Boltzmanns Vermächtnis

Zum hundertsten Todestag von Ludwig Boltzmann (1844 – 1906)

Carlo Cercignani

Ludwig Boltzmann begründete die moderne Thermodynamik mit Hilfe der statistischen Mechanik. Sein 1872 formuliertes H-Theorem lieferte erstmals eine mikroskopische Deutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmelehre.

Ludwig Boltzmann im Jahr 1875. Zu dieser Zeit war er Professor in Wien und mit der Lösung des Loschmidtschen Paradoxons beschäftigt (s. Text).

Schon 1738 stellte Daniel Bernoulli die These auf, dass Gase aus elastischen Molekülen bestehen, die sich mit großer Geschwindigkeit hin und her bewegen und dabei – entsprechend den Gesetzen der Mechanik – kollidieren und zurückprallen. Dies war keine völlig neue Idee: Bereits in der Antike hatten griechische Philosophen postuliert, dass alle Körper aus bewegten Teilchen bestehen, auch wenn die Körper selbst in Ruhe zu sein scheinen. Erst mit Bernoulli gelangte die Idee einer atomaren Struktur der Materie jedoch in die Physik, indem sie den Ursprung des Druckes erklärte und die kinetische Theorie der Gase hervorbrachte. Bernoullis Modell konnte zwar die elementaren Eigenschaften der Gase erklären, doch ob es auch quantitativ zutraf, mussten erst Experimente zeigen. Folglich fand die eigentliche Entwicklung der kinetischen Theorie erst viel später, im 19. Jahrhundert, statt.

Bernoullis Theorie wurde von mehreren Wissenschaftlern weiterentwickelt, doch erst Clausius brachte die kinetische Theorie zur Reife, indem er explizit herausstellte, dass thermische Energie nichts anderes ist als die kinetische Energie der zufälligen Molekülbewegungen, und indem er den ersten Hauptsatz der Thermodynamik mit kinetischen Begriffen beschrieb. Clausius führte auch das Konzept der mittleren freien Weglänge ein, d. h. der Entfernung, welche ein Molekül durchschnittlich zwischen zwei Kollisionen zurücklegt. Auf Grundlage dieses Konzeptes entwickelte James Clerk Maxwell eine vorläufige Theorie der Transportvorgänge, wie z. B. Wärmeübertragung, Reibungswiderstand oder Diffusion. Er leitete – wenn auch noch recht heuristisch – die Geschwindigkeitsverteilung her, die nach ihm benannt ist.

Maxwell erkannte bald, dass das Konzept der mittleren freien Weglänge als Basis der kinetischen Theorie unzulänglich war, und entwickelte 1867 eine weitaus akkuratere Methode, basierend auf den so genannten Transfergleichungen. Dabei lieferte er auch eine bessere Begründung für seinen Ausdruck der Geschwindigkeitsverteilung eines Gases im Gleichgewicht.

Mit seinen Transfergleichungen war Maxwell einer Entwicklungsgleichung für die Verteilungsfunktion bereits recht nahe gekommen. Die Ehre, diesen letzten Schritt geleistet zu haben, gebührt aber ohne Zweifel Ludwig Boltzmann. Die betreffende Gleichung wird üblicherweise als Boltzmann-Gleichung bezeichnet – manchmal auch als Maxwell-Boltzmann-Gleichung, in Anerkennung von Maxwells wichtiger Rolle.

Die Entropie tritt auf

Clausius und Maxwell hatten klar gezeigt, dass sich die Gleichgewichts- und Transporteigenschaften von Gasen aus der kinetischen Theorie ableiten lassen. Es blieb jedoch das ungelöste Problem, auch den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zu begründen.

In der heutigen Formulierung basiert dieser auf dem Begriff der Entropie, welche 1865 von Clausius eingeführt wurde. Zwar brachte Clausius damit keine neuen physikalischen Inhalte ins Spiel, sondern prägte nur einen neuen Ausdruck für etwas, das bisher durch mathematische Formeln und eher schwerfällige Umschreibungen dargestellt worden war, doch hatte dies einen unzweifelhaften Einfluss auf die weitere Entwicklung. Clausius zeigte, dass es für jedes thermodynamische System eine Funktion seines Zustandes gibt, seine Entropie, bezeichnet mit S.

Die Zunahme der Entropie eines Systems in einem zeitlich reversiblen Prozess steht in Beziehung zur Wärme, die dem System zugeführt wird, und zu der Temperatur, bei welcher der Prozess stattfindet. Bei irreversiblen Prozesse, die von einen Gleichgewichtszustand zu einem anderen führen, lässt sich

Prof. Dr. Carlo Cercignani
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano, Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, Italien

nur feststellen, dass die Entropiezunahme größer ist als bei reversiblen Prozessen zwischen zwei gleichen Zuständen. Boltzmann blieb es vorbehalten, diese Aussage erstmals in allgemeiner Form (für Gase) bewiesen zu haben. Dafür nutzte er die Mittel der kinetischen Theorie.

Boltzmann trat in diesem Forschungsbereich erstmals 1866 mit dem Versuch in Erscheinung, den zweiten Hauptsatz zu beweisen[1]; er geht dabei von rein mathematischen Lehrsätzen aus, unter der ziemlich eingeschränkten Annahme, die molekularen Bewegungen wären periodisch, und mit der etwas ungeschickten, doch vielleicht zu rechtfertigenden Äußerung, „daß man die Bahnen, falls sie in keiner endlichen Zeit geschlossen sind, doch in einer unendlichen Zeit als geschlossen ansehen darf“[2]. Im Wesentlichen gibt Boltzmann eine recht grobe Rechtfertigung des zweiten Hauptsatzes für reversible Prozesse; Boltzmanns entsprechende Erörterung für irreversible Prozesse gehört eher zum Bereich der reinen Thermodynamik als zur statistischen Mechanik und führt zu der Schlussfolgerung, die Entropie müsse in einem irreversiblen Prozess zunehmen.

Bevor Boltzmann seinen wichtigsten Artikel verfasste, in dem er den zweiten Hauptsatz mittels des später so genannten *H*-Theorems (siehe Infokasten) bewies, hatte er sich Maxwells Techniken angeeignet. Mehr noch hatte er bereits 1868 Maxwells Verteilung auf den Fall ausgedehnt, dass sich Moleküle – einschließlich mehratomiger – im Gleichgewicht in einem Kraftfeld mit Potential befinden; diese wird üblicherweise Maxwell-Boltzmann-Verteilung genannt.

Im Jahr 1872 war Boltzmann schließlich bereit für den letzten Schritt, nämlich die statistische Behandlung auf irreversible Phänomene auszudehnen, auf Basis einer neuartigen Integrodifferentialgleichung, die nach ihm benannt wurde.

Sobald er sich seiner Ergebnisse sicher war, wollte er einen kurzen Artikel in Poggendorffs Annalen veröffentlichen, um sich die Priorität dieser Entdeckung zu sichern, und anschließend die Ergebnisse in ausführlicher Form für die Wiener Akademie aufzubereiten. Doch da sein Mentor Josef Stefan (1835 – 1893) dagegen war, zweimal dasselbe Material zu veröffentlichen, liegt uns nur die knapp 100-seitige Denkschrift vor, welche Boltzmann der Akademie vorlegt, um eine Fülle neuer Ergebnisse vorzustellen. Dies erklärt vielleicht den etwas unspezifischen Titel „Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen“.[3]

Boltzmann begann mit einer Kritik der Maxwellschen Ableitung der Geschwindigkeitsverteilung innerhalb eines Gases im Gleichgewicht und betonte, diese Ableitung zeige lediglich, dass die Maxwellsche Verteilung, wenn sie erst einmal erreicht ist, durch Kollisionen nicht beeinflusst wird. Jedoch, erklärt er: „Es ist somit noch nicht bewiesen, daß, wie immer der Zustand des Gases zu Anfang gewesen sein mag, er sich immer dieser von Maxwell gefundenen Grenze nähern muß.“[4] Dabei dachte Boltzmann offensichtlich an den Fall einer räumlich homogenen Verteilung, mit dem sich auch der erste Teil seiner Denkschrift befasst.

Auf Grundlage einer detaillierten Betrachtung der Kollisionsprozesse erhielt er eine Gleichung für die Verteilungsfunktion, also die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, ein Molekül zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort mit einer bestimmten Geschwindigkeit vorzufinden.

Damit zeigte Boltzmann nicht nur, dass die Maxwellsche Verteilung eine stetige Lösung der Gleichung darstellt, sondern auch, dass man keine andere Lösung finden kann. Das alles erreichte er, indem er eine Größe einführt, welche üblicherweise als *H* bezeichnet wird und welche sich, abgesehen von einem konstanten Faktor, als die „negative Entropie“ entpuppte. Dass es möglich ist, die Entropie durch eine Verteilungsfunktion auszudrücken, war zwar in gewisser Weise zu erwarten, stellte aber

1 *L. Boltzmann*, Wien. Ber., **53**, 195 (1866), auch: Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. I, S. 9

2 Wiss. Abh., Bd. I, S. 30

3 *L. Boltzmann*, Wien. Ber., **66**, 275 (1872); auch: Wiss. Abh., Bd. I, S. 316

4 Wiss. Abh., Bd. I, S. 319/320

LUDWIG BOLTZMANN

Ludwig Eduard Boltzmann (geb. am **20. Februar 1844** in Wien) erhielt **1867** in Wien eine Stelle als Assistenz-Professor; zwei Jahre später übernahm er den Lehrstuhl für Mathematische Physik an der Universität Graz. Boltzmanns Ankunft in Graz markierte den Beginn einer Periode intensiver wissenschaftlicher Aktivität, die **1872** mit der Veröffentlichung seines bekanntesten Artikels in den Sitzungsberichten der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien ihren Höhepunkt erreichte; in diesem Artikel führte er jene berühmte Gleichung ein, die heute nach ihm benannt ist. **1873** nahm er den Ruf als Professor für Mathematik nach Wien an, **1876** ging er zurück nach Graz und übernahm den Lehrstuhl für Physik. Er heiratete kurz darauf Henriette von Aigentler, mit der er zwei Söhne und zwei Töchter hatte, und verbrachte 14 glückliche Jahre in Graz. Doch im Jahr **1888** entwickelte er psychische Störungen, die zum Teil aus einer Unsicherheit resultierten, ob er eine Position in Berlin akzeptieren sollte (schließlich lehnte er ab – nachdem der Kaiser bereits seinen Vertrag unterzeichnet hatte). **1890** übernahm er den Lehrstuhl für Theoretische Physik an der Universität München.

Im Jahr **1894** kehrte Boltzmann an die Universität Wien zurück, zog dann **1900** nach Leipzig, nur um nach zwei Jahren wiederum nach Wien gehen. Als selbst ein Urlaubsaufenthalt in Duino nahe Triest seiner Krankheit keine Linderung verschaffte, beging er in einem Moment tiefer Depression am **5. September 1906** Selbstmord

Boltzmann unternahm zahlreiche Auslandsreisen, um seine wissenschaftlichen Kontakte zu intensivieren. Mehrfach führten ihn diese Reisen auch in die USA. **1899** hielt er vier Vorträge an der Clark University in Worchester (Massachussetts), die ihm auch einen Ehrendoktor verlieh. Im Oktober **1904** nahm er an einer Konferenz in St. Louis teil, und im folgenden Jahr hielt er 30 Vorträge an der Sommerschule der University of California in Berkeley. Über diese letzte Reise verfasste er einen amüsanten Bericht unter dem Titel „Reise eines deutschen Professors in Eldorado“.

Boltzmann mit 58 Jahren.

dennoch eine bemerkenswerte Tatsache dar, welche Boltzmanns Zeitgenossen tief beeindruckt haben muss. Wie Boltzmann selbst bemerkte, war dies ein völlig neuer Ansatz für den Beweis des Zweiten Hauptsatzes, welcher nicht nur die Existenz einer Entropiefunktion für Gleichgewichtszustände zeigte, sondern zudem deren Zunahme in irreversiblen Prozessen ermöglichte. Der Beweis des zweiten Hauptsatzes auf Basis der Boltzmann-Gleichung trägt den Namen *H*-Theorem (siehe Infokasten).

Boltzmann lieferte eine alternative Ableitung, basierend auf einem Modell mit diskreten Energien, indem er die Integrodifferentialgleichung für die Verteilungsfunktion in ein System gewöhnlicher nichtlinearer Differenzialgleichungen umwandelte. Die Verwendung diskreter Energien erschien Boltzmann immer „viel klarer und anschaulicher“[5]. Diese Aussage mag naiv klingen, könnte jedoch auch ein überraschender Hinweis auf eine Vorahnung der Schwierigkeiten eines strengen Beweises der Entwicklung zum Gleichgewicht sein. Diese Schwierigkeiten verschwinden, wenn man sich mit einem diskreten, endlichen System von Gleichungen befasst, da die Unbekannte sich, zu jedem Zeitpunkt, von einer Formel auf einen endlichen Satz von Zahlen reduziert (wir beschäftigen uns mit einem endlich-dimensionalen Raum, nicht mit einem Funktionenraum); diese Vereinfachung erlaubt es eine – bereits zu Boltzmanns Zeit bekannte – Eigenschaft (das sog. Bolzano-Weierstrass-Theorem) zu nutzen, um die beobachtete Tendenz ohne besonders anspruchsvolle mathematische Argumente abzuleiten. Viele Wissenschaftshistoriker hoben den Umstand hervor, dass diese von Boltzmann verwendeten diskreten Modelle Planck zur Entdeckung seiner Energiequanten geführt haben könnten. Sicher ist, dass einige Bemerkungen Boltzmanns Planck dazu veranlassten, seinen ursprünglichen Ansatz zu ändern, wie er selbst in seiner Nobelpreisrede anerkannte.[6]

Nur einige Seiten von Boltzmanns umfangreicher Denkschrift befassen sich mit der Berechnung der Transporteigenschaften in einem Gas. Doch in diesen wenigen Seiten legte Boltzmann seine Gleichung in der uns vertrauen Form dar, wobei die Verteilungsfunktion von Zeit, Geschwindigkeit und Position abhängt. Seine Berechnungen zeigen, dass man mit seiner Gleichung – bei so genannten Maxwellschen Molekülen – für Viskosität, Wärmeübertragung und Diffusionskoeffizienten die gleichen Werte erhält wie Maxwell. Doch Boltzmann warnte vor der Illusion, seine Berechnungen ließen sich problemlos auf komplexere Wechselwirkungsgesetze übertragen.

Protest mit Paradoxa

Bei seinen Zeitgenossen rief die Boltzmann-Gleichung eine Reihe von Einwänden hervor, die sich in zwei Paradoxa zusammenfassen lassen, dem Loschmidt- und dem Zermelo-Paradox. Boltzmanns *H*-Theorem ist von elementarer Bedeutung, weil es zeigt, dass seine Gleichung ein grundlegendes Merkmal der Irreversibilität enthält: Die Größe *H* wird mit der Zeit immer kleiner (vorausgesetzt, das Gas tauscht nicht Masse oder Energie mit einer festen Grenzfläche aus).

Dieses Ergebnis scheint im Widerspruch mit der Tatsache zu stehen, dass die Moleküle, aus denen das Gas besteht, den Gesetzen der klassischen Mechanik folgen, welche zeitlich umkehrbar sind.

Demzufolge kann man, bei einer Bewegung zu einem bestimmten Zeitpunkt und mit bestimmten Molekülgeschwindigkeiten, immer auch die Bewegung mit umgekehrten Geschwindigkeiten (und gleichen Molekülpositionen wie zuvor) zum gleichen Zeitpunkt betrachten; die Rückwärtsentwicklung des letzteren Zustandes ist dabei gleich der Vorwärtsentwicklung des ursprünglichen Zustandes. Demnach sollte *H*, wenn es im ursprünglichen Zustand abnimmt, auch im zweiten Zustand abnehmen, was Boltzmanns *H*-Theorem widerspricht.

Josef Loschmidt erwähnt dieses Paradox im ersten von vier Arti-

5 Wiss. Abh., Bd. I, S. 346

6 http://nobelprize.org/physics/laureates/1918/planck-lecture.html

DIE BOLTZMANN-GLEICHUNG UND DAS H-THEOREM

Die **Boltzmann-Gleichung** bestimmt die Zeitentwicklung der Verteilungsfunktion in einem idealen Gas von Molekülen, welche man sich als feste Kugeln oder Punktmassen vorstellt, die mit einer zentralen Kraft wechselwirken. Die Gleichung lautet:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}+\boldsymbol{X}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}=Q(f,f);$$

$$Q(f,f)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)=\int\int B\big(\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*),\ |\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*|\big)(f'f'_*-f'f'_*)\sin\theta\, d\theta d\varphi d\boldsymbol{v}_*\quad,$$

wobei $f=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte bezeichnet, dass man ein Gasmolekül am Ort $\boldsymbol{x}$ mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ zum Zeitpunkt t findet. $\boldsymbol{X}$ ist die äußere Kraft pro Masseneinheit (wie z. B. die Schwerkraft), die auf ein Molekül einwirkt. Wir bezeichnen mit f_* $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}^*, t)$, wobei $\boldsymbol{v}_*$ die Geschwindigkeit eines Partners bei einer Kollision ist, und $f' = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}', t)$, $f'_* = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}'^*, t)$, wobei

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{n}[\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*)]$$
$$\boldsymbol{v}'_* = \boldsymbol{v}_* + \boldsymbol{n}[\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*)]$$

Hier ist $\boldsymbol{n}$ der Einheitsvektor, der mit den Winkeln θ und φ verknüpft ist. Den quadratischen Operator $Q(.,.)$ nennt man **Kollisionsoperator**.

Der Kern B hängt vom Molekülmodell ab: Wenn die Moleküle harte Kugeln sind, ist $B(\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*), |\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*|)$ proportional zu $|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*|\sin\theta\cos\theta$.

Die Boltzmann-Gleichung sieht sehr anspruchsvoll aus, und das ist sie auch; sie ist sehr schwer zu lösen und dies, mit Ausnahme weniger Fälle (insbesondere Gleichgewichtszustände), auch nur näherungsweise.

Doch sie liefert die Grundlage der Erforschung von Transporteigenschaften idealer Gase. Wenn das Gas verdünnt ist und sich nicht als Kontinuum beschreiben lässt, ist die Boltzmann-Gleichung das einzige Werkzeug, dass zur Beschreibung dienen kann.

Ausgehend von seiner Gleichung (wenn f unabhängig von $\boldsymbol{x}$ ist), entwickelte Boltzmann die Ungleichung

$$dH/dt \le 0,$$

wobei sich die Größe $H = \int f \log f\, d\boldsymbol{v}$, abgesehen von einem negativen konstanten Faktor, als die Entropie des Gases interpretieren lässt.

keln zum Thema des thermischen Gleichgewichts in einem System von Körpern unter Einfluss der Schwerkraft.[7] Er stellt fest, dass sich in jedem System der komplette Ablauf der Ereignisse umkehrt, wenn zu irgendeinem Zeitpunkt die Geschwindigkeiten aller darin enthaltenen Teile umgekehrt werden.

Trotz der etwas unklaren Argumentation Loschmidts erkannte Boltzmann sofort den zentralen Punkt und veröffentlichte einen Artikel[8], in dem er, nachdem er seinem Kritiker angemessene Anerkennung gezollt hatte, das Paradox in weitaus klarerer Form darstellt, es darauf von allen Seiten beleuchtet und mit der Erkenntnis schließt, die von Loschmidt beschriebene Situation könne gar nicht eintreten, und zwar aufgrund der riesigen Zahl von Molekülen, die selbst ein makroskopisch kleiner Raum enthält. In diesem Artikel erkennt Boltzmann ausdrücklich den Wahrscheinlichkeitscharakter des zweiten Hauptsatzes.

Der andere Einwand, der gegen das *H*-Theorem vorgebracht werden kann, wenn es als strenge Folge der Gesetze der Dynamik dargestellt wird, drückt sich in dem Paradox aus, das nach dem bekannten Mathematiker Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo benannt ist; dieser war damals Assistent von Max Planck am Institut für Theoretische Physik in Berlin. Zermelos Schlussfolgerung[9] basierte auf einem Theorem von Henri Poincaré, wonach eine begrenzte, den Gesetzen der klassischen Mechanik unterworfene Welt zwangsläufig ein Stadium durchlaufen wird, das sehr nah an seinem Ausgangsstadium liegt; demzufolge müssten sich die Ausgangsstadien in einem Gas wiederholen, was einer mechanischen Erklärung der Zunahme von Entropie widerspricht.

In seiner Antwort[10] stellte Boltzmann klar, dass ohne eine Berechnung der Zeit, die diese Wiederholung benötigt, man nicht folgern könne, dass die Hypothese der Gastheorie verworfen oder fundamental verändert werden müsse; sonst verhielte man sich wie ein Würfelspieler, der berechnet hat, dass die

Boltzmanns Arbeitsgruppe in Graz im Jahr 1887: (v. l. stehend) Aulinger, Franz Streintz, Svante Arrhennius, Hiecke, (sitzend) Albert von Ettinghausen, Ludwig Boltzmann, Ignaz Klemencic, V. Hausmanninger. (Quelle: Universität Graz)

Wahrscheinlichkeit, 1000 Einsen in Folge zu würfeln, nicht null ist, und daraufhin schlussfolgert, seine Würfel müssten „gezinkt“ sein, nur weil er eine solche Sequenz noch nie gesehen hat!

Heute wissen wir, wie eine strikte Ableitung der Boltzmann-Gleichung für elastische Kugeln aussehen muss. Wir müssen nur die Moleküldichte n unbegrenzt ansteigen und den Durchmesser σ so gegen Null gehen lassen, dass $n\sigma^2$ konstant bleibt. Dann verschwinden alle Paradoxa. Ohne diesen Grenzübergang treten statistische Schwankungen auf, und die Gleichung ist nicht im strengen Sinne korrekt. In der Praxis sind Schwankungen dieser Art völlig vernachlässigbar.

„Eine wahre Perle ...“

Auch das Verdienst, die statistische Gleichgewichtsmechanik für allgemeine Systeme begründet zu haben, liegt bei Boltzmann; dies geschah mit einem im Jahr 1884 verfassten grundlegenden Artike11[11], der weitaus seltener zitiert wird als seine anderen Beiträge. Hier formulierte er die Hypothese, man könne einige der möglichen stetigen Verteilungen als makroskopische Gleichgewichtszustände interpretieren. Diese fundamentale Arbeit wurde von Gibbs aufgegriffen, erweitert und in einer nunmehr klassischen Abhandlung dargelegt[12]; es ist die von Gibbs eingeführte Terminologie, die heute im Gebrauch ist. Ein statistisches Ensemble (in Gibbs Worten) nannte Boltzmann „Monode“. Er stellte die folgende Frage: Welche statistischen Familien stetiger Verteilungen haben die Eigenschaft, ein Gas im Gleichgewicht zu beschreiben? Dazu ist es erforderlich, dass wenn sich die Parameter des Gases infinitesimal ändern, die durchschnittliche Gesamtenergie des Systems E, der Drucks p und das Volumens V, infinitesimal ändern, dass $(dE + pdV)/T$ (wobei T die Temperatur ist, bezogen auf die mittlere kinetische Energie pro Teilchen) ein exaktes Differential ist (zumindest im thermodynamischen Limes, wenn $V \to \infty$, $N \to \infty$, wobei N/V begrenzt bleibt). Familien mit dieser Eigenschaft nennt Boltzmann „Orthoden“. Seine Antwort auf die selbst gestellte Frage lautet, dass es mindestens zwei Ensembles dieser Art gibt, die Ergode (Gibbs' „mikrokanonisches Ensemble“) und die „Holode“ (Gibbs' „kanonisches Ensemble“).

In seiner wissenschaftlichen Tätigkeit widmete sich Boltzmann in erster Linie der statistischen Mechanik, doch war er in allen Bereichen der Physik seiner Zeit zu Hause und lieferte nicht zuletzt einen grundlegenden Beitrag zur Thermodyna-

7 *J. Loschmidt*, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien **73**, 139 (1874)

8 *L. Boltzmann*, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien **75**, 67 (1877)

9 *E. Zermelo*, Wiedemanns Annalen **57**, 485 (1886)

10 *L. Boltzmann*, Wiedemanns Annalen **57**, 773 (1886), auch: Wiss. Abh., Bd. III, S. 567

11 *L. Boltzmann*, Wiedemanns Annalen **22**, 291 (1884), auch: Wiss. Abh., Bd. III, S. 118

12 *J. W. Gibbs*, Elementary Principles in Statistical Mechanics, Yale University Press (1902)

mik der Wärmestrahlung. 1879 hatte Josef Stefan mit einer Analyse seiner recht rudimentären Versuchsergebnisse bezüglich eines geschlossenen, Schwarzkörper-ähnlichen Hohlraums herausgefunden, oder vielleicht auch nur spekuliert, dass die Dichte *e* der Strahlungsenergie zur vierten Potenz der absoluten Temperatur *T* proportional ist. Dies heißt zumeist Stefan-Boltzmann-Gesetz, weil Boltzmann 1883 die gleiche Beziehung auf theoretischer Grundlage ableitete[13], indem er Ideen aus zwei – damals recht modernen – Disziplinen kombinierte, nämlich der Thermodynamik und den Maxwellschen Gleichungen. Es war also keine Übertreibung, als Lorentz dies als „wahre Perle der theoretischen Physik"[14] bezeichnete.

Porträt Boltzmanns aus dem 3. Band seiner „Wissenschaftlichen Abhandlungen" (Radierung von August Steinberger)

Von der Theorie zur Praxis

Die Boltzmann-Gleichung ist nicht nur ein konzeptuelles, sondern auch ein ganz praktisches Werkzeug. Wenn ein Raumfahrtingenieur den Wiedereintritt eines Space Shuttle untersucht, muss er die Tatsache berücksichtigen, dass die Beschreibung der Luft als Kontinuum, wie sie üblicherweise bei der Konstruktion von Flugzeugen zugrunde gelegt wird, im oberen Teil der Atmosphäre nicht mehr funktioniert. Deshalb muss er hier die Boltzmann-Gleichung anwenden. Auch wenn wir die Bewegung kleinster Teilchen untersuchen wollen, die unsere Atmosphäre verschmutzen, müssen wir aufgrund ihrer geringen Größe das Modell der Luft als Kontinuum aufgeben und die Boltzmann-Gleichung nutzen. Ingenieure verwenden angemessene Anpassungen der selben Gleichung zur Untersuchung wichtiger Phänomene in anderen Bereichen moderner Technologie, von der Neutronenbewegung in Kernreaktoren bis zur Bewegung geladener Teilchen in einem zukünftigen Fusionsreaktor, von der Strahlung in einer Brennkammer bis zur Bewegung von Ladungsträgern in den winzigen Halbleiter-Chips für Computer.

Und es gibt noch einen weiteren Anwendungsbereich für die Boltzmann-Gleichung: Der Entwurf und die Herstellung von Mikromaschinen, deren Größe zwischen wenigen Mikro- und ein paar Millimetern liegt. Phänomene in verdünnten Gasen, bei Maschinen normaler Größe eher kuriose Laborphänomene, können gerade die entscheidende Grundlage für Mikrosysteme darstellen. Tatsächlich finden sich Ströme verdünnter Gase in vielen mikro-elektro-mechanischen Systemen (MEMS) wie zum Beispiel Aktuatoren, Mikroturbinen, Gaschromatographen und Mikroflugzeugen (Micro Air Vehicles, MAVs). Eine genaue Vorhersage dieser Strömungen ist entscheidend für Planung und Entwicklung von MEMS.

In Computern spielt Design im Nanobereich nicht mehr nur bei der Chip-Technologie, sondern auch bei mechanischen Teilen eine Rolle. In modernen Laufwerken schwebt der Schreib-/Lesekopf rund 50 nm über der drehenden Scheibe. Die Vorhersage der auf den Kopf einwirkenden vertikalen Kraft (wie man sie aus der Druckverteilung im Gas erhält) ist eine entscheidende Planungsgröße, denn der Kopf kann nicht fehlerfrei lesen oder schreiben, wenn er zu hoch schwebt; senkt er sich zu tief, kann dies zu katastrophalen Kollisionen mit der Platte führen.

Ein Pionier der modernen Physik

Boltzmann hatte große Schwierigkeiten, seine Theorien seinen Zeitgenossen verständlich zu machen. Doch sein Standpunkt erhielt mehr und mehr Bestätigung und hatte wesentlichen Einfluss auf die Entwicklung der Physik des 20. Jahrhunderts, insbesondere auf die Arbeiten von Planck und Einstein. Boltzmann erscheint heute in mancherlei Hinsicht als Pionier der modernen Physik: Er besaß gewissermaßen eine moderne Vorstellung von Wissen: Alles ist zwar scheinbar unverbunden, unabhängig und verschieden, doch andererseits auf subtile Weise miteinander verknüpft. Der Reduktionismus ist somit gleichermaßen wahr und falsch. Das weist nicht zuletzt auf die Wichtigkeit aller Formen von Wissen, die wir zum Verständnis unserer komplexen Welt benötigen.

*

Die Übersetzung dieses Artikels aus dem Englischen besorgte Jutta Pistor.

Literatur

L. Boltzmann, Populäre Schriften, J. A. Barth, Leipzig (1905)

L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie, J. A. Barth, Leipzig (1895-1898)

L. Boltzmann, Wissenschaftlichen Abhandlungen (3 Bände), hrsg. v. *F. Hasenöhrl*, J. A. Barth, Leipzig (1909)

L. Boltzmann, Entropie und Wahrscheinlichkeit (1872-1905), hrsg. v. *D. Flamm*, Harri Deutsch (2000)

S. G. Brush, Kinetic Theory, Vol. 2: Irreversible Processes, Pergamon, Oxford (1966)

C. Cercignani, The Boltzmann Equation and Its Applications, Springer, N. Y. (1988)

C. Cercignani, Ludwig Boltzmann. The Man Who Trusted Atoms, Oxford University Press, Oxford (1998)

I. M. Fasol-Boltzmann (Hrsg.), Ludwig Boltzmann, Zum hundertsten Todestag, Springer, Wien (2006)

13 *L. Boltzmann*, Crelles Journal **98**, 68 (1884), auch: Wiss. Abh., Bd. III, S. 123

14 *H. A. Lorentz*, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **9**, 206 (1907)

DER AUTOR

Carlo Cercignani ist Professor für Theoretische Mechanik am Politecnico di Milano. Sein Hauptforschungsgebiet ist die mathematische Theorie der Boltzmann-Gleichung und ihre Anwendung auf die Dynamik verdünnter Gase. Er veröffentlichte rund 300 wissenschaftliche Artikel in Fachzeitschriften und Tagungsbänden. Außerdem ist er Autor mehrerer Bücher über die Boltzmann-Gleichung und einer Biografie über Ludwig Boltzmann (s. Literatur).