uppsala (1999)

[10] *George Batchelor*, The Life and Legacy of G. I. Taylor, Cambridge University Press, Cambridge (1996)

Die Autoren

Siegfried Großmann blickt auf eine brillante 40-jährige Forscherlaufbahn zurück, die bis heute der Statistischen Physik und Nichtlinearen Dynamik gewidmet ist. Auch nach dem „Phasenübergang“ seiner Emeritierung 1998 forscht er weiter und stellt seinen geschätzten Rat zahlreichen Wissenschaftsorganisationen zur Verfügung. Sein hohes wissenschaftliches Ansehen drückt sich in zahlreichen Ehrungen aus: Er erhielt u. a. die Max-Planck-Medaille der DPG sowie das Große Verdienstkreuz des Bundesverdienstordens. Er ist Mitglied der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften und der Leopoldina.

Bruno Eckhardt ist Professor für Theoretische Physik an der Universität Marburg, wo er sich mit nichtlinearen Systemen aller Art beschäftigt. Bekannt sind seine Arbeiten zu chaotischer Streuung, Quantenchaos und periodischen Bahnen und in jüngerer Zeit zum Turbulenzübergang in Scherströmungen. 2002 erhielt er einen Leibniz-Preis der Deutschen Forschungsgemeinschaft.

Detlef Lohse arbeitet theoretisch und experimentell an der Universität Twente in Enschede, Niederlande, wo er den Lehrstuhl für Physik der Fluide innehat. Besonders bekannt sind seine mit dem Heinz-Mayer-Leibniz-Preis ausgezeichneten Arbeiten zur Erklärung der Sonolumineszenz. Er ist Mitglied der Leopoldina und Fellow der American Physical Society.