

# Schwingungen im Gleichtakt

Synchronisation – ein universelles Ordnungsprinzip für Oszillationen und Rhythmen

Ulrich Parlitz, Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum und Jürgen Kurths

**Was verbindet im Gleichtakt blinkende Glühwürmchen mit dem elektrischen Verhalten eines Josephson-Kontaktes im Hochfrequenzfeld? In beiden Fällen ist Synchronisation am Werk – ein Phänomen, das die Nichtlineare Dynamik in den vergangenen Jahren zunehmend ins Visier genommen hat. Dabei zeigte sich, dass sowohl periodische als auch chaotische Systeme in den synchronen Gleichschritt verfallen können.**

Im Jahre 1665 war Christiaan Huygens intensiv damit beschäftigt, seine neueste Erfindung, nämlich hochseetaugliche Pendeluhr, zu verbessern. Dabei bemerkte er, dass seine Präzisionsuhren oft über lange Zeit synchrone Pendelbewegungen zeigten, sofern sie an einem gemeinsamen Holzbalken angebracht waren. Durch gezielte Experimente entdeckte Huygens, dass für den beobachteten Gleichtakt der Uhren kleine, mit bloßem Auge unsichtbare Schwingungen der Balken verantwortlich sind. Bei einer kürzlich durchgeführten Rekonstruktion des historischen Experiments zeigte sich, dass Huygens offenbar das Glück des Tüchtigen zuteil wurde, denn wären die Gehäuse seiner Uhren nicht so schwer ausgefallen, hätte er die Synchronisation möglicherweise nie beobachtet [1]. Heute gilt die Synchronisation als der erste, wissenschaftlich genau untersuchte nichtlineare, dynamische Effekt.

Doch erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts griffen Appleton und van der Pol bei der Konstruktion von Röhrenoszillatoren dieses Thema wieder auf und leisteten weitere Pionierarbeit zur Synchronisation nichtlinearer Schwingungen, darunter auch die erste mathematische Beschreibung dieses Phänomens. Zuvor hatte Lord Rayleigh beobachtet, dass benachbarte Orgelpfeifen gleicher Tonhöhe trotz unvermeidlicher Unterschiede ihre Schwingungen synchronisieren und so exakt die gleiche Schallfrequenz abstrahlen können. Dieses Experiment wurde vor kurzem in Potsdam wiederholt und mit modernen Methoden analysiert (Abb. 1) [2].

Warum dauerte es über 200 Jahre, bis die Bedeutung von Huygens' Beobachtungen erkannt und die Erforschung der Synchronisation fortgesetzt wurde? Im Zentrum des wissenschaftlichen Interesses standen lange Zeit *konservative Oszillatoren*, die seit Newton in der Mechanik eingehend untersucht wurden, z. B. als



Damit hatte bei der Eröffnung der Millennium Bridge in London niemand gerechnet: Durch die Synchronisation der Fußgänger, die unbewusst in Gleichschritt verfielen, geriet die Brücke dermaßen ins Schwingen, dass sie gleich wieder gesperrt werden musste.

Zweikörperproblem mit Gravitationswechselwirkung. Bei diesen aus der klassischen Mechanik bekannten Systemen ist die Energie eine Erhaltungsgröße und die Schwingungsamplitude kann, abhängig von der Energie, beliebig hohe Werte annehmen. Konservative Oszillatoren können *nicht* synchronisieren, ihre Dynamik ist stattdessen durch lineare und nichtlineare Resonanzen bestimmt. Zur Synchronisation bedarf es jedoch einer gewissen Irreversibilität, wie sie bei dissipativen, selbsterregten Oszillatoren auftritt, zu denen

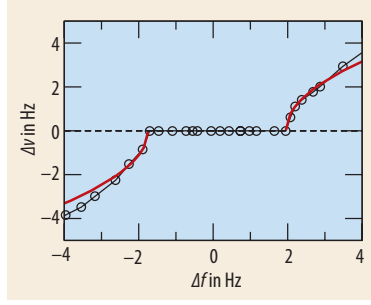
## KOMPAKT

- Synchronisation tritt in vielseitigen Formen auf und trägt oft entscheidend zur Funktion eines Organismus' oder Geräts bei.
- Zu den universellen Eigenschaften der Synchronisation gehört, dass Oszillatoren zur Phasensynchronisation „neigen“ und zwar immer so, dass die dafür erforderliche Kopplung (zunächst) linear mit der Frequenzdifferenz der ungekoppelten Oszillatoren anwächst.
- In einem Ensemble schwach wechselwirkender Oszillatoren setzt kollektive Synchronisation oft als universeller Nichtgleichgewichts-Phasenübergang ein, der mit dem Kuramoto-Modell beschrieben wird.
- Auch chaotische Systeme können vollständig synchronisieren und folgen dann gemeinsam exakt dem gleichen aperiodischen Schwingungsmuster.

Prof. Dr. Ulrich Parlitz, 3. Physikalisches Institut, Universität Göttingen, Friedrich-Hund-Platz 1, 37077 Göttingen; Prof. Dr. Arkady Pikovsky, Priv.-Doz. Dr. Michael Rosenblum und Prof. Dr. Jürgen Kurths, Institut für Physik, Universität Potsdam, Am Neuen Palais 10, 14469 Potsdam



Abb. 1 Trotz unvermeidlicher Abweichungen voneinander können benachbarte Orgelpfeifen (links) exakt die gleiche Frequenz abstrahlen. Bei kleiner Frequenzverstimmung  $\Delta f$  der Pfeifen im ungekoppelten Zustand treten synchro-



ne Oszillationen auf, und die Frequenzdifferenz  $\Delta \nu$  der von den Pfeifen abgestrahlten Schallwellen verschwindet (rechts). Außerhalb des Plateaus bei  $\Delta \nu = 0$  folgt  $\Delta \nu$  im Wesentlichen  $\Delta f$  (aus [2]).

auch die Pendeluhrn gehören. Bei selbsterregten Oszillationen ist die Energie keine Erhaltungsgröße. Ihre Schwingungen konvergieren gegen bestimmte, von Anfangswerten unabhängige Formen, sog. Attraktoren, die durch eine dynamische Balance von Energiezufuhr und Dissipation bestimmt sind (siehe Infokasten „Selbsterregte Oszillatoren und deren Attraktoren“).

Das Interesse an diesem Typ dynamischer Systeme wuchs zu Anfang des 20. Jahrhunderts mit der neuen Disziplin der Nichtlinearen Dynamik und der praktischen Herausforderung, die neu erfundenen elektrischen (Röhren-)Generatoren zu verstehen. Inzwischen kamen viele andere Oszillatoren hinzu, z. B. Laser, Josephson-Kontakte, feuernde Neuronen und chemische Reaktionen. Physiologische Rhythmen synchronisieren ebenso wie ökologische Zyklen oder bestimmte geophysikalische Phänomene. Die Synchronisation in diesen und weiteren Systemen ist sehr ähnlich und lässt sich daher im Rahmen einer allgemeinen, abstrakten Theorie beschreiben.

### Angeregt und in Phase

Eine einzige Größe charakterisiert die Dynamik selbsterregter periodischer Schwingungen: die Phase. Sie nimmt während der Schwingung monoton zu und ist neutral stabil, d. h. jede Störung, also Phasenverschiebung, setzt sich konstant fort, ohne anzuwachsen oder abzuklingen. Hält man z. B. eine Pendeluhr mit der Hand kurze Zeit fest und lässt sie danach weiter frei schwingen, so geht die Uhr um einen festen Betrag nach. Durch ihre neutrale Stabilität und Zeitentwicklung lässt sich die Phase relativ leicht verschieben, und genau diese Eigenschaft ermöglicht die Synchronisation wechselwirkender selbsterregter Oszillatoren.

Die Natur der Wechselwirkung kann sich dabei unterscheiden: mechanische Vibrationen der Balken bei Pendeluhrn, elektrische Ströme zwischen Röhrenoszillatoren und Josephson-Kontakten oder Schallwellen bei wechselwirkenden Orgelpfeifen. Für den dynamischen Vorgang der Synchronisation und dessen mathematische Beschreibung ist der physikalische Ursprung der Kraft jedoch eher irrelevant. Bereits eine

schwache Kopplung reicht aus, um die Schwingungsphase zu beschleunigen oder abzubremesen. Daher sind bereits geringe periodische, äußere Anregungen in der Lage, Schwingungen und Frequenzen zu justieren, und Oszillatoren können ihre Perioden durch schwache Wechselwirkung einander anpassen. Genau dies hatte Huygens beobachtet.

Diese Art der Synchronisation wird häufig auch technisch genutzt. So besitzen moderne Funkuhren einen selbsterregten elektronischen Oszillator, der aus der Ferne vom Präzisionsgenerator der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt PTB justiert wird, und beim „injection locking“ wird die Frequenz eines leistungsstarken Lasers durch Injektion von Licht eines schwächeren Lasers fester Frequenz stabilisiert. Auch bei vielen Alltagserfahrungen zeigt sich die Synchronisation periodischer nichtlinearer Oszillatoren, auch wenn hierfür nicht immer exakte mathematische Beschreibungen existieren. Dazu gehören der Herzschlag und seine Wechselwirkung mit der Atmung sowie Prozesse in Organismen mit einer Periode von ungefähr 24 Stunden. Diese zirkadianen Rhythmen sind durch Helligkeitsschwankungen mit der Tag-Nacht-Abfolge synchronisiert. Experimente mit Testpersonen in abgeschlossenen Räumen haben gezeigt, dass die Periodizität physiologischer Prozesse vom 24-Stunden-Muster abzuweichen beginnt, sobald die Stimulation durch das Tageslicht entfällt [3]. Auch der unangenehme „Jet-Lag“ bei Langstreckenflügen ist eine Folge der Phasenverschiebung zwischen körperinternen Prozessen und der gewohnten Periode des Tageslichts. Durch Neusynchronisation am Ziel wird diese Verschiebung binnen einiger Tage korrigiert.

Eine elementare Theorie der Synchronisation ist relativ einfach (siehe Infokasten „Die Adler-Gleichung“) und liefert folgende Vorhersagen: Die Schwingungsfrequenz  $\Omega$  eines periodisch getriebenen Oszillators passt sich (exakt) der Anregungsfrequenz  $\omega$  an, wenn die Anregungsamplitude einen kritischen Wert  $\epsilon$  überschreitet, der proportional zur Frequenzverstimmung  $\Delta \omega = |\omega - \Omega_0|$  zwischen  $\omega$  und der natürlichen Frequenz  $\Omega_0$  des frei schwingenden Oszillators ist. In

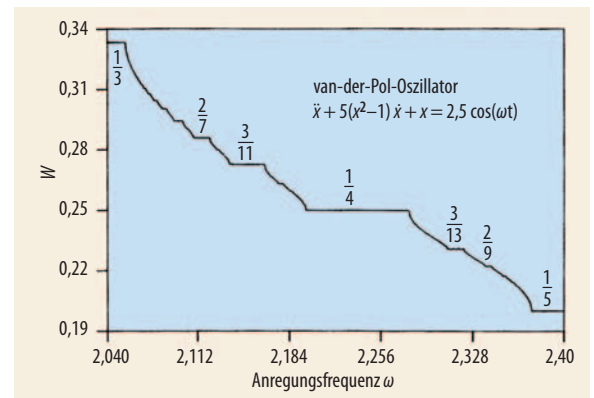


Abb. 2 Synchronisation höherer Ordnung tritt bei rationalen Quotienten  $W=n/m$  für jeweils kleine Intervalle der Anregungsfrequenz  $\omega$  auf. Dabei ist die Windungszahl  $W$  der Quotient aus Oszillatorfrequenz  $\Omega$  und  $\omega$ ,  $W = \Omega/\omega$ . Im Experiment sind von dieser „Teufelstreppe“ meist nur wenige Stufen zu sehen (aus [5]).

ähnlicher Weise zeigen zwei miteinander gekoppelte, selbsterregte Oszillatoren mit geringfügig unterschiedlichen internen Frequenzen einen Übergang zu Schwingungen mit gleicher Periode, sobald die Kopplungsstärke einen kritischen Wert überschreitet, der proportional zur Frequenzdifferenz ist (Abb. 1). Synchronisation kann also im Gegensatz zu fast allen anderen nichtlinearen Phänomenen schon bei beliebig schwacher Wechselwirkung auftreten.

Stimmen die beteiligten Frequenzen nicht (nahezu) überein, so ist Synchronisation höherer Ordnung möglich, bei der die Oszillatoren in einem rationalen Verhältnis  $n\omega = m\Omega$  einrasten. Zumeist treten einfache Fälle mit kleinen ganzen Zahlen  $n$  und  $m$  auf. So können z. B. Schwingungen durch Anregung mit der doppelten ( $\omega = 2\Omega$ ) oder halben ( $\omega = \Omega/2$ ) Frequenz synchronisieren. In der Regel wird für Synchronisation höherer Ordnung eine größere Anregungskraft (bzw. stärkere Kopplung) benötigt, als für den Fall  $n = m = 1$ . Hält man die Anregungskraft konstant und variiert die Anregungsfrequenz  $\omega$  in einem bestimmten Bereich um die natürliche Frequenz  $\Omega_0$ , so treten bei Auftragung der Oszillatorfrequenz  $\Omega$  gegen  $\omega$  verschieden große Plateaus auf, in denen für  $n, m \in \mathbb{N}$  die Bedingung  $n\omega = m\Omega$  erfüllt ist (Abb. 2). Da es unendlich viele Plateaus

gibt, wird der Graph  $\Omega/\omega$  versus  $\omega$  auch als Teufelstreppe bezeichnet. Die Länge der Plateaus nimmt jedoch für große  $n$  und  $m$  sehr schnell ab, sodass sich unter experimentellen Bedingungen (u. a. Rauschen) nur Stufen bis zu einer Mindestgröße beobachten lassen.

Eines der eindrucksvollsten physikalischen Beispiele für diese Synchronisationsstruktur beruht auf einem Josephson-Kontakt in einem hochfrequenten elektromagnetischen Feld [4]. Die Modellgleichungen für einen Josephson-Kontakt mit konstanter Stromquelle sind die gleichen wie die eines Pendels bzw. Rotators, auf das ein konstantes Drehmoment wirkt (bzw. ein Gleichstrom  $I$  beim Josephson-Kontakt). So wie das Pendel bei starkem Antrieb mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit rotiert, wächst beim Josephson-Kontakt die Phase  $\varphi(t)$  mit einer Geschwindigkeit, die sich mit dem Strom  $I$  ändert und mit Hilfe der von Josephson hergeleiteten Beziehung  $U = (\hbar/2e) \langle d\varphi/dt \rangle$  über die mittlere Kontaktspannung  $U$  bestimmen lässt. Wird nun ein zusätzlicher externer Wechselstrom mit der Frequenz  $\omega$  angelegt, so tritt Synchronisation auf, die sich bei Auftragung von  $U$  gegen  $I$  durch entsprechende Spannungsplateaus  $U_{nm} = (n/m) (\hbar\omega/2e)$  manifestiert. Diese, nach ihrem Entdecker benannten Shapiro-Stufen wurden 1963 erstmals beobachtet.

**SELBSTERREGTE OSZILLATOREN UND DEREN ATTRAKTOREN**

Der Prototyp eines selbsterregten Oszillators ist der *van-der-Pol-Oszillator*

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (i)$$

den Balthasar van der Pol um 1920 zur Beschreibung elektrischer Schwingkreise einführte. Für kleine Schwingungsamplituden  $x$  ist der Dämpfungskoeffizient  $\mu(x^2 - 1)$  negativ. Diese „Entdämpfung“ pumpt Energie in den Oszillator und facht eine Schwingung an. Wenn die Amplitude einen gewissen Wert überschreitet, kehrt sich das Vorzeichen um und die Schwingung wird nun gedämpft. Als Folge eines dynamischen Gleichgewichts von Energiezufuhr und Dämpfung entsteht so eine periodische Schwingung von spezifischer Gestalt und Amplitude.

Van der Pol gelang es mithilfe der Störungstheorie, für kleine  $\mu$  eine Näherungslösung  $x(t) \approx 2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$  herzuleiten, die eine stabile periodische Schwingung beschreibt. Im Zustandsraum dieses Oszillators, der durch die Variablen  $x$  und  $\dot{x}$  aufgespannt ist, entspricht diese Lösung einer anziehenden, geschlossenen Kurve, einem *Attraktor*, der auch als stabiler Grenzzyklus bezeichnet wird (Abb. i). Dieser Grenzzyklus lässt sich durch eine einzige skalare Größe – die Phase – parametrisieren, die (wenn man eine geeignete nichtlineare Koordinatentransformation durchgeführt hat) gleichförmig zunimmt,  $d\varphi/dt = \omega_0$ . Wird der Parameter  $\mu$  erhöht, so treten Relaxationsoszil-

lationen auf, bei denen sich schnelle und langsame Bewegungsabläufe abwechseln.

Neben Grenzzyklen gibt es auch komplexere, *seltensame Attraktoren*, die chaotischen Schwingungen zugrunde liegen. Ein typisches Beispiel für einen chaotischen Oszillator ist das von Otto Rössler eingeführte Modell einer abstrakten chemischen Reaktion

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + 0,15y \\ \dot{z} &= 0,4 + z(x - 8,5). \end{aligned} \quad (ii)$$

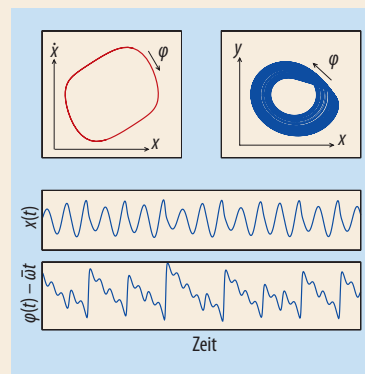


Abb. i: Attraktoren des van-der-Pol-Oszillators (Grenzzyklus, oben links) und des Rössler-Systems (seltensamer Attraktor, oben rechts). Die Variable  $x(t)$  des Rössler-Systems oszilliert chaotisch (Mitte) ebenso wie die Abweichung  $\varphi(t) - \omega_0 t$  zwischen Phase  $\varphi(t)$  und mittlerem Wachstum  $\omega_0 t$ .

Dieses Differentialgleichungssystem beschreibt Schwingungen der Konzentrationen  $x, y, z$  dreier Reagenten und besitzt einen chaotischen Attraktor. In der Projektion in die  $x, y$ -Ebene kann man dem *Rössler-System* recht einfach mithilfe von Polarkoordinaten eine Phase  $\varphi(t)$  zuordnen (Abb. i). Der Polwinkel liefert eine approximative Beschreibung der Phase, die mit der Zeit anwächst. Die Zeitentwicklung dieses Winkels verläuft etwas irregulär, weil die Umlaufgeschwindigkeit amplitudenabhängig und chaotisch ist. Dennoch kann man eine mittlere Umlauffrequenz  $\bar{\omega} = \langle \dot{\varphi} \rangle$  einführen und untersuchen, wie sie sich bei (periodischer) äußerer Anregung oder Kopplung mit einem anderen (chaotischen) Oszillator verändert.

Eine interessante Realisierung selbsterregter periodischer und chaotischer Schwingungen basiert auf einem negativen differentiellen Widerstand, der bei der anodischen Auflösung von Nickel in Schwefelsäure auftritt. Wird eine Zelle mit einer Ni-Anode in einer  $H_2SO_4$ -Lösung mittels eines Widerstands mit einer externen Gleichstromquelle verbunden, so treten oberhalb einer gewissen Spannung Stromoszillationen mit einer charakteristischen Periode auf. In bestimmten Bereichen der äußeren Spannung sind diese Stromschwankungen chaotisch und ähneln sehr den Oszillationen des Rössler-Systems (vgl. Abb. 5).

## Symphonie ohne Dirigent

So wie zwei Schwingungssysteme ihre Frequenzen angleichen können, kann auch eine größere Zahl gekoppelter Oszillatoren synchronisieren. Im Allgemeinen spielt dabei neben der Einzeldynamik die jeweilige räumliche Anordnung der Systeme (z. B. auf einem Ring oder Gitter) eine wichtige Rolle, da sie die Vernetzungstopologie, Kopplungsstärken und eventuelle Zeitverzögerungen bei der Wechselwirkung mitbestimmt. Ein wichtiger Spezialfall ist ein Ensemble ähnlicher Oszillatoren, die (fast) alle miteinander wechselwirken. Ein solches Oszillatorsystem erhält man z. B. durch Zusammenschaltung mehrerer Josephson-Kontakte mit Hilfe einer gemeinsamen Last oder in Form von Lasern, deren elektrische Felder miteinander überlappen.

Auch in der Biologie gibt es viele Beispiele für Synchronisation: Das vielleicht spektakulärste Phänomen sind im Gleichtakt blinkende Glühwürmchen, wie man sie z. B. in Bäumen Südostasiens findet [3].<sup>1)</sup> Jedes Glühwürmchen hat dabei zunächst seine eigene Blinkfrequenz, kann aber auch die Lichtblitze seiner benachbarten Artgenossen „sehen“ und adjustiert daraufhin seine Frequenz. So verfallen zunächst wenige Paare und dann immer mehr Glühwürmchen in ein synchronisiertes Blinken, bis schließlich der gesamte Baum periodisch aufleuchtet. Auch die Entstehung

1) Synchron blinkende Glühwürmchen wurden in der westlichen Literatur zuerst 1680 von E. Kaempfer nach einer Siam-Reise beschrieben und sind heute einer der Haupttouristenattraktionen im Firefly Park Resort in Kuala Selangor (Malaysia).

von Gehirnrythmen führt man auf Synchronisation wechselwirkender Neuronen zurück. Da Neuronen sehr kurze Spikes abfeuern, modelliert man neuronale Ensemble durch pulsgekoppelte Oszillatoren (diese sind auch auf Glühwürmchen anwendbar) und sog. integrate-and-fire-Modelle.

In den 1960er-Jahren untersuchte der theoretische Biologe Winfree Systeme gekoppelter Oszillatoren, um so z. B. das synchrone Blinken der Glühwürmchen zu beschreiben [6]. Kuramoto hat 1975 ein mathematisch lösbares Modell für das Einsetzen dieser Art globaler Synchronisation vorgeschlagen, das mittlerweile für die Theorie der Ensemblesynchronisation eine ähnliche Bedeutung erlangt hat wie das Ising-Modell für Phasenübergänge [4]. Er betrachtete ein Ensemble von  $N$  Oszillatoren, deren natürliche Frequenzen gemäß  $g(\omega)$  verteilt sind. Jeder dieser Oszillatoren ist mit jedem anderen gekoppelt, und diese Kopplungen seien durch die Adler-Gleichung beschrieben (vgl. Infokasten). Auf diese Weise erhält man als Differentialgleichungen für die Phasen  $\varphi_k$  der beteiligten Oszillatoren

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \omega_k + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \varphi_k)$$

mit der Kopplungsstärke  $\epsilon$ . Um den thermodynamischen Grenzübergang  $N \rightarrow \infty$  durchführen zu können, ist die Kopplung mit der Ensemblegröße  $N$  normiert. Ausgangspunkt für die analytische Behandlung

### DIE ADLER-GLEICHUNG

Die Adler-Gleichung beschreibt die Phasendynamik schwach getriebener oder gekoppelter, periodischer Oszillatoren. Anstelle einer genauen Herleitung [4] beschränken wir uns hier auf eine qualitative Motivation (siehe auch das Beispiel im nächsten Infokasten).

Jede selbsterregte, periodische Schwingung lässt sich zerlegen in eine Amplitude, die während der Schwingungsperiode bestimmte Werte stabil durchläuft, und eine Phase, die neutral stabil und daher beliebig verschiebbar ist. Eine schwache Kopplung beeinflusst (in erster Näherung) nur die Phase. Die Bewegungsgleichungen der Phasen  $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$  und  $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$  zweier Oszillatoren müssen also auf der rechten Seite um gewisse, von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  abhängige Terme ergänzt werden. Wenn wir nun annehmen, dass diese Kopplungsterme klein gegenüber den Frequenzen  $\omega_{1,2}$  sind, dann können wir über die durch  $\omega_{1,2}$  bestimmten schnellen Oszillationen mitteln. Übrig bleiben Wechselwirkungsterme, die von der langsam veränderlichen Phasendifferenz  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  abhängen. Und da die Kopplung als Funktion der Phasen  $2\pi$ -periodisch ist, kann man sie im einfachsten Fall durch  $\sin(\Delta\varphi)$  beschreiben und erhält so die von Adler 1946 hergeleitete Differentialgleichung

$$\frac{d\Delta\varphi}{dt} = \Delta\omega - \epsilon \sin\Delta\varphi \quad (\text{iii})$$

für die Phasendifferenz  $\Delta\varphi$  der gekoppelten Oszillatoren.  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$  ist dabei die (kleine) Frequenzverstimmung der freien Schwingungen und  $\epsilon$  die Kopplungsstärke.

Die Dynamik der Phasendifferenz lässt sich leicht veranschaulichen, wenn man sie sich als gedämpfte Bewegung eines Teilchens in einem Potential  $U(\Delta\varphi) = -\Delta\omega\Delta\varphi - \epsilon \cos\Delta\varphi$  vorstellt (Abb. ii). Das Potential hat entweder ein Minimum, in dem das Teilchen zur Ruhe kommt, oder es ist monoton, so dass  $\Delta\varphi$  über alle Grenzen wächst. Die

Adler-Gleichung hat somit einen stabilen Gleichgewichtszustand für  $|\epsilon| < |\Delta\omega|$ , d. h. beide Oszillatoren schwingen synchron mit der gleichen Frequenz (wobei das Vorzeichen von  $\epsilon$  festlegt, ob es sich um in-Phase oder gegenphasige Schwingungen handelt). Mit den gleichen Argumenten kann man auch den Fall einer einseitigen Kopplung betrachten, bei der einer der Oszillatoren frei schwingt. Die Adler-Gleichung beschreibt daher auch die Synchronisation eines dynamischen Systems mit einer treibenden, periodischen (äußeren) Kraft.

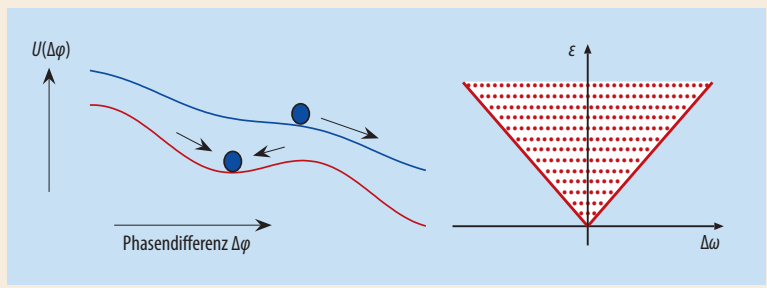


Abb. ii: Bei geringer Kopplungsstärke  $|\epsilon| < |\Delta\omega|$  besitzt das Potential  $U(\Delta\varphi)$  der Adler-Gleichung keine Minima und die Phasendifferenz  $\Delta\varphi$  nimmt monoton zu (blau). Für  $|\epsilon| > |\Delta\omega|$  bilden sich lokale Minima, in denen die Phasendifferenz gegen konstante Werte konvergiert.

Der keilförmige Bereich in der  $\epsilon$ - $\Delta\omega$ -Ebene, in dem die Synchronisationsbedingung  $|\epsilon| > |\Delta\omega|$  erfüllt ist, wird auch als Arnol'd-Zunge bezeichnet (rechts).

des Kuramoto-Modells ist die Möglichkeit, die rechte Seite dieser Gleichung mit Hilfe einfacher trigonometrischer Formeln so umzuformulieren, dass anstelle der aufsummierten Einzeleinflüsse nun Betrag  $R$  und Phase  $\Phi$  des komplexen mittleren Feldes

$$R e^{i\Phi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\varphi_j}$$

als treibende Terme auftreten

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \omega_k + \epsilon R \sin(\Phi - \varphi_k).$$

Der Betrag  $R$  spielt hierbei die Rolle eines Ordnungsparameters, der das Ausmaß der Synchronisation innerhalb des Ensembles charakterisiert. Besitzen alle Oszillatoren unabhängige, gleichverteilte Phasen, dann verschwindet  $R$  (für  $N \rightarrow \infty$ ). Sind zumindest die Phasen einiger Oszillatoren korreliert, so tragen sie zu einem positiven Werte des Ordnungsparameters bei, der bei vollständiger Synchronisation gegen eins konvergiert.

Wie beim ferromagnetischen Phasenübergang kann eine selbstkonsistente Theorie formuliert werden, indem man zunächst Werte für  $R$  und  $\Phi$  annimmt, daraus eine Verteilung der Phasen  $\varphi_k$  berechnet und damit neue Werte für  $R$  und  $\Phi$  bestimmt. Auf diese Weise erhält man Gleichungen für  $R$  und  $\Phi$ , aus denen folgt, dass  $R$  verschwindet, solange die Kopplungsstärke  $\epsilon$  unterhalb eines kritischen Werts  $\epsilon_c$  liegt und positive Werte annimmt, falls  $\epsilon > \epsilon_c$ . **Abb. 3** zeigt diesen Kuramoto-Übergang zur Synchronisation für ein experimentelles System von 64 gekoppelten elektrochemischen Oszillatoren [7]. Um die Kopplung  $\epsilon$  variieren zu können, werden dabei die elektrischen Ströme der einzelnen Oszillatoren durch einen gemeinsamen Widerstand geleitet.

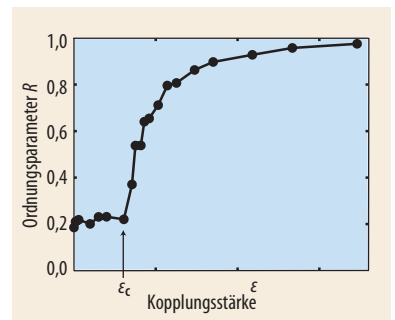
Der Kuramoto-Übergang ist ein Phasenübergang, allerdings ohne eine „Temperatur“ (wie z. B. beim ferromagnetischen Übergang), denn es geht ja um ein makroskopisches, deterministisches System ohne stochastische Komponenten. Die Rolle der Temperatur wird hier von der Breite der Frequenzverteilungsfunktion  $g(\omega)$  übernommen, und der kritische Kopplungswert  $\epsilon_c$  ist im Wesentlichen proportional zu dieser Breite.

Da das Kuramoto-Modell einen sehr allgemeinen Fall gekoppelter Oszillatoren qualitativ beschreibt, lassen sich seine Vorhersagen in vielen Situationen anwenden, oft auch dann, wenn keine detaillierten mathematischen Modelle zur Verfügung stehen. Ein spektakuläres Beispiel sind die unerwarteten Schwingungen der Londoner Millennium Bridge, die an ihrem Eröffnungstag auftraten, als zu viele Schaulustige die Brücke überquerten [8]. Die einzelnen Fußgänger entsprechen den individuellen Oszillatoren, jeder von ihnen übt mit seinem Gang eine (transversale) periodische Kraft auf die Brücke aus, die hierdurch – wie der Balken mit den Pendeluhrn von Huygens – in kleine transversale Schwingungen versetzt wird. Die Spaziergänger „spüren“ diese Brückenschwingungen und passen (unbewusst) ihre Bewegung an. Auf diese Weise kommt es zu einer Synchronisation der Schritte, die

ihrerseits zu einer noch größeren Gesamtkraft auf die Brücke führt. Dieser Prozess lässt sich durch ein Modell beschreiben, das dem eben beschriebenen ähnelt, wobei die Schwingungsamplitude der Brücke die Rolle des Ordnungsparameters  $R$  übernimmt und die treibende Kraft nicht mit der Fußgängerzahl  $N$  normiert ist. Daher ist die Anzahl  $N$  der Brückengänger der relevante Parameter für den Kuramoto-Übergang. Und in der Tat gelang es nachzuweisen, dass es eine kritische Personenzahl  $N_c \approx 166$  gibt, ab der die Schwingungen und damit der Kuramoto-Übergang einsetzt.

Außer bei den bereits genannten Josephson-Kontakten wurde das Kuramoto-Modell auch zur Beschreibung von Synchronisationsphänomenen in einer Vielzahl anderer Systeme erfolgreich eingesetzt, darunter synchrone Bewegungen von Atomen in einem Ringlaser, Ladungsdichtewellen und Antennenarrays. Zu den Erweiterungen des Kuramoto-Modells gehört die Berücksichtigung von Signallaufzeiten und lokalen Kopplungen, die u. a. zu metastabilen synchronen Zuständen führen.

Synchronisation tritt auch bei neuronalen Aktivitäten auf [9]. Hier gilt sie u. a. als möglicher Erklärung



**Abb. 3** Der Kuramoto-Übergang zur Synchronisation lässt sich z. B. mit 64 gekoppelten, oszillierenden elektrochemischen Oszillatoren nachweisen [7]. Oberhalb eines kritischen Wertes  $\epsilon_c$  der Kopplungsstärke nimmt der Ordnungsparameter  $R$  stark zu.

### DIE ADLER-GLEICHUNG: EIN BEISPIEL

Als Beispiel für die Herleitung der Adler-Gleichung betrachten wir Halbleiterlaser, die durch den Überlapp ihrer elektrischen Felder gekoppelt sind. Die Ratengleichungen für die (komplexen) Feldamplituden  $E_{1,2}$  und die Besetzungszahldifferenzen  $N_{1,2}$  lauten

$$\frac{dE_1}{dt} = -(\beta - i\omega_1) E_1 + \Gamma N_1 E_1 + \frac{\epsilon}{2} E_2,$$

$$\frac{dN_1}{dt} = J - (\gamma + \delta |E_1|^2) N_1,$$

$$\frac{dE_2}{dt} = -(\beta - i\omega_2) E_2 + \Gamma N_2 E_2 + \frac{\epsilon}{2} E_1,$$

$$\frac{dN_2}{dt} = J - (\gamma + \delta |E_2|^2) N_2.$$

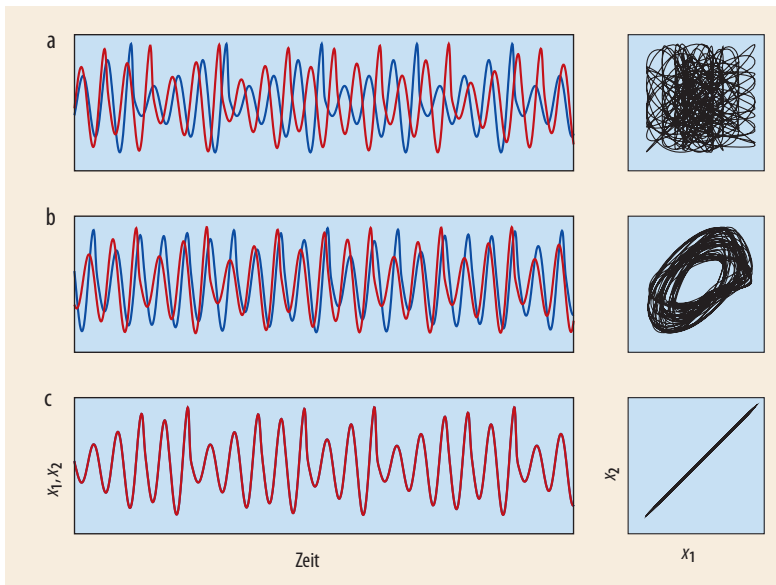
Hier werden alle Parameter der Laser als gleich angenommen, mit Ausnahme der Lichtfrequenzen  $\omega_j$ . Der Kopplungsparameter  $\epsilon$  beschreibt die Injektion des Feldes eines Laser in den anderen. Beschreibt man die komplexen Felder  $E_j = |E_j| e^{i\varphi_j}$  durch Amplituden  $|E_j|$  und Phasen  $\varphi_j$ , so erhält man

$$\frac{d|E_j|}{dt} = (\Gamma N_j - \beta) |E_j| + \frac{\epsilon}{2} \cos(\varphi_j - \varphi_k) |E_k|$$

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = \omega_j + \frac{\epsilon}{2} (|E_k|/|E_j|) \sin(\varphi_j - \varphi_k)$$

$$\frac{dN_j}{dt} = J - (\gamma + \delta |E_j|^2) N_j.$$

Ohne Kopplung ( $\epsilon = 0$ ) konvergieren die Feldamplituden und die Besetzungszahldifferenzen gegen konstante Werte  $|E_j|^2 = (J\Gamma - \beta\gamma)/(\beta\delta)$  und  $N_j = \beta/\Gamma$  und die Phasen  $\varphi_j$  wachsen linear mit  $\omega_j$ . Eine (sehr) schwache Kopplung ( $0 < \epsilon \ll 1$ ) verschiebt die Gleichgewichtswerte für die Feldamplituden und Besetzungszahldifferenzen nur in vernachlässigbar geringem Ausmaß. Bei den anwachsenden Phasen akkumulieren sich die durch die Kopplung hervorgerufenen Störungen hingegen und können dabei durchaus die Größenordnung  $2\pi$  erreichen. Die Phasendynamik reagiert in diesem Sinne besonders empfindlich und muss daher unter Einbeziehung des Kopplungsterms  $\epsilon/2 (|E_k|/|E_j|) \sin(\varphi_j - \varphi_k)$  beschrieben werden. Mit der Näherung  $|E_k| = |E_j|$  erhält man so für die Phasendifferenz  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  die Adler-Gleichung.



**Abb. 4** a) Zwei ungekoppelte Rössler-Systeme schwingen unabhängig voneinander (links: Überlagerung der Prozesse; rechts: Lissajous-Darstellung). b) Bei schwacher Kopplung schwingen die Phasen synchron, d. h. Minima und Maxima werden im Gleichtakt erreicht, obwohl die entsprechenden Werte nicht korreliert sind. Das kreisförmige Lissajou-Bild ist typisch für die Übereinstimmung von Frequenzen. c) Bei starker Kopplung tritt (fast) vollständige Synchronisation auf. Obwohl die Systeme nicht identisch sind, stimmen sowohl die Phasen als auch die Amplituden fast perfekt überein.

rungsansatz des „Bindungsproblems“, also der Verknüpfung unterschiedlicher Sinnesreize, die so zu einer einheitlichen Wahrnehmung von Gegenständen oder Ereignissen führen. Kohärente neuronale Aktivität wurde bei vielen Experimenten beobachtet, welche die Hypothese stützen, dass Synchronisation für verschiedene kognitive Prozesse mit verantwortlich ist und auch bei einigen Gehirnerkrankungen wie Epilepsie und Parkinson auftritt.

### Chaotische Oszillationen

Viele nichtlineare Systeme sind in der Lage, auch aperiodische, chaotische Schwingungen zu erzeugen. Dabei

treten ähnliche Synchronisationsphänomene auf wie bei periodischen Oszillationen, aber auch neue Effekte.

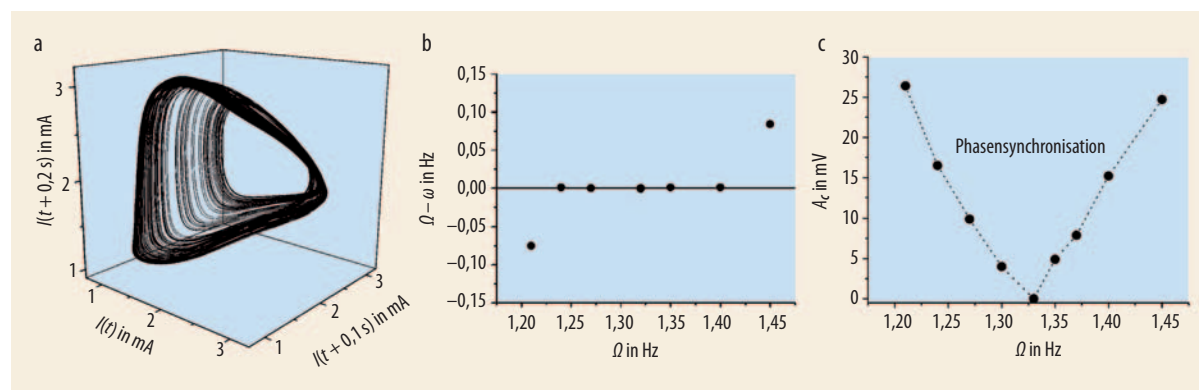
### Phasensynchronisation

Die Schwingungen vieler autonomer chaotischer Systeme sehen aus wie gestörte periodische Oszillationen. Man kann sie daher ebenfalls mit einer Phase charakterisieren [4, 10], wie es anhand des Rössler-Systems im ersten Infokasten dargestellt ist. Koppelt man nun zwei leicht verstimmt Rössler-Systeme, so passen sich ihre Frequenzen bei zunehmender Kopplung aneinander an. Schließlich setzt bei einer kritischen Kopplungsstärke Phasensynchronisation ein, bei der die Phasendifferenz  $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$  beschränkt ist und beide Rössler-Systeme die gleiche mittlere Frequenzen haben. Die Amplituden oszillieren dabei weiterhin chaotisch und nahezu unkorreliert (Abb. 4).

Phasensynchronisation chaotischer Oszillatoren durch periodische Anregung wurde z. B. bei chemischen Reaktionen [11] (Abb. 5), Experimenten mit elektronischen Schwingkreisen, angeregter Gasentladung oder Lasern beobachtet. Für den experimentellen Nachweis wird dabei in der Regel zunächst eine Rekonstruktion des Zustandsraums durchgeführt, z. B. mit Hilfe zeitverzögerter Koordinaten (Abb. 5a) oder der Hilbert-Transformation [4].

Phasensynchronisation tritt auch in Ensembles chaotischer Systeme auf, so z. B. bei 64 gekoppelten elektrochemischen chaotischen Oszillatoren, bei denen ein Kuramoto-Übergang beobachtet wurde [7]. Da bei schwacher Kopplung nur die Phasen der Oszillatoren betroffen sind, lässt sich auch hier wie bei den periodischen Oszillationen die Kuramoto-Theorie anwenden.

Die Möglichkeit, zumindest bestimmte Eigenschaften (gekoppelter) chaotischer Oszillatoren mit Hilfe von Phasen zu beschreiben, erlaubt es, verschiedene oszillatorische Prozesse in einem gemeinsamen theoretischen Rahmen zu behandeln. So lässt sich die Phasendynamik streng periodischer, chaotischer und stochastischer Schwingungen mit verallgemeinerten Adler-Gleichungen beschreiben. Dies bedeutet, dass



**Abb. 5** Bei einer periodisch, durch Modulation der externen Spannung angeregten elektrochemischen Reaktion<sup>2)</sup> kann Phasensynchronisation auftreten (aus [11]). (a) Aus der Messgröße  $I(t)$ , dem Strom durch die Nickel-Schwefelsäure-Zelle lässt sich mit zeitverzögerten Koordinaten  $I(t), I(t+0,1 s), I(t+0,2 s)$  die Dynamik dreidimensional darstellen. Der Hohlraum im Zentrum des chaotischen Attraktors erlaubt es, wie beim Rössler-System, eine Phase einzuführen, die mit den Umläufen zunimmt. (b) Die Differenz  $\Omega - \omega$  aus Antriebsfrequenz  $\Omega$  und

Oszillationsfrequenz  $\omega$  zeigt, aufgetragen gegen  $\omega$  ein typisches Synchronisationsplateau. (c) In der von der Anregungsfrequenz  $\Omega$  und -amplitude  $A_c$  aufgespannten Parameterebene tritt die Phasensynchronisation in einer keilförmigen Arnold-Zunge auf.

2) vgl. Infokasten „Selbsterregte Oszillatoren ...“.

für jede Form nahezu periodischer Schwingungen, die wir bei einem komplexen System beobachten, typische Synchronisationsphänomene zu erwarten sind, auch wenn nicht genau bekannt ist, ob die zugrunde liegende Dynamik eher deterministisch, chaotisch oder stochastischer Natur ist. So kann man das Konzept der Phasensynchronisation auch auf ökologische Systeme anwenden, die z. B. durch Räuber-Beute-Modelle beschrieben werden [12].

### Vollständige Synchronisation

Bei der bisher betrachteten Phasensynchronisation bleiben die beteiligten Amplituden nahezu unkorreliert. Es handelt sich also um eine partielle Synchronisation der beteiligten Systeme. Sind dagegen alle Zustandsvariablen synchronisiert, so spricht man von *vollständiger* Synchronisation, die bei übereinstimmenden Systemen auch als *identische* Synchronisation bezeichnet wird, da sie mit einer asymptotischen Übereinstimmung  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - y(t)\| = 0$  der Zustände  $x$  und  $y$  der beteiligten Systeme verbunden ist [4, 13]. Diese Art der Synchronisation kann für alle Typen dynamischer Systeme auftreten, also auch für nichtautonome oder zeitlich diskrete (iterierte Abbildungen). Insbesondere können auch gekoppelte chaotische Oszillatoren vollständig synchronisierte, aperiodische Schwingungen zeigen.

Als Beispiel sollen wieder die beiden gekoppelten Rössler-Systeme dienen, die auch schon zur Illustration der Phasensynchronisation verwendet wurden. Sie stimmen zwar nicht perfekt überein, sind aber dennoch so ähnlich, dass sich die hier zunächst für identische Systeme gemachten Aussagen übertragen lassen. Wird die Kopplungsstärke über den Schwellenwert der Phasensynchronisation hinaus erhöht, tritt oberhalb eines weiteren kritischen Werts vollständige Synchronisation auf (Abb. 4c).

Eine besondere Variante der vollständigen Synchronisation wurde 1991 von Pecora und Carroll vorgestellt [14] und basiert auf einer Kopplung, bei der eine Systemvariable durch die entsprechende Größe eines anderen, identischen Systems ersetzt wird. Als Kriterium für Synchronisation wird die Übereinstimmung der nicht ersetzten Variablen betrachtet. Dies ist ein Beispiel einer einseitigen Kopplung, bei der ein chaotisches System ein anderes antreibt. Synchronisation tritt auf, wenn beide Systeme übereinstimmen und die Kopplung so gestaltet ist, dass eine Gesamtdynamik mit übereinstimmenden Zustandsvariablen möglich und stabil ist.

Allgemein lassen sich zu fast jedem treibenden (chaotischen) System auf verschiedene Weise Antwortsysteme und geeignete Kopplungssignale konstruieren, die zu vollständiger Synchronisation führen [15]. Als Beispiel betrachten wir einen chaotischen Halbleiterlaser mit externem Resonator, der durch Lichtinjektion einen zweiten Halbleiterlaser antreibt [16]. Sind Pumpströme und Temperaturen der beiden Laser aufeinander abgestimmt, so zeigt der getriebene Laser die gleichen irregulären Intensitätseinbrüche wie der treibende Laser (Abb. 6). Ähnliche Dynamik

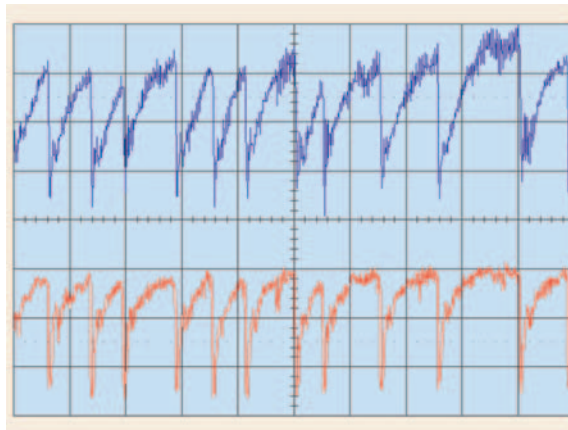


Abb. 6 Der Intensitätsverlauf zweier einseitig optisch gekoppelter Halbleiterlaser ist chaotisch (oben: getriebener Laser; unten: treibender Laser). Durch geeignete Abstimmung beider Laser tritt vollständige, identische Synchronisation auf, bei der insbesondere die irregulären Intensitätseinbrüche (*low frequency fluctuations*) zeitgleich stattfinden (aus [16]).

und Chaossynchronisation zeigen auch bidirektional gekoppelte Halbleiterlaser, bei denen darüber hinaus ein Symmetriebruch auftritt, der zur Folge hat, dass die Intensitätsschwankungen des einen Lasers denen des anderen voraus eilen [17]. Die Synchronisationseigenschaften solcher optischer und elektronischer Systeme werden auch im Hinblick auf mögliche Anwendungen in der Nachrichtentechnik untersucht, in der Hoffnung, chaotische Dynamik als breitbandige Träger-signale oder für eine Hardware-nahe Verschlüsselung effizienter als herkömmliche Verfahren einsetzen zu können – ein möglicher Effizienzgewinn gegenüber herkömmlichen Verfahren [18].

Schließlich tritt Synchronisation auch bei einseitig gekoppelten Systemen auf, die kein (nahezu) identisches Paar bilden, sondern sich sogar strukturell unterscheiden können – man spricht dann von verallgemeinerter Synchronisation [19].

### Ausblick

Wie in der nichtlinearen Dynamik häufig der Fall, zeigen auch die Synchronisationseffekte universelle Eigenschaften, die für Systeme ganz verschiedenen Ursprungs – von Biologie bis zur Laserdynamik – gelten. In der aktuellen Forschung wird die Untersuchung auf komplexere Objekte als die hier diskutierten einfachen Beispiele ausgedehnt. Dazu gehören räumliche, durch partielle Differentialgleichungen beschriebene Systeme, komplexe Netzwerke usw. Da viele komplexe Systeme chaotisches Verhalten aufweisen, sind hier die verschiedenen Typen der Chaossynchronisation besonders wichtig. Diese Effekte bilden eine Brücke zwischen den dynamischen Eigenschaften, die bei niedrigdimensionalen Systemen auftreten und z. B. im Rahmen der Bifurkationstheorie behandelt werden, und statistischen Methoden, die zur Beschreibung von Chaos in komplexen Systemen geeignet sind. Die Forschung an dieser Schnittstelle beinhaltet z. B. durch Rauschen

hervorgerufene Synchronisation und andere interessante Effekte. Synchronisation lokaler Oszillatoren ist auch eine wichtige Ursache für raumzeitliche Strukturbildung, bei der es neben verschiedenen Formen von Wellen (Stichwort: „La Ola“) zu Clusterbildung und Interferenzerscheinungen kommt, die noch weitgehend unerforscht sind – Beispiele, die zeigen, dass die mehr als dreihundertjährige Geschichte der Erforschung der Synchronisation noch keineswegs abgeschlossen ist.

**Literatur**

[1] M. Bennett et al., Proc. R. Soc. Lond. A **458**, 563 (2002)  
 [2] M. Abel, S. Bergweiler und R. Gerhard-Multhaupt, J. Acoust. Soc. Am. **119**(4), 2475 (2006)  
 [3] S. Strogatz, Synchron – Vom rätselhaften Rhythmus der Natur, Berlin Verlag, Berlin (2004)  
 [4] A. Pikovsky, M. Rosenblum und J. Kurths, Synchronization – A universal concept in nonlinear science, Cambridge University Press, Cambridge (2001)  
 [5] U. Parlitz und W. Lauterborn, Phys. Rev. A **36**(3), 1428 (1987)  
 [6] A. T. Winfree, The Geometry of Biological Time, 2. Auflage, Springer, New York (2001)  
 [7] I. Z. Kiss, Y. Zhai und J. L. Hudson, Science **296**, 1676 (2002)  
 [8] S. H. Strogatz et al., Nature **438**, 43 (2005); U. Parlitz, Physik Journal, Mai 2006, S. 17  
 [9] C. von der Malsburg, Neuron **24**, 95 (1999)  
 [10] M. Rosenblum, A. Pikovsky und J. Kurths, Phys. Rev. Lett. **76**, 1804 (1996)  
 [11] I. Z. Kiss und J. L. Hudson, Phys. Rev. E **64**, 046215 (2001)  
 [12] B. Blasius, A. Huppert und L. Stone, Nature **399**, 354 (1999)  
 [13] H. Fujisaka und T. Yamada, Prog. Theor. Phys. **69**, 32 (1983); A. Pikovsky, Z. Physik B **55**, 149 (1984)  
 [14] L. Pecora und T. Carroll, Phys. Rev. Lett. **64**, 821 (1990)  
 [15] L. Kocarev und U. Parlitz, Phys. Rev. Lett. **74**, 5028 (1995)  
 [16] I. Wedekind und U. Parlitz, Phys. Rev. E **66**, 026218 (2002)  
 [17] T. Heil et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 795 (2001)  
 [18] L. E. Larson, L. S. Tsimring und J. Liu, Digital Communications Using Chaos und Nonlinear Dynamics, Springer Verlag (2006)  
 [19] N. F. Rulkov et al., Phys. Rev. E **51**, 980 (1995); L. Kocarev und U. Parlitz, Phys. Rev. Lett. **76**, 1816 (1996)

**DIE AUTOREN**

**Ulrich Parlitz** studierte Physik an der Universität Göttingen und war nach der Promotion 1987 von 1989 bis 1994 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Angewandte Physik der TU Darmstadt. 1994 kehrte er nach Göttingen zurück, wo er sich 1997 habilitierte und 2001 zum apl. Professor ernannt wurde.



**Arkady Pikovsky** schloss sein Physikstudium an der Lobatschewski-Universität Gorki 1982 mit der Promotion ab und arbeitete danach dort als wissenschaftlicher

Mitarbeiter. Von 1990 bis 1992 war er Humboldt-Stipendiat an der Uni Wuppertal, danach wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Max-Planck-Arbeitsgruppe Nichtlineare Dynamik in Potsdam. 1995 habilitierte er sich an der Uni Potsdam und ist dort seit 1997 Professor für Statistische Physik / Chaostheorie.



**Michael Rosenblum** studierte Physik an der Pädagogischen Hochschule Moskau. Nach der Promotion 1990 in Saratov arbeitete er an der Akademie der Wissenschaften der UdSSR in Moskau und ab 1993 in der Max-Planck-Arbeitsgruppe Nichtlineare Dynamik in Potsdam. 1997 habilitierte er sich an der Universität



Potsdam, wo er seither wissenschaftlicher Mitarbeiter ist. **Jürgen Kurths** studierte Mathematik an der Universität Rostock und promovierte 1983 an der Akademie der Wissenschaften in Berlin. Nach der Habilitation in Theoretischer Physik an der Universität Rostock (1991) leitete er von 1992 bis



1996 die Arbeitsgruppe Nichtlineare Dynamik der Max-Planck-Gesellschaft. Seit 1994 ist er Professor an der Universität Potsdam sowie Direktor des Interdisziplinären Zentrums für Dynamik Komplexer Systeme.