

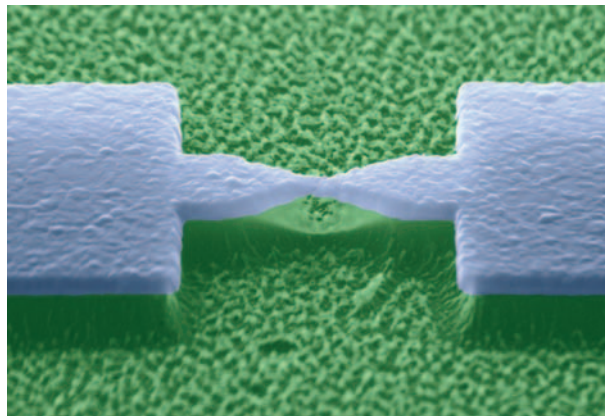
Fluktuierender Strom

Quantenrauschen in mesoskopischen Systemen

Wolfgang Belzig

In mesoskopischen Systemen, die zwischen der mikroskopischen Welt der Quantenmechanik und der makroskopischen Domäne der klassischen Physik angesiedelt sind, macht sich die Quantisierung der Elementarladung in direkt messbaren Größen in vielfältiger Weise bemerkbar. Insbesondere im Zusammenhang mit elektrischem Stromtransport tritt diese Quantisierung als so genanntes Schrotrauschen auf. Ursache und Größe des Rauschens im elektrischen Strom lassen sich klassisch durch die Körnigkeit des Stroms in Form von einzelnen Elektronen erklären. Andererseits führt der quantenmechanische Wellencharakter der Elektronen in einem Quantenkontakt zu einer Unterdrückung des Schrotrauschens gegenüber dem klassischen Wert. Dies lässt sich experimentell an Nanostrukturen untersuchen.

Die ersten Untersuchungen zu Fluktuationen des elektrischen Stroms wurden schon Anfang des 20. Jahrhunderts durchgeführt. 1918 untersuchte Walter Schottky [1], ob sich fundamentale Grenzen für die Güte eines Verstärkers aufgrund thermischer oder anderer Fluktuationen des Stroms ergeben. Aus seinen theoretischen Betrachtungen folgten zwei bemerkenswerte Resultate: Erstens stellte sich heraus, dass es Fluktuationen im Strom beispielsweise einer Vakuumröhre gab, selbst wenn alle thermischen Quellen von Rauschen ausgeschaltet waren. Schottky nannte dieses Phänomen den „Schrotrausch“, da er sich aufgrund der Tatsache verstehen lässt, dass die Ladungen in endlichen Quanten ankommen, ähnlich den Kugeln einer Schrotladung. Die zweite, ebenso bemerkenswerte, Beobachtung war, dass die Größe des Stromrauschens durch den Wert der Elementarladung e und den mittleren Strom I bestimmt ist. Eine Messung des Rauschens liefert mit dem Wert der Elementarladung also Informationen über den Transportprozess, die sich nicht durch Messung des mittleren Stromes erhalten lassen. Obwohl sich die von Schottky vorgeschlagene Methode, die Elektronenladung durch



An mechanischen Bruchkontakten (hier aus Aluminium) lassen sich Quantentransportphänomene wie z. B. multiple Andreev-Reflexionen (vgl. Text) experimentell untersuchen. (Quelle: C. Schirm, E. Scheer, Uni Konstanz)

den Schrotrausch zu bestimmen, ungenauer als andere Methoden erwies, steckt darin doch eine fundamentale neue Botschaft: Das manchmal ungewollte Rauschen einer physikalischen Größe kann *zusätzliche* Informationen enthalten. Das Rauschen ist in diesem Fall also selbst das Signal [2].

Schottkys Ergebnisse zum Rauschen des elektrischen Stroms lassen sich folgendermaßen verstehen: Wenn man einen Stromfluss eine gewisse Zeit beobachtet, fließt eine Anzahl von Ladungen. Jede Wiederholung des Experiments wird eine andere Zahl von Ladungen liefern. Im Allgemeinen können wir also nur statistische Aussagen machen. Der mittlere Strom I ist durch die mittlere Anzahl geflossener Ladungen $Q = e\bar{N}$ bestimmt (geteilt durch die Messzeit t_0). Das Stromrauschen wird durch die Varianz dieser geflossenen Ladung bestimmt sein. Man findet $\delta Q^2 = e^2(\bar{N}^2 - \bar{N})$. Für unabhängige Ereignisse ist die Varianz gleich dem Mittelwert und es ergibt sich $\delta Q^2 = e^2\bar{N} = eQ$. Das Verhältnis von Varianz der Ladung und mittlerer Ladung ergibt die Größe der elementaren Ladung e . Dies ist gerade Schottkys Ergebnis.

Offensichtlich sind sowohl die mittlere Anzahl von Ladungen als auch die Varianz davon nur zwei mögliche gemittelte Größen, die sich durch eine statistische Auswertung einer häufig wiederholten Messung gewinnen lassen. Ein Großteil der Informationen wird jedoch durch die

KOMPAKT

- ▶ In mesoskopischen Systemen macht sich die Quantisierung der Elementarladung z. B. als „Schrotrauschen“ (engl. „shot noise“) bemerkbar.
- ▶ Mit der „Zählstatistik“ (engl. „full counting statistics“) lassen sich detaillierte Einblicke in die dort auftretenden Elektronen-Transportprozesse gewinnen.
- ▶ Die Zählstatistik erlaubt insbesondere Rückschlüsse auf hochkorrelierten Ladungstransfer. Allgemein lassen sich damit auch andere Quantenkorrelationen in einer Vielzahl mesoskopischer Systeme untersuchen.

Prof. Dr. Wolfgang Belzig, Departement Physik und Astronomie, Universität Basel, Klingelbergstrasse 82, CH-4056 Basel, ab Okt. 2005: Fachbereich Physik, Universität Konstanz, Universitätsstr. 10, 78457 Konstanz – Preisträgerartikel anlässlich der Verleihung des Walter-Schottky-Preises 2005 auf der 69. DPG-Jahrestagung der in Berlin

Beschränkung auf Mittelwert und Varianz der gesamten transferierten Ladung vernachlässigt. Beispielsweise kann man sich fragen, ob die wahrscheinlichste Anzahl mit dem Mittelwert übereinstimmt. Die gesamte statistische Information aus wiederholten Messungen der Gesamtzahl ist in der „Zählstatistik“ (engl. full counting statistics) $P(N)$ enthalten, der Wahrscheinlichkeit, dass N Ladungen durch einen Leiter transferiert wurden.

Hierbei wurde implizit angenommen, dass immer während der gleichen Zeitspanne t_0 gemessen wird und diese Abhängigkeit unterdrückt ist. Im Folgenden werden allgemeine Eigenschaften von Verteilungen eine wichtige Rolle spielen. Diese sind im Infokasten „Verteilungen und Kumulanten“ zusammengefasst. Beispiele für Verteilungen sind im Infokasten „Binomial- und Poisson-Statistik“ zu finden. Aus der Zählstatistik lassen sich die mittlere transportierte Ladung und die Varianz berechnen, ebenso wie höhere Kumulanten und Momente.

Die Frage nach der Zählstatistik ist konzeptionell nicht neu, vielmehr hat sie in der Quantenoptik eine lange Tradition. Im Zusammenhang mit Quantentransportprozessen ist sie jedoch neu und berührt z. B. grundlegende Fragen nach dem quantenmechanischen Messprozess ebenso wie den Einfluss von Phasenkohärenz oder Coulomb-Wechselwirkung. Es ist daher nicht weiter verwunderlich, dass das Studium der Zählstatistik eines der aktivsten Gebiete der mesoskopischen Physik ist [3]. Im Folgenden werde ich an einigen Beispielen zeigen, wie die Zählstatistik Rückschlüsse auf hochkorrelierte Ladungstransfers erlaubt.

Bei den Experimenten zur Zählstatistik hat es in den letzten Jahren große Fortschritte gegeben. Zunächst gelang es Reulet et al. an der Yale Universität erstmals, das dritte Moment der Stromfluktuationen eines mesoskopischen Tunnelkontaktes zu messen [4]. Die experimentellen Resultate zeigten eine Abweichung der gemessenen dritten Kumulanten von der erwarteten Poisson-Statistik. Weitere theoretische Arbeiten konnten diese Diskrepanz auf die sog. umgebungsinduzierte Coulomb-Blockade zurückführen. Diese Messung bedeutet einen ersten wichtigen Schritt in der experimentellen Erforschung der Zählstatistik. Experimente zur direkten Zählung von Elektronen sind mittlerweile von Bylander et al. an der Chalmers Universität [5] durchgeführt worden, und ein schneller experimenteller Fortschritt ist zu erwarten. Kürzlich wurden beispielsweise sehr exakte Vermessungen der dritten Kumulante von Bomze et al. am Technion in Haifa durchgeführt [6].

Normaler Quantenpunktkontakt

In typischen Strukturen, die in Quantentransportexperimenten untersucht werden, kann man in erster Näherung von wechselwirkungsfreien Elektronen ausgehen. Dies trifft insbesondere auf metallische Systeme zu (die auch Supraleiter einschließen, wenn man stattdessen von nichtwechselwirkenden Quasiteilchen spricht). Im Folgenden wird vorwiegend Transport bei verschwindend geringer Temperatur besprochen, was in der Praxis bedeutet, dass der Energiegewinn durch die angelegte Spannung eV größer als die thermische Energie $k_B T$ sein sollte.

Das einfachste Beispiel ist ein Quantenpunktkontakt (Abb. 1), wie er zum Beispiel in zweidimensionalen Elektronengasen realisiert werden kann. Dieser habe nur einen transversalen Kanal zwischen zwei elektronischen Reservoiren, die jedes für sich im Gleichgewicht sind. Eine Barriere im Kanal habe die Transmissionswahrscheinlichkeit T . Die Elektronen werden aus dem linken Reservoir emittiert und an der Barriere mit der Wahrscheinlichkeit T transmittiert bzw. $R = 1 - T$ reflektiert. Der mittlere Strom ist $I = GV$, mit dem durch die Landauer-Formel gegebenen Leitwert $G = (2e^2/h)T$. Die Zählstatistik für diesen Fall wurde erstmals von Levitov und Lesovik [7] behandelt. Die entsprechende Zählstatistik ist eine Binomialverteilung (siehe Infokasten „Binomial- und Poisson-Statistik“) mit der kumulantenzeugenden Funktion (CGF);

$$S(\chi) = -M \ln[1 + T(\exp(i\chi) - 1)]. \quad (1)$$

Die Anzahl der Versuche $M = 2eVt_0/h$ ist durch die Spannungsdifferenz V und die Zählzeit t_0 bestimmt (Abweichungen von ganzen Zahlen führen nur zu unwichtigen Randeffekten; der Faktor 2 ist auf die beiden Spinkanäle zurückzuführen). Dies entspricht genau der Maximalzahl M von Elektronen, die durch den Kontakt für $T=1$ in einer Zeitspanne t_0 fließen können: $M = It_0/e = GVt_0/e = 2eVt_0/h$. Als Folge der Fermi-Statistik fluktuiert diese Zahl am absoluten Nullpunkt nicht. Hier sollte betont werden, dass die korrekte quantenmechanische Berechnung dieser Größe nur unter Berücksichtigung einer geeigneten (quantenmechanischen) Behandlung der Messapparatur möglich ist [8]. Das Zählfeld χ hat dann die physikalische Bedeutung der Kopplung an den quantenmechanischen Stromdetektor. Diese quantenmechanisch berechnete Zählstatistik lässt sich also in diesem Fall interpretieren als die Wahrscheinlichkeit, dass aus M Versuchen, ein

Verteilungen und Kumulanten

Betrachtet man eine statistische Größe, die der Einfachheit halber nur diskrete Werte $N \in \mathbb{Z}$ annehmen kann, und bezeichnet die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ergebnis mit $P(N)$, so werden die Mittelwerte einer Größe $f(N)$ berechnet gemäß der Vorschrift

$$\overline{f(N)} = \sum_N f(N) P(N).$$

Das n -te zentrale Moment ist als

$$\overline{(N - \overline{N})^n}$$

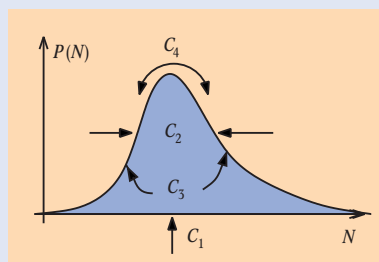
definiert. Alternativ (und häufig auch besser) lassen sich Verteilungen mit Hilfe der Kumulanten charakterisieren. Diese lassen sich elegant zusammenfassen in der sog. kumulantenzeugenden Funktion (cumulant generating function, CGF)

$$S(\chi) = -\ln \exp(i\chi N).$$

Die n -te Kumulante hängt mit dem Koeffizienten des Terms n -ter Ordnung in der Taylor-Entwicklung von $S(\chi)$ zusammen. Einige Beispiele für CGFs sind im Infokasten „Binomial- und Poisson-Statistik“ angegeben. Die ersten vier Kumulanten hängen mit den zentralen Momenten zusammen gemäß

$$\begin{aligned} C_1 &= \overline{N}, \\ C_2 &= \overline{(N - \overline{N})^2}, \\ C_3 &= \overline{(N - \overline{N})^3}, \\ C_4 &= \overline{(N - \overline{N})^4} - 3 \overline{(N - \overline{N})^2}^2. \end{aligned}$$

Aus der Definition der Kumulanten folgt, dass für eine Gauß-Verteilung alle Kumulanten der Ordnung 3 oder höher verschwinden. Die Abb. illustriert die Bedeutung der Kumulanten. C_1 ist die mittlere Anzahl von Ereignissen, d. h. von transferierten Ladungen. C_2 ist die Varianz der Verteilung. In der dritten Kumulante spiegelt sich die Symmetrie der Verteilung um den Mittelwert wider, d. h. wenn mehr Gewicht bei positiven Fluktuationen liegt, ist C_3 positiv, sonst negativ. Gleichzeitig gibt die dritte Kumulante an, wie der Mittelwert vom wahrscheinlichsten Wert abweicht. Die vierte Kumulante macht eine Aussage über die Schärfe der Verteilung im Vergleich zur Gauß-Verteilung. Ein negatives C_4 bedeutet, dass die Ausläufer der Verteilung ausgeprägter sind als bei der Gauß-Verteilung.



Kumulanten einer Verteilung $P(N)$. C_1 ist der Mittelwert, C_2 ein Maß für die Breite der Verteilung. C_3 hängt mit der Symmetrie der Verteilung um den Mittelwert zusammen. C_4 gibt die „Schärfe“ im Vergleich zu einer Gauß-Verteilung an.

Elektron durch den Kontakt zu schicken, N erfolgreich und $(M-N)$ erfolglos sind. Aus der Binomialverteilung folgt für die mittlere Zahl von transferierten Elektronen $C_1 = MT$ und für die Varianz $C_2 = MT(1-T)$. Die im Vergleich zum Poisson-Prozess geringere Varianz wird häufig durch den Fano-Faktor $F = C_2/C_1$ ausgedrückt [9]. Hier ist $F = 1-T$ und dieser Wert ist eine direkte Folge der Binomialverteilung. Die Unterdrückung kommt von der Fermi-Statistik am absoluten Nullpunkt, die sich hier in der *festen* Anzahl von Versuchen M ausdrückt. In Leitern mit vielen Kanälen ergibt sich die Zählstatistik, indem die CGFs der Kanäle aufsummiert werden. Daraus folgen interessante Eigenschaften für die Zählstatistik bestimmter generischer Leiter, die durch universelle Verteilungen von Transmissions-eigenwerten beschrieben werden. Insbesondere ist die Zählstatistik dann auch universell. D.h. ebenso wie die entsprechenden Fano-Faktoren von $1/2$ für einen symmetrischen Doppeltunnelkontakt, $1/3$ für einen diffusiven Leiter und $1/4$ für eine symmetrisch chaotische Kavität sind alle Kumulanten universell. Da diese Kumulanten detaillierte Informationen über die Verteilung von Transmissionseigenwerten beinhalten, wäre es wichtig, sie zu messen, um das Konzept der universellen Verteilungen experimentell zu bestätigen.

Die Quantisierung des elementaren Ereignisses lässt sich aus der Binomialstatistik in trivialer Weise sehen. Etwas mathematischer ist sie eine Folge der Periodizität der CGF als Funktion des Zählfeldes χ . Die CGF ist 2π -periodisch und konsequenterweise tauchen nur Wahrscheinlichkeiten für ganzzahlige N auf. Diese Betrachtung wird besonders interessant im Fall von Supraleitern. Darin sind die Elektronen in der Nähe der Fermi-Kante in einem kollektiven Zustand gebunden. Man kann auch sagen, jeweils zwei Elektronen bilden ein Cooper-Paar, und sich fragen, wie sich das in der Transportstatistik eines supraleitenden Kontakts äußert.

Supraleitender Quantenpunktkontakt

Wenn man einen Supraleiter in Kontakt mit einem normalen Metall bringt, ist Ladungstransfer nur durch eine sog. Andreev-Reflexion möglich, solange die bereitgestellte Energie (d.h. die angelegte Spannung) nicht ausreicht, die Energielücke zu überwinden [10]. Bei diesem Prozess wird ein Elektron (mit Energie $E > E_F$ und Spin \uparrow) in ein Loch (mit Energie $E < E_F$ und Spin \downarrow) reflektiert und dabei ein Cooper-Paar in den Supraleiter transferiert. Dieser Prozess passiert mit einer Wahrscheinlichkeit $R_A = T^2/(2-T)^2$. Die Zählstatistik ergibt sich zu [11]

$$S(\chi) = -M \ln[1 + R_A (\exp(i2\chi) - 1)]. \quad (2)$$

Die Zählstatistik ist also wieder binomial, jedoch mit dem entscheidenden Unterschied, dass die CGF jetzt π -periodisch ist. Anschaulich wird das an den Wahrscheinlichkeiten $P(N)$. Diese ist nur für gerade N

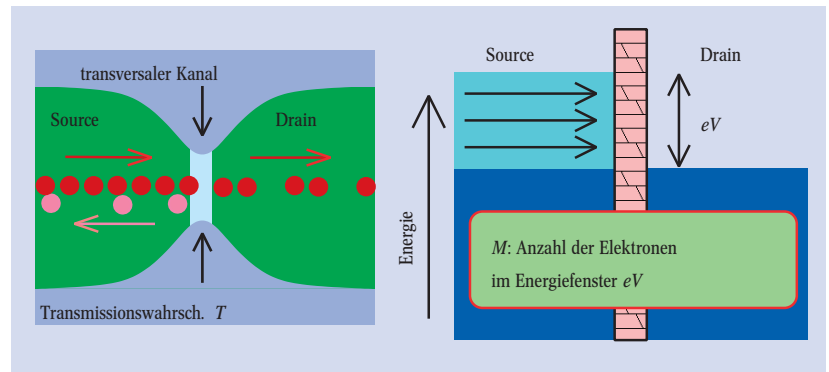


Abb. 1:
 ► links: Ein Quantenpunktkontakt lässt sich mit einem zweidimensionalen Elektronengas (2DEG) realisieren, bei dem der breite Kanal an einer Stelle eingeschnürt ist, sodass nur noch ein transversaler Kanal vorhanden ist. Mit der Einschnü-

rung lässt sich die Transmissionswahrscheinlichkeit T variieren.
 ► rechts: Energiedarstellung des Transportes durch den eindimensionalen Kanal mit Barriere.

Binomial- und Poisson-Statistik

Zwei wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind die Binomial- und die Poisson-Verteilung, die sich durch eine besonders einfache physikalische Interpretation auszeichnen. Die *Binomialverteilung* gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Ereignis N -mal unter M Versuchen auftritt, wenn die Wahrscheinlichkeit für das einmalige Auftreten des Ereignisses T ist. Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge ist diese Wahrscheinlichkeit gegeben durch

$$P(N) = \binom{M}{N} T^N (1-T)^{M-N}.$$

Die entsprechende kumulanten-erzeugende Funktion ergibt sich nach

$$\begin{aligned} & \exp(-S(\chi)) \\ &= \sum_N e^{i\chi N} \binom{M}{N} T^N (1-T)^{M-N} \\ &= (Te^{i\chi} + 1 - T)^M \text{ zu} \\ & S(\chi) = -M \ln[1 + T(\exp(i\chi) - 1)]. \end{aligned}$$

Im Grenzfall kleiner Einzelwahrscheinlichkeiten $T \ll 1$ ergibt sich

$$S(\chi) = -MT(\exp(i\chi) - 1),$$

das nur noch von der mittleren Anzahl

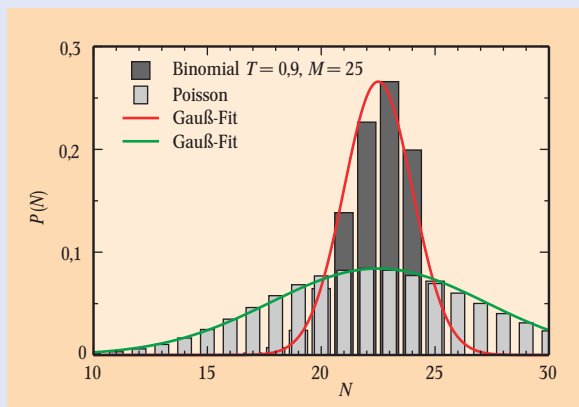
$\bar{N} = MT$ abhängt. Dies ist gerade die erzeugende Funktion der *Poisson-Verteilung*

$$P(N) = \frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}}.$$

Diese Verteilung tritt insbesondere bei „seltenen Ereignissen“ auf, also zum Beispiel bei einem Tunnelkontakt oder der Schottkyschen Vakuumdiode. Die Abbildung zeigt einen Vergleich der verschiedenen Verteilungen mit einer Gauß-Verteilung. Der Vollständigkeit

halber sei erwähnt, dass die CGF der Gauß-Verteilung die Form $-i\chi C_1 + C_2 \chi^2/2$ hat. Die ersten vier Kumulanten für die erwähnten Verteilungen sind in folgender Tabelle aufgeführt.

| | Binomial | Poisson | Gauß |
|-------|------------------|-----------|------------|
| C_1 | MT | \bar{N} | \bar{N} |
| C_2 | $C_1(1-T)$ | \bar{N} | σ^2 |
| C_3 | $C_2(1-2T)$ | \bar{N} | 0 |
| C_4 | $C_2(1-6T(1-T))$ | \bar{N} | 0 |



Vergleich der Binomialverteilung mit einer Poisson-Verteilung (gleicher Mittelwert) und einer Gauß-Verteilung (gleicher Mittelwert und Varianz).

von Null verschieden und verschwindet für ungerade N . Man kann auch sagen, dass die effektive Ladung eines elementaren Ereignisses die doppelte Elementarladung ist. Dies ist aus der Zählstatistik offensichtlich. Im Grenzfall seltener Ereignisse, $R_A \ll 1$, reduziert sich die Statistik auf eine Poisson-Verteilung $S(\chi) = -(\bar{N}/2) (\exp(i2\chi) - 1)$. In diesem Fall ist der Fano-Faktor $F = C_2/C_1 = 2$ ein direktes Maß für die effektive Ladung eines Andreev-Prozesses. Generell ist das jedoch nicht der Fall, da im Allgemeinen die Transmissions-eigenwerte des Kontaktes im normalleitenden Zustand und die Andreev-Reflexionswahrscheinlichkeiten im supraleitenden Zustand nicht übereinstimmen. Eine bemerkenswerte Ausnahme bildet hier der diffusive Leiter, bei dem die Zählstatistiken in beiden Zuständen (bis auf die Verdopplung der Ladung) übereinstimmen. Auf eine weitere Eigenschaft dieses Resultats sollte noch hingewiesen werden: Für einen normalleitenden Kontakt wurde die Binomialstatistik auf die Fermi-Statistik der Elektronen zurückgeführt. Im Gegensatz dazu sollten sich Cooper-Paare natürlich nicht wie Fermionen verhalten. Manchmal wird die Supraleitung sogar als Kondensation von bosonischen Cooper-Paaren bezeichnet. Die Zählstatistik zeigt jedoch ein gänzlich anderes Verhalten: die binomiale Form der CGF bedeutet, dass die Versuche zum Transfer einzelner Cooper-Paare *antikorreliert* sind, was eigentlich von Fermionen erwartet werden würde. Ein Folge davon ist

beispielsweise die Unterdrückung des Rauschens in diffusiven Andreev-Kontakten, wie es auch experimentell beobachtet wurde.

Die Zählstatistik eines Andreev-Kontaktes lässt sich also interpretieren als Transfer von Cooper-Paaren. Dies ist konsistent mit dem Bild eines Supraleiters als System von Cooper-Paaren. Eine interessante Frage ergibt sich, wenn man zwei Supraleiter über einen Quantenkontakt koppelt und eine elektrische Spannungsdifferenz V anlegt (Abb. 2). Übersteigt die angelegte Spannung die Energielücke 2Δ des Supraleiters, so können Quasiteilchen direkt zwischen den Supraleitern tunneln. Ist der Kontakt gut (d. h. die Transparenz nicht zu klein), so kann auch ein Strom fließen, wenn die Spannung kleiner ist als $2\Delta/e$. Zunächst ist für $eV > \Delta$ auch hier ein Andreev-Prozess möglich, bei dem zwei Elektronen gemeinsam tunneln und als Cooper-Paar im anderen Supraleiter propagieren. Dieser Zweiteilchenprozess passiert jedoch mit einer geringeren Wahrscheinlichkeit, die in etwa durch R_A gegeben ist. Die mindestens benötigte Spannung für diesen Prozess ist demnach $eV = \Delta$. Bei noch geringeren Spannungen werden Prozesse höherer Ordnung möglich, bei denen mehrere Andreev-Reflexionen (Multiple Andreev Reflection, MAR) kombiniert werden. Die entsprechenden Schwellenspannungen folgen der einfachen Regel $eV > 2\Delta/n$ für einen Prozess, der $n - 1$ Andreev-Reflexionen beinhaltet. In Abb. 2 ist beispielsweise in rot der MAR-Prozess dritter Ordnung skizziert, der eine *subharmonische* Spannung $2\Delta/3e$ benötigt. Anhand der Darstellung ist ersichtlich, wie sich Prozesse höherer Ordnung aus elementaren Prozessen zusammensetzen lassen.

Wie groß ist nun die Ladung, die bei jedem Prozess transferiert wird und wie sind diese Prozesse korreliert? Offensichtlich lässt sich diese Frage mit Hilfe der Zählstatistik beantworten. Einfach gesprochen erwartet man, dass Andreev-Prozesse höherer Ordnung auch vielfache Ladungstransfers implizieren, deren Ladung durch die Ordnung des Prozesses gegeben ist. Andererseits besteht ein Supraleiter aus Cooper-Paaren und Quasiteilchen, und es ist nicht klar, wie größere Ladungsquanten gebildet werden sollen. Diese Frage wird durch die Zählstatistik beantwortet. Es stellt sich heraus, dass die Statistik eine „Multinomialverteilung“ ist [12]. Jeder Versuch, ein Elektron durch den Kontakt zu schicken, führt mit spannungsabhängigen Wahrscheinlichkeiten zu einem n -fachen Ladungstransfer. Für eine Spannung V ist der jeweils dominierende Ladungstransfer durch $n_{\text{eff}} = [2\Delta/eV]$, den ganzzahligen Teil von $2\Delta/eV$ gegeben. Aufgrund der multinomialen Statistik sind die verschiedenen Prozesse jedoch nicht leicht zu separieren. Falls die Transmissionswahrscheinlichkeit klein ist, stellt sich jedoch heraus, dass die verschiedenen Ladungstransfers unkorreliert sind und die Statistik für diesen Prozess poissonartig ist, d. h. $S(\chi) \sim \exp(in_{\text{eff}}\chi) - 1$. Dieses Resultat lässt sich in direkter Analogie zu Schottkys Vorschlag zur Messung der Elektronenladung sehen. Anstatt der Elektronenladung werden hier durch den Fano-Faktor $F = n_{\text{eff}}$ die effektiven Ladungen, die in den multiplen Andreev-Reflexionen auftreten, gemessen.

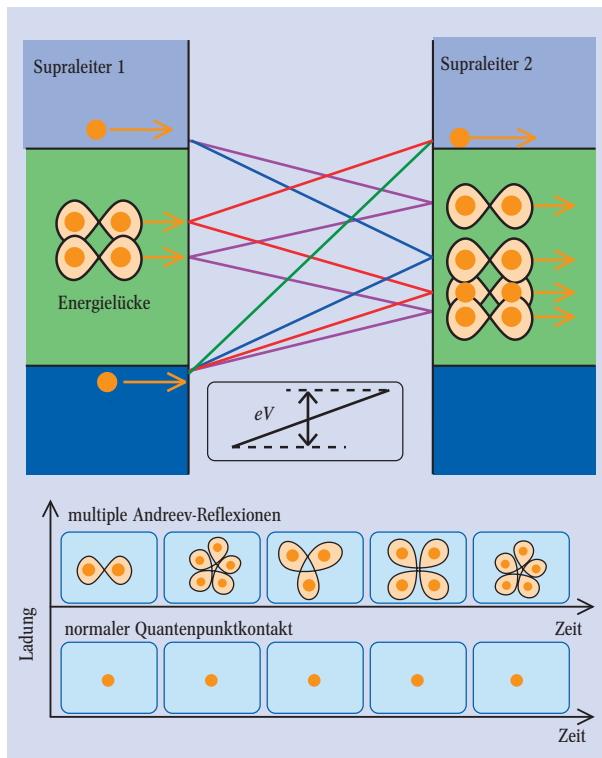


Abb. 2:
 ► oben: In einem Quantenpunktkontakt zwischen zwei Supraleitern sind innerhalb der Energielücke keine Quasiteilchenzustände vorhanden. Abhängig von der angelegten Spannung sind verschiedene Transportprozesse möglich (vgl. Text). Die angelegte Spannung ist durch die Steigung der Linien, die links und rechts verbinden, angedeutet.
 ► unten: Vergleich des Transportprozesses im normalleitenden und im supraleitenden Zustand: In jedem Zeitfenster wird im normalen Fall ein Elektron transferiert. Ohne Rückstreuung ist der Strom daher rauschfrei. Dagegen werden im supraleitenden Zustand ein, zwei oder auch multiple Ladungen im gleichen Zeitfenster transferiert. Selbst ohne normale Rückstreuung rauscht der Strom aufgrund der Unsicherheit, zu welchen Ladungstransfers die einzelnen Zeitfenster führen.

Wechselwirkungseffekte

Bisher wurde die Coulomb-Abstoßung zwischen den Elektronen vernachlässigt. Dies ist eine gute Näherung, wenn die Elektronen genügend delokalisiert sind. Wenn die Bewegung der Elektronen jedoch beschränkt wird, zum Beispiel indem zwei Tunnelbarrieren in

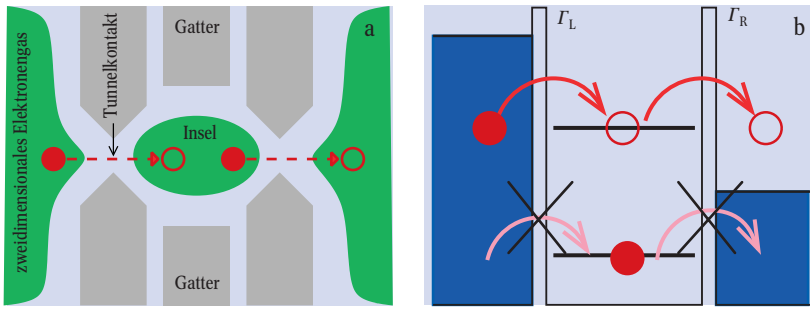


Abb. 3:

► a) Ein Quantenpunkt in einer typischen Halbleiter-Heterostruktur: Durch sog. „top-gates“, d. h. metallisch leitende Mikrostrukturen auf der Oberfläche (grau), lässt sich durch Anlegen einer negativen Spannung die Elektronendichte unterdrücken. Dadurch kann sich eine Insel ausbilden, die von den Elektronenreservoirs links und rechts durch Tunnelbarrieren getrennt ist. Auf der Insel ist die Elektronenzahl fixiert und lässt sich mit den Gatterspannungen genau einstellen.

► b) Tunnelprozesse im Energieraum (vertikale Achse): Wenn das Niveau im Transportfenster zwischen den chemischen Potentialen liegt, tunneln Elektronen eines nach dem anderen durch die Insel. Die Raten sind durch Γ_L bzw. Γ_R gegeben. Die Coulomb-Blockade verhindert, dass zwei Elektronen gleichzeitig auf der Insel sind. Wenn das Niveau unterhalb beider chemischer Potentiale ist, ist das Tunneln unterdrückt und es findet kein Transport statt.

Reihe geschaltet werden, so spielt die Coulomb-Abstoßung der Elektronen eine wichtigere Rolle. Falls die Energieskala der Wechselwirkung (die sog. Ladungsenergie $E_c = e^2/2C$, wobei C eine effektive Kapazität ist) größer als die thermische Energie $k_B T$ und die Transportspannungsenergie eV ist, kann der Transport durch eine metallische Insel zwischen zwei Tunnelkontakten vollkommen blockiert sein; man spricht von der Coulomb-Blockade. Wenn die Insel stark verkleinert wird und nur noch wenige Elektronen enthält (was in zweidimensionalen Elektronensystemen durch Nanostrukturierung erreicht werden kann), spielt auch die Quantisierung der Ein-Teilchen-Zustände eine Rolle. Man spricht dann von Quantenpunkten, manchmal auch von künstlichen Atomen (Abb. 3).

Der elektronische Transport durch Quantenpunkte oder Einzelelektronentransistoren ist also dominiert durch die abstoßende Coulomb-Wechselwirkung, und es stellt sich jetzt die Frage, wie die statistischen Eigenschaften des Ladungstransportes durch die Wechselwirkung beeinflusst werden. Im einfachsten Fall (wenn der Tunnelwiderstand viel größer ist als der Quantenwiderstand $R_K = h/2e^2 = 13 \text{ k}\Omega$) tunneln die Elektronen einzeln durch die Insel, und man spricht von sequenziellem Tunneln. Hier bewirkt die Wechselwirkung, dass die Insel nur von einem einzelnen Elektron besetzt sein kann. Für geringe Spannungen ist dann der Stromfluss blockiert, entweder weil kein Ein-Elektronen-Niveau erreichbar ist oder weil die zur Doppelbesetzung benötigte Energie E_c nicht aufgebracht werden kann. Man sagt, das System sei im Regime der Coulomb-Blockade.

Die Statistik des Ladungstransfers lässt sich hier mit Hilfe der Mastergleichung für Besetzungswahrscheinlichkeiten der Insel berechnen. Manchmal unterscheidet sie sich qualitativ kaum von der eines nichtwechselwirkenden Systems. Ist beispielsweise nur ein Niveau auf der Insel für den Transport relevant und nur Tunneln in eine Richtung erlaubt, so ergibt sich die CGF [13]

$$S(\chi) = (2\bar{N}/p) \sqrt{1 + p(\exp(i\chi) - 1)}. \quad (3)$$

Hierbei ist \bar{N} die mittlere Anzahl transferierter Elektronen; p ist ein Parameter, der mit der Symmetrie der Tunnelkontakte zusammenhängt. Natürlich gibt

es quantitative Unterschiede zum nichtwechselwirkenden Fall, die durch die Wechselwirkung entstehen. Das Rauschen bleibt aber immer unterdrückt gegenüber dem Poissonschen Wert, ganz so wie es für nichtwechselwirkende Elektronen gefunden wurde. Dies kann man leicht sehen, indem man die Kumulanten aus Gl. (3) berechnet und $C_n \leq C_1$ findet. Bemerkenswerterweise ändert sich das, wenn man ein etwas komplexeres System betrachtet, bei dem zum Beispiel die Spinartung durch ein Magnetfeld aufgehoben ist oder mehrere Ein-Teilchen-Niveaus auf der Insel zur Verfügung stehen. In diesem Fall hat das System ein Erinnerungsvermögen, da nach dem Tunneln eines Elektrons die Insel möglicherweise nicht mehr im selben Zustand ist wie zuvor. Wenn nun in diesem Zustand der Tunnelvorgang erleichtert

ist (z. B. weil die Kontakte entsprechend spinpolarisiert sind), so kann das erste tunnelnde Elektron eine ganze Lawine von Tunnelvorgängen auslösen. Dies äußert sich direkt in der Statistik [14]

$$S(\chi) = \bar{N}(1-p) \frac{\exp(i\chi) - 1}{1 - p \exp(i\chi)}, \quad (4)$$

die ein stark korreliertes Rauschen beschreibt. Zum Vergleich soll der Fall betrachtet werden, dass der Transportprozess durch eine Poisson-Statistik von multiplen Ladungen erzeugt wird. Die entsprechende Statistik wäre proportional zu $\exp(i n_{\text{eff}} \chi)$, wobei die effektive Ladung $n_{\text{eff}} = C_2/C_1$ durch das Verhältnis der ersten beiden Kumulanten definiert ist. Aus dieser Statistik folgt für die höheren Kumulanten $C_n = n_{\text{eff}}^{n-1} C_1$. Im Gegensatz dazu ergibt sich aus Gl. (4), dass die Kumulanten im Vergleich dazu erhöht sind, und zwar umso mehr, je höher die Ordnung ist. Um diesen ungewöhnlichen Transportprozess besser zu verstehen, kann die CGF (4) in unabhängige Poisson-Prozesse mit verschiedenen effektiven Ladungen zerlegt werden mit dem Ergebnis

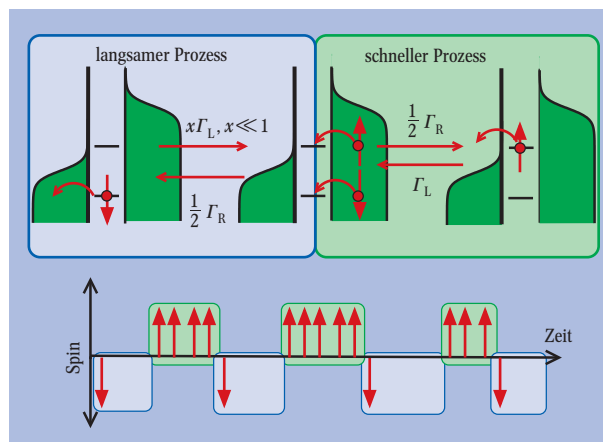


Abb. 4: Transportprozesse in einem Quantenpunkt unter Berücksichtigung eines angeregten Zustandes (vgl. Text). Das zeitlich korrelierte Auftreten von Tunnelereignissen ist im unteren Bild dargestellt.

$$S(\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{N}(1-p)p^{n-1} (\exp(in\chi) - 1). \quad (5)$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass Poisson-Prozesse aller Ordnungen beitragen, wobei höhere Ordnungen mit einer Wahrscheinlichkeit p^{n-1} seltener auftreten. Dies lässt sich anhand von Abb. 4 erklären, die im oberen Teil das Wechselspiel eines *schnellen* Prozesses mit einem *langsamen* Prozess demonstriert. Konkret bedeutet dies, dass ein thermisch angeregter Tunnelprozess aus dem Quantenpunkt nach links eine ganze Reihe von Ladungstransfers durch das obere Niveau nach sich zieht. Der Einfachheit halber haben wir angenommen, dass die Niveaus sich durch den Elektronenspin unterscheiden (was in Praxis durch die Zeeman-Aufspaltung in einem Magnetfeld erreicht werden kann). Ein Elektron mit Spin \downarrow tunnelt vom unteren Niveau aus dem Quantenpunkt nach links mit der Rate $x\Gamma_L$, wobei $x \ll 1$ angenommen wird. Dann gibt es zwei Möglichkeiten, den Quantenpunkt wieder zu füllen. Mit einer Wahrscheinlichkeit $p = 1/2$ tunnelt ein Elektron auf das obere Niveau und mit einer Wahrscheinlichkeit $1-p = 1/2$ auf das untere Niveau. Im letzteren Fall ist das System wieder im Ausgangszustand, der für eine lange Zeit $\sim 1/x\Gamma_L$ erhalten bleibt. Das Elektron vom oberen Niveau kann jedoch sehr schnell nach links mit einer Rate Γ_L heraustunneln und das System ist wieder beim leeren Quantenpunkt angelangt. Der Zyklus, bei dem ein Elektron durch das obere Niveau tunnelt, passiert zum Beispiel n Mal mit einer Wahrscheinlichkeit p und endet mit einer Wahrscheinlichkeit $1-p$. Dies erklärt den Faktor $p^n(1-p)$ vor dem Poisson-Prozess der Ordnung $n+1$ in Gl. (5).

Ausblick

In der Zukunft ist ein weiterer Fortschritt der experimentellen Techniken zur Messung höherer Kumulanten oder der Zählstatistik zu erwarten. Eine Reihe von vielversprechenden Experimenten zur Bestimmung der Zählstatistik wurde bereits durchgeführt [4–6]. Zukünftige Experimente werden sich beispielsweise mit dem Nachweis multipler oder fraktionaler Ladungen befassen. Diese gehören sicherlich zu den interessantesten Vorhersagen, die sich mit Hilfe der Zählstatistik überprüfen lassen.

Abschließend möchte ich noch erwähnen, dass man die Frage nach der Wahrscheinlichkeit für eine Anzahl von Ladungstransfers offensichtlich nicht nur für Elektronen im elektrischen Strom stellen kann, sondern im Prinzip für alle Ereignisse, die man zählen kann. Beispielsweise haben wir kürzlich vorgeschlagen, das Konzept der *Zählstatistik* auch auf mesoskopische Systeme

aus ultrakalten Atomen zu übertragen [15]. Aufgrund der großen Variabilität dieser Systeme und der möglichen Zählfähigkeit einzelner Atome ist hier ein rapider Fortschritt der experimentellen Technologie und eine Vielzahl interessanter Untersuchungen zu erwarten.

Danksagung

Danken möchte ich vor allem denjenigen, die meine bisherige wissenschaftliche Laufbahn unterstützt haben: Gerd Schön (Karlsruhe), Gerrit Bauer und Yuli Nazarov (Delft) und Christoph Bruder (Basel). Zu den Arbeiten, die hier beschrieben wurden, haben A. Cottet (Basel), C. Schroll (Basel) und J. C. Cuevas (Karlsruhe) beigetragen, denen ich für die Zusammenarbeit danken möchte. Für eine Vielzahl von interessanten Diskussionen im Zusammenhang mit gemeinsamen Arbeiten zur Zählstatistik danke ich J. Börlin (Basel), N. Chtchelkatchev (Moskau), T. Heikkilä (Helsinki), D. Prober (Yale), B. Reulet (Yale), P. Samuelsson (Lund), C. Schönenberger (Basel), M. Vanevic (Basel) und M. Zareyan (Zanjan).

Literatur

- [1] W. Schottky, Ann. Phys. (Leipzig), **57**, 541 (1918)
- [2] C. W. J. Beenakker und C. Schönenberger, Physics Today, Mai 2003
- [3] Yu. V. Nazarov (Hrsg.), Quantum Noise in Mesoscopic Physics, Kluwer, Dordrecht (2003)
- [4] B. Reulet, J. Senzier und D. E. Prober, Phys. Rev. Lett. **91**, 196601 (2003)
- [5] J. Bylander, T. Duty und P. Delsing, Nature **434**, 361 (2005)
- [6] Yu. Bomze, G. Gershon, D. Shovkun, L. S. Levitov und M. Reznikov, cond-mat/0504382
- [7] L. S. Levitov und G. B. Lesovik, JETP Lett. **58**, 230 (1993) [Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **58**, 225 (1993)]
- [8] W. Belzig und Yu. V. Nazarov, Phys. Rev. Lett. **87**, 197006 (2001); Yu. V. Nazarov und M. Kindermann, Eur. Phys. J. B **35**, 413 (2003)
- [9] Ya. M. Blanter und M. Büttiker, Phys. Rep. **336**, 1 (2000)
- [10] W. Belzig und C. Bruder, Physikal. Blätter, Mai 2000, S. 35
- [11] B. A. Muzykantskii und D. E. Khmel'nitzkii, Phys. Rev. B **50**, 3982 (1994)
- [12] J. C. Cuevas und W. Belzig, Phys. Rev. Lett. **91**, 187001 (2003); Phys. Rev. B **70**, 214512 (2004); G. Johansson, P. Samuelsson und A. Ingerman, Phys. Rev. Lett. **91**, 187002 (2003)
- [13] D. A. Bagrets und Yu. V. Nazarov, Phys. Rev. B **67**, 085316 (2003)
- [14] W. Belzig, Phys. Rev. B **71**, 161301 (2005).
- [15] W. Belzig, C. Schroll und C. Bruder, cond-mat/0412269



Foto: J. Röhl

Der Autor

Wolfgang Belzig (hier bei der Preisverleihung) promovierte 1999 in Karlsruhe, bevor er für zwei Jahre als Postdoc an die TU Delft ging. 2001 wechselte er als Assistent an die Universität Basel, wo er sich 2003 habilitierte und seit Anfang 2005 eine SNF-Förderprofessur innehat. Im Oktober 2005 folgt er einem Ruf an die Universität Konstanz auf eine Professur für Theoretische Festkörperphysik. Sein Spezialgebiet ist die Theorie des Quantentransports. Darüber hinaus hat er die Zählstatistik des Elektronentransports in mesoskopischen metallischen Strukturen maßgeblich mitentwickelt.