MAX-PLANCK-MEDAILLE

Quantenfeldtheorie ohne Felder

Ein alternativer Zugang zur Teilchenphysik

Detlev Buchholz

Das Standardmodell der Teilchenphysik ist die anerkannte Basis, um Elementarteilchen und die zwischen ihnen wirkenden starken und elektroschwachen Kräfte zu beschreiben. Doch hat es noch nicht den Rang einer physikalischen Theorie, da seine rigorose Konstruktion und damit ein Beweis seiner inneren Konsistenz bisher ausstehen. Ein Paradigmenwechsel bei der Beschreibung von Teilchen könnte dieses konzeptionelle Problem einer Lösung näher bringen.

In wenigen Monaten werden am Europäischen Kernforschungszentrum in Genf am Large Hadron Collider (LHC) erste Daten genommen, um das Standardmodell der Teilchenphysik zu testen und nach neuer Physik jenseits dessen Gültigkeitsbereichs zu suchen. U. a. wird es für möglich gehalten, dass man am LHC mikroskopische Schwarze Löcher erzeugen und die Existenz von zusätzlichen Dimensionen neben Raum und Zeit nachweisen kann. Derartige Beobachtungen ließen sich nicht im Rahmen des Standardmodells erklären und würden neue theoretische Ansätze erfordern. Doch auch wenn die Möglichkeit besteht, dass die Beobachtungen am LHC unser physikalisches Weltbild verändern, wird das Standardmodell die Grundlage für unser Verständnis der Teilchenphysik bis hin zu den heute experimentell erreichbaren höchsten Energien und kleinsten Längenskalen bleiben. Denn es liefert Resultate, die mit zum Teil fantastischer Genauigkeit mit experimentellen Ergebnissen übereinstimmen.

Allerdings ist man noch weit davon entfernt, alle physikalisch relevanten Aussagen des Modells herleiten zu können. Denn zu dessen Analyse stehen bislang ausschließlich Näherungsverfahren zur Verfügung, deren Zuverlässigkeit nur bei speziellen Fragestellungen gesichert ist. So ist z. B. die wichtige Frage, ob das Standardmodell das Fehlen experimenteller Hinweise auf freie Quarks und Gluonen (Confinement) erklärt, nach wie vor unentschieden. Noch unbefriedigender ist die Tatsache, dass eine vollständige Konstruktion des Modells und damit ein Nachweis seiner inneren Konsistenz bisher nicht gelungen ist. Um diese Probleme abschließend zu lösen, sind grundlegende konzeptionelle und mathematische Schwierigkeiten zu überwinden. Dies lässt sich wohl nur durch eine konzertierte Anstrengung von Theoretischen Physikern und Mathematikern erreichen. Die Bemühungen, den theoretischen Status des Standardmodells zu konsolidieren, sind bisher eher fragmentarisch, im Gegensatz zu den enormen intellektuellen und materiellen Anstrengungen, die unternommen werden, um das Modell experimentell zu testen.

Zwei Strategien versprechen Fortschritte, wenn es darum geht, die theoretischen Probleme im Standardmodell zu lösen: Zum einen ist dies das Studium vereinfachter Modelle, in denen sich interessante Teilaspekte, wie z. B. das Confinement, untersuchen lassen. Zum anderen ist dies die Analyse des mathematischen Rahmens, in den das Standardmodell eingebettet ist.

Um die Bedeutung einer solchen strukturellen Analyse für unser physikalisches Verständnis zu verdeutlichen, sei zunächst kurz an die quantenmechanische Beschreibung der Systeme in der Atomphysik erinnert. Auch hier sind exakte quantitative Aussagen, etwa über die Grundzustandsenergie eines Uranatoms, nicht möglich, sondern man ist auf Näherungsverfahren angewiesen. Doch im Gegensatz zum Standardmodell der Teilchenphysik hat die Quantenmechanik seit langem den Rang einer in sich konsistenten Theorie. Alle physikalischen Fragen besitzen in ihr ein sinnvolles mathematisches Analogon: Endlich viele niederenergetische Teilchen lassen sich unabhängig von der Art der Wechselwirkung durch Angabe ihrer Wahrscheinlichkeitsamplituden (Wellenfunktionen) bezüglich fundamentaler Observabler, wie z. B. den Orten und Impulsen der Teilchen, beschreiben. Ein entsprechender Hamilton-Operator gibt an, wie sich diese Systeme bei vorgegebener Wechselwirkung zeitlich entwickeln. Damit die resultierende Theorie eine sinnvolle Wahrscheinlichkeitsinterpretation besitzt, gilt es jedoch zu beachten, dass der Hamilton-Operator das mathema-

KOMPAKT

- Trotz des großen Erfolgs des Standardmodells ist es bislang nicht gelungen, dieses vollständig zu konstruieren und damit seine innere Konsistenz nachzuweisen.
- Um einen mathematischen Rahmen abzustecken, in den die endgültige Theorie passen sollte, bietet sich der Haagsche Formalismus der lokalen Quantenphysik an.
- Darin werden zwar die Grundprinzipien der Quantenphysik und der Relativitätstheorie formalisiert, jedoch keinerlei Bedingungen an nicht beobachtbare Größen wie ladungstragende Felder gestellt.
- Die Bausteine der Theorie (Observablen, Algebren und Raum-Zeit-Gebiete) gilt es besser zu verstehen, um das Standardmodell rigoros konstruieren zu können.

Prof. Dr. Detlev Buchholz, Institut für Theoretische Physik, Universität Göttingen, Friedrich-Hund-Platz 1, 37077 Göttingen – Preisträgerartikel anlässlich der Verleihung der Max-Planck-Medaille 2008 auf der 72. Jahrestagung der DPG in Berlin.

tische Kriterium der „Selbstadjungiertheit" erfüllt. Nach den bahnbrechenden Arbeiten von Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger und Max Born bedurfte daher die Frage der inneren Konsistenz der Theorie auch im Fall der Quantenmechanik einer sorgfältigen Analyse. Dank der Präzisierung des mathematischen Rahmens durch John von Neumann ließen sich diese Untersuchungen relativ rasch abschließen. Wir wissen deshalb heute, dass für alle physikalisch interessierenden Wechselwirkungen, darunter insbesondere die Coulomb-Kraft, die entsprechenden Hamilton-Operatoren das Selbstadjungiertheitskriterium erfüllen. Diese Ergebnisse waren nicht nur für den Nachweis der Konsistenz der Theorie wichtig, sondern sind auch heute noch die Basis für viele Präzisionsrechnungen in der Atomphysik.

Bei der Beschreibung hochenergetischer Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen, so wie sie heute experimentell zugänglich sind, sind sowohl die Gesetze der Quantenphysik als auch der Speziellen Relativitätstheorie zu beachten. Die Vereinigung dieser beiden Gebiete bereitet ungleich größere Schwierigkeiten als die Formulierung der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Der Grund dafür ist, dass sich bei hochenergetischen Stoßprozessen das Teilchenbild der Quantenmechanik nicht mehr aufrecht erhalten lässt; Teilchen können erzeugt und vernichtet werden.

Der Rahmen, der die beiden Gebiete vereint, ist die Quantenfeldtheorie. Dieser Zugang beruht auf der Hypothese, dass stabile Teilchen nichts weiter sind als die zu asymptotischen Zeiten dominanten Anregungen von Quantenfeldern. Man ersetzt also den Welle-Teilchen-Dualismus der Quantenmechanik durch den fundamentaleren Feldbegriff. Auf diese Weise erhält man die Möglichkeit, Wechselwirkungen im Einklang mit dem Einstein-Maxwellschen Lokalitätsprinzip und den Prinzipien der Relativitätstheorie zu beschreiben.

Bei der Formulierung des Standardmodells der Teilchenphysik musste man dazu schrittweise aus den immer umfangreicher werdenden experimentellen Daten den Feldinhalt der Theorie und die Natur der Wechselwirkung zwischen diesen Feldern extrahieren. Da die Felder aufgrund der allgegenwärtigen Eichsymmetrien nicht direkt beobachtbar sind, man denke z. B. an das Vektorpotential in der Elektrodynamik, erforderte diese Analyse tiefe physikalische Einsichten und mathematische Kreativität, die mehrfach mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurden. Die so gewonnenen Erkenntnisse wurden zunächst im Rahmen einer klassischen Eichfeldtheorie formuliert. Um die Quantenversion der Theorie zu erhalten, wendet man Methoden an, die ihren Ursprung im Korrespondenzprinzip haben: Klassische Felder werden durch Quantenfelder ersetzt, die klassischen Feldgleichungen gelten in regularisierter Form auch in der Quantenwelt, und die Poisson-Klammern der klassischen Felder gehen über in Kommutatoren der Quantenfelder. Trotz der beeindruckenden Erfolge dieses Rezepts erscheint jedoch die Hypothese, dass die starke und elektroschwache Wechselwirkung durch Quantisierung einer fiktiven klassischen Feldtheorie zustandekommen, unnatürlich und ist sicherlich nicht das letzte Wort. Konkrete klassische Aspekte, wie etwa die Maxwell-Theorie des Elektromagnetismus, sollten sich vielmehr aus der fundamentaleren Quantentheorie ergeben.

Angesichts dieser konzeptionellen Probleme ist es vielleicht nicht verwunderlich, dass der Übergang von der klassischen Feldtheorie zur Quantenfeldtheorie mathematische Probleme aufwirft: Die naive Anwendung des Korrespondenzprinzips führt bei der Berechnung physikalisch relevanter Größen zu Inkonsistenzen, z. B. in Form von Divergenzen. Die Ursachen dieser Schwierigkeiten sind zwar inzwischen gut verstanden, jedoch ist ihre Beseitigung und damit die Herleitung experimentell überprüfbarer Aussagen bisher nur in Form von Näherungsverfahren gelungen, wie der renormierten Störungstheorie und Gitterapproximationen. Alle Versuche, diese Verfahren soweit auszubauen, dass man die Existenz des Standardmodells und seine Konsistenz mit den physikalischen Grundprinzipien beweisen kann, sind allerdings bisher gescheitert.[1)]

1) Den Schwierigkeitsgrad dieses Problems kann man u. a. daraus ermessen, dass das renommierte Clay Mathematics Institute zur Jahrtausendwende einen bedeutenden Preis ausgeschrieben hat für den Beweis, dass ein wichtiger Baustein des Standardmodells, die quantisierte Yang-Mills-Theorie, existiert und die physikalisch erwarteten Eigenschaften hat.

Spielregeln der Theorie

Die vielfältigen Probleme, die bei der Behandlung quantenfeldtheoretischer Modelle von Anfang an auftraten, haben Theoretische Physiker, namentlich Rudolf Haag und Arthur S. Wightman, vor mehr als 50 Jahren dazu veranlasst, einen mathematischen Rahmen abzustecken, in den die endgültige Theorie – damals noch in weiter Ferne – passen sollte. Aus heutiger Sicht hat sich dabei der Haagsche Formalismus der lokalen Quantenphysik [1] als besonders flexibel und fruchtbar erwiesen. In ihm werden zwar die Einschränkungen an die Struktur der Observablen aufgrund der Grundprinzipien der Quantenphysik und der Relativitätstheorie formalisiert, jedoch werden *a priori* keinerlei Bedingungen an nicht beobachtbare Größen wie ladungstragende Felder gestellt. In gewisser Weise folgt dieser Zugang der Heisenbergschen Philosophie bei der Entwicklung der Quantenmechanik, nicht beobachtbare Größen so weit wie möglich bei der Formulierung der Theorie zu vermeiden.

Grundbausteine in diesem Rahmen sind die Observablen, im Folgenden pauschal mit A, B bezeichnet. Sie beschreiben die Messungen am betrachteten System. Die statistische Interpretation der Theorie erfordert es, dass die Observablen addiert und multipliziert werden können. Durch diese Rechenoperationen erzeugen sie die Elemente einer Algebra $\mathfrak{A}$. In der Quantenphysik ist das Produkt inkommensurabler Observabler keine Observable mehr; bekanntestes Beispiel hierfür sind die Observablen Ort und Impuls in der Quantenmechanik. Doch lassen sich die observablen Elemente von $\mathfrak{A}$ mit Hilfe einer Rechenoperation analog zur komplexen Konjugation von Zahlen rekonstruieren. Diese sog. *-Operation ist ebenfalls wichtiger Bestandteil der Theorie.

Die experimentell präparierbaren Gesamtheiten des betrachteten Systems werden durch Zustände $\langle\ \rangle$ beschrieben. Sie spezifizieren für jede Observable A einen Erwartungswert $\langle A \rangle$, der als Mittelwert der Messungen von A in der betreffenden Gesamtheit interpretiert wird. Die Varianz der Messwerte ist gegeben durch $\sigma(A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$; da sie niemals negativ ist, ergibt sich eine entsprechende Positivitätsbedingung an die Zustände. Es sei angemerkt, dass man für jeden derartigen Zustand mit Hilfe einer von den Mathematikern Israel Gelfand, Mark Naimark und Irving Segal entwickelten Standardkonstruktion zu einer Hilbert-Raum-Beschreibung der Gesamtheit und der Observablen übergehen kann. Doch gibt es, im Gegensatz zur Quantenmechanik, für die hier interessierenden Gesamtheiten keinen universellen Hilbert-Raum-Formalismus.

Um die Prinzipien der Relativitätstheorie in diesen Rahmen zu integrieren, geht man davon aus, dass Messungen stets in räumlich begrenzten Laboratorien für eine endliche Zeitdauer durchgeführt werden, sie sind also in bestimmten Gebieten $\mathcal{G}$ des Minkowski-Raums lokalisiert. Die Observablen, die Messungen in einem gegebenen Gebiet $\mathcal{G}$ entsprechen, erzeugen eine Unteralgebra $\mathfrak{A}(\mathcal{G})$ der Algebra $\mathfrak{A}$ aller Observablen. Einsteins Kausalitätprinzip besagt nun, dass sich simultane Messungen in raumartig (kausal) getrennten Gebieten $\mathcal{G}_A$, $\mathcal{G}_B$ des Minkowski-Raums wegen der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit in keiner Weise gegenseitig stören können (**Abb. 1**). Paare A, B von Observablen, die in diesen Gebieten lokalisiert sind, müssen daher insbesondere kommensurabel sein, d. h. kommutieren. Diese Bedingung ist das „Lokalitätspostulat“.

Ein weiterer wichtiger Aspekt der Relativitätstheorie ist die physikalische Gleichwertigkeit aller Inertialsysteme. Verschiedene Inertialsysteme sind durch Poincaré-Transformationen miteinander verknüpft, also raumzeitliche Verschiebungen, Drehungen und Lorentz-Boosts, die im Folgenden alle mit dem Symbol τ bezeichnet werden. Die Wirkung dieser Transformationen auf Messgeräte beschreibt man durch Abbildungen der entsprechenden Observablen: Eine Poincaré-Transformation τ ordnet jeder Observablen A, die in einem Gebiet $\mathcal{G}$ lokalisiert ist, eine entsprechende Observable A_τ im transformierten Gebiet $\mathcal{G}_\tau$ zu. Die Gleichwertigkeit aller Inertialsysteme erfordert es, dass diese Abbildungen die algebraischen Relationen zwischen den Observablen unangetastet lassen; es sind Automorphismen. Diese Beschreibung, in der die Poincaré-Transformationen auf die Observablen statt auf die Zustände wirken, entspricht dem Heisenberg-Bild.

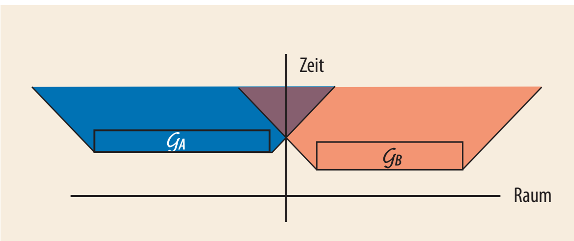

Abb. 1 Messungen in raumartig getrennten Gebieten $\mathcal{G}_A$, $\mathcal{G}_B$ können sich nach dem Einsteinschen Kausalitätsprinzip nicht beeinflussen.

Dieser allgemeine Rahmen reicht bereits aus, um die für die Teilchenphysik relevanten Gesamtheiten zu charakterisieren. Sowohl bei der Konstruktion als auch der Interpretation der Theorie spielt dabei das Vakuum eine besondere Rolle. Es hat für alle inertialen Beobachter die gleichen Eigenschaften und muss daher durch einen Zustand $\langle\ \rangle_0$ beschrieben werden, der für jede gegebene Observable A in allen Inertialsystemen den gleichen Erwartungswert liefert, d. h. $\langle A_\tau \rangle_0 = \langle A \rangle_0$ für alle Poincaré-Transformationen τ. Die Tatsache, dass dem Vakuum in keinem Inertialsystem Energie entnommen werden kann, lässt sich ebenfalls in der Sprache der Erwartungswerte zum Ausdruck bringen. Man betrachtet dazu die Fourier-Transformierten der Korrelationsfunktionen $\langle B\, A_\tau \rangle_0$ bezüglich der zeitlichen Verschiebungen τ und fordert, dass diese für alle negativen Frequenzen verschwinden. Dies impliziert, dass das Vakuum in der sich gemäß Gelfand, Naimark und Segal ergebenden Hilbert-Raum-Beschreibung der Zustand niedrigster Energie ist, im Einklang mit der Stabilität der Materie.

Wo steckt die Physik?

Diese physikalisch motivierten Bedingungen stecken einen mathematischen Rahmen ab, mit dem die Observablen und Zustände in jedem Modell der Teilchenphysik kompatibel sein sollten. Andernfalls würden grundlegende Prinzipien der relativistischen Quantenphysik verletzt, deren Gültigkeit gesichert scheint. Die Tatsache, dass nichtobservable Felder, die bei der Analyse von konkreten Modellen häufig auftreten, in diesem Rahmen nicht explizit erwähnt werden, bedeutet nicht, dass solche Modelle ausgeschlossen sind. Im Gegenteil: Da die nichtobservablen Felder *a priori* keinerlei Bedingungen unterliegen, ist der Formalismus in Bezug auf diese Größen äußerst flexibel und erlaubt es, den physikalisch eingegrenzten Rahmen für die Observablen durch beliebige mathematische Konstrukte für die Felder zu erweitern. Auch im Falle des Standardmodells, wo keines der Grundfelder observabel ist, macht man Gebrauch von dieser Freiheit durch Einführung von Geisterfeldern, Räumen mit indefiniter Metrik etc. Doch müssen die aus den Feldern gebildeten eichinvarianten Observablen, wie z. B. Stromdichten oder die Energiedichte, in den Haagschen Rahmen passen, um eine physikalisch konsistente Interpretation zu erlauben. Die nichtobservablen Eichfelder sind demnach lediglich ein spezielles Hilfsmittel, um die Observablen der Theorie zu konstruieren.

Dieser minimalistische Standpunkt wirft allerdings die Frage auf, ob die Kenntnis der Observablen und des Vakuumzustandes einer Theorie ausreichen, um deren physikalischen Inhalt zu bestimmen, oder ob der nichtobservable Feldinhalt nicht doch noch zusätzliche Informationen enthält. Die vielfältigen Facetten dieses Problems wurden in den vergangenen Jahrzehnten eingehend untersucht. Diese Arbeiten führten zu der Einsicht, dass alle in der Teilchenphysik interessierenden Informationen tatsächlich vollständig in den Observablen und dem Vakuumzustand enthalten sind und daraus in systematischer Weise extrahiert werden können.

So lassen sich die in einer Theorie auftretenden globalen Ladungen (der physikalische Ladungsinhalt) und die entsprechende Eichgruppe aus den ladungsneutralen Observablen und dem ungeladenen Vakuumzustand bestimmen. Dazu ist es nicht erforderlich, ladungstragende Felder zu verwenden; vielmehr lassen sich diese – mit allen im üblichen Formalismus der Quantenfeldtheorie *ad hoc* postulierten Eigenschaften – eindeutig aus dem Ladungsinhalt konstruieren. Das Teilchenspektrum der Theorie, also Massen, Spins und Ladungen aller in der Theorie auftretenden stabilen Teilchen, lässt sich ebenfalls mit Hilfe der Observablen aus dem Vakuumzustand bestimmen. Dies schließt auch sog. Infrateilchen ein, die aufgrund langreichweitiger Kräfte unvermeidbar von Infrarotwolken niederenergetischer masseloser Teilchen begleitet sind; prominente Beispiele hierfür sind die elektrisch geladenen Teilchen in der Quantenelektrodynamik, deren Zustände aufgrund des Gaußschen Satzes für die elektrische Ladung stets auch reale niederenergetische Photonen enthalten. Der Formalismus ist ferner geeignet, differentielle Wirkungsquerschnitte für Streu- und Erzeugungsprozesse der Teilchen direkt aus den Observablen zu berechnen, die Partikelstrukturen bei extrem kleinen Längenskalen zu bestimmen (Quarks, Gluonen) und thermische Gleichgewichtszustände zu konstruieren. Letztere sind u. a. für das Studium von Phasenübergängen sehr heißer Materie von Bedeutung, wie etwa dem Übergang von hadronischer Materie zu einem Quark-Gluonen-Plasma, den man im Standardmodell erwartet. Die Herleitung dieser Ergebnisse erforderte profunde physikalische Einsichten sowie die Entwicklung neuer mathematischer Methoden und ist ein eindrucksvolles Beispiel für den fruchtbaren Austausch zwischen Physik und Mathematik.[2)]

Konstruktive Beiträge

Diese Resultate lassen es gerechtfertigt erscheinen, den abgesteckten mathematischen Rahmen zugrundezulegen, um die heutigen und wohl auch künftigen experimentellen Erkenntnisse zu beschreiben. Um die physikalische Konsistenz eines Modells der Teilchenphysik zu etablieren, gilt es folglich, den Nachweis zu erbringen, dass der observable Inhalt des Modells in diesen Rahmen passt.

Die rigorose Konstruktion von entsprechenden Beispielen war Ziel des von James Glimm und Arthur Jaffe initiierten Programms der konstruktiven Quantenfeldtheorie. Dazu wurden im vergleichsweise restriktiven Wightmanschen Rahmen funktionalanalytische Methoden entwickelt, mit denen die Existenz von Modellen wechselwirkender Teilchen in zwei und drei Raumzeitdimensionen etabliert und ihre Konsistenz mit den Grundprinzipien bewiesen werden konnte [3]. Aufgrund der ernsthaften Probleme, die in Modellen in vier Raumzeitdimensionen auftraten, ist dieses Programm jedoch momentan zum Stillstand gekommen.

Bisher existiert nicht ein einziges Beispiel eines relativistischen Modells wechselwirkender Teilchen in physikalischer Raumzeit, dessen Existenz und physikalische Konsistenz gesichert sind. Allerdings gibt es einige negative Resultate. So weiß man, dass es zu einer Reihe von klassischen selbstwechselwirkenden Feldtheorien keine entsprechende quantisierte Version gibt. Man vermutet, dass auch das Higgs-Modell und die Quantenelektrodynamik zu dieser Familie gehören, doch gibt es Lücken in den Argumenten. Streng genommen zeigen diese negativen Resultate jedoch nur, dass die benutzten Methoden zur Konstruktion ungeeignet sind. Es ist durchaus denkbar, dass man mit anderen Verfahren die Existenz von Varianten der Modelle etablieren kann.

Die Masteralgebra

Angesichts dieser Situation scheint es wünschenswert, die Eigenschaften der im Haagschen Rahmen abstrakt charakterisierten Bausteine der Theorie, also der Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{G})$, die von den in Gebieten $\mathcal{G}$ des Minkowski-Raums lokalisierten Observablen erzeugt werden, besser zu verstehen. Die Hoffnung dabei ist, auf diese Weise einen hinreichend konkreten universellen Rahmen für das Studium konstruktiver Probleme zu schaffen. Tatsächlich gibt es dabei interessante Fortschritte: Durch Berücksichtigung weiterer physikalisch sinnvoller Forderungen und Einsichten lässt sich der Haagsche Rahmen inzwischen so weit einengen, dass er ähnlich konkret ist wie der von Neumannsche Formalismus der Quantenmechanik. Diese Präzisierung ergibt sich aus einer Verschärfung des Lokalitätspostulats sowie der Einsicht, dass das Vakuum wesentlich stärkere Stabilitätseigenschaften hat als normalerweise angenommen.

Das Lokalitätspostulat fordert die Kommensurabilität von Messungen in raumartig getrennten Gebieten $\mathcal{G}_A$, $\mathcal{G}_B$ des Minkowski-Raums, ohne jedoch Annahmen über die Präparierbarkeit der entsprechenden Gesamtheiten zu machen. Ein Experimentator, der eine Gesamtheit in einem Messgebiet $\mathcal{G}_A$ präparieren möchte, schirmt diese so weit wie irgend möglich von äußeren Einflüssen ab. Im Idealfall gelingt es ihm, die Gesamtheit völlig von der Außenwelt zu entkoppeln, d. h. alle Messergebnisse in $\mathcal{G}_A$ sind unkorreliert mit sämtlichen Messungen in raumartig getrennten Gebieten $\mathcal{G}_B$. Im Rahmen der Theorie werden derartige Gesamtheiten durch Produktzustände beschrieben. Dies sind Zustände, für die die Erwartungswerte aller aus den Observablen A, B in den Gebieten $\mathcal{G}_A$, $\mathcal{G}_B$ gebildeten Produkte faktorisieren, d. h. $\langle A\, B\rangle = \langle A\rangle\,\langle B\rangle$. Denkt man an endliche Systeme wie in der Quanteninformationstheorie, so scheint es plausibel, dass solche idealisierten Zustände stets existieren. Doch bedarf diese Hypothese in der Quantenfeldtheorie einer sorgfältigeren Analyse. Tatsächlich existieren derartige Zustände nur in Theorien mit nicht

2) Eine ausführliche Darstellung der älteren Resultate enthält [1], einen Überblick über neuere Entwicklungen gibt [2].

zu vielen lokalen Freiheitsgraden. Die Zahl der Freiheitsgrade einer Quantenfeldtheorie lässt sich mit Hilfe von Phasenraumbedingungen quantifizieren und hängt eng mit deren thermischen Eigenschaften zusammen. Eine eingehende Analyse dieser Zusammenhänge ergab, dass es immer dann in einer Theorie Produktzustände gibt, man also alle Korrelationen zwischen raumartig getrennten Gebieten unterdrücken kann, wenn es in der Theorie auch thermische Gleichgewichtszustände beliebig hoher Temperatur gibt [1, 2]. Letzteres wird z. B. in Anwendungen des Standardmodells auf das frühe Universum und den Urknall als gegeben angenommen.

Die zweite wichtige Einsicht betrifft die Stabilitätseigenschaften des Vakuumzustandes. Es ist ein Charakteristikum des Vakuums, dass ihm inertiale Beobachter keine Energie entnehmen können, doch gilt dies in einem gewissen Sinne auch für gleichmäßig beschleunigte Beobachter. Die Weltlinie eines derartigen Beobachters hat im Minkowski-Raum die Form einer Hyperbel, die sich in der Vergangenheit und der Zukunft an zwei aus Lichtstrahlen gebildete Ebenen anschmiegt. Diese Ebenen haben für den Beobachter die Bedeutung von Horizonten. Das Gebiet jenseits seines Vergangenheitshorizonts kann er durch Signale nicht erreichen, umgekehrt kann er von dem Gebiet jenseits seines Zukunftshorizonts nicht durch Signale erreicht werden. Der Bereich des Minkowski-Raums, der dem Beobachter experimentell zugänglich ist, liegt zwischen den beiden Horizonten und hat die Form eines keilförmigen Gebiets K (**Abb. 2**). Im Rahmen der relativistischen Quantenfeldtheorie konnten Joseph J. Bisognano und Eyvind H. Wichmann zeigen, dass ein derartiger Beobachter mit Hilfe seiner Messgeräte in K zu dem Schluss kommen würde, dass sich das für inertiale Beobachter energielose Vakuum für ihn wie ein thermischer Gleichgewichtszustand verhält mit einer von seiner Beschleunigung abhängigen Temperatur [1]. Da der Zustand im Gleichgewicht ist, kann er jedoch dies als Unruh-Effekt bekannte Phänomen nicht als Energiequelle nutzen, dem steht der zweite Hauptsatz der Thermodynamik entgegen. Auch für solche Beobachter ist das Vakuum also stabil.

Aus den genannten physikalischen Fakten ergeben sich einschneidende Einschränkungen an die innere mathematische Struktur der sog. Keilalgebren $\mathfrak{A}(K)$, die von den in den Keilgebieten K lokalisierten Observablen erzeugt werden. Es erweist sich, dass diese Algebren eindeutig fixiert und unabhängig von der zugrundeliegenden Theorie sind. Aus dem großen Vorrat aller *a priori* denkbaren algebraischen Strukturen zur Beschreibung von Observablen wählt die Physik also eine ganz bestimmte aus: Jede einzelne Keilalgebra ist isomorph – d. h. baugleich – zu einer zuerst von theoretischen Physikern konstruierten und dann von Mathematikern eingehend untersuchten Algebra $\mathfrak{M}$, hier kurz Masteralgebra genannt[3] [1, 2].

Ein weiteres Faktum ist, dass sich aus einer einzigen Keilalgebra mit Hilfe der Poincaré-Transformationen die Gesamtheit der Observablen für beliebige Gebiete rekonstruieren lässt. Denn aus einem gegebenen Keilgebiet K_0 erhält man jedes andere Keilgebiet K mittels einer geeigneten Poincaré-Transformation τ, d. h. $K = K_{0\tau}$ (**Abb. 3**). Die Keilalgebren $\mathfrak{A}(K)$ ergeben sich daher aus $\mathfrak{A}(K_0)$ durch Anwendung der entsprechenden Automorphismen, $\mathfrak{A}(K) = \mathfrak{A}(K_0)_\tau$. Für beliebige Gebiete G erhält man die entsprechenden Algebren $\mathfrak{A}(G)$ durch die Überlegung, dass jede Observable, die in G lokalisiert ist, Element von allen Keilalgebren $\mathfrak{A}(K)$ ist, für die der Keil K das Gebiet G enthält, in Formeln $K \supset G$. Dementsprechend setzt man mittels Durchschnittsbildung $\mathfrak{A}(G) = \bigcap_{K \supset G} \mathfrak{A}(K)$.

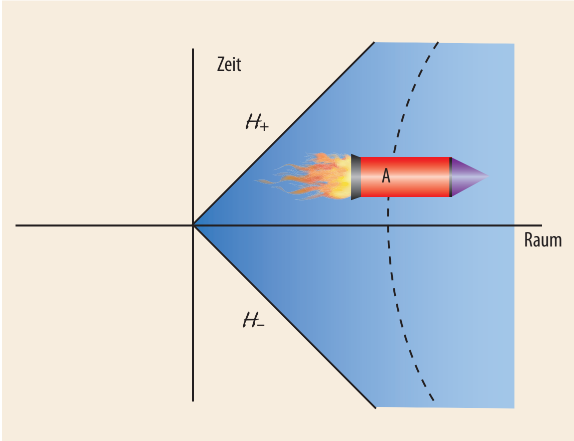

Abb. 2 Vergangenheitshorizont H_- und Zukunftshorizont H_+ beranden das einem gleichmäßig beschleunigten Beobachter zugängliche keilförmige Messgebiet K.

Dass diese Relationen konsistent und mit dem Lokalitätspostulat verträglich sind, ist bereits in einer einzelnen Keilalgebra $\mathfrak{A}(K_0)$ kodiert. Für die Konsistenz ist entscheidend, dass für alle Poincaré-Transformationen τ, die das Gebiet K_0 in sich abbilden, gilt $\mathfrak{A}(K_0)_\tau \subset \mathfrak{A}(K_0)$, denn im kleineren Gebiet $K_{0\tau}$ liegen weniger Observablen. Die Gültigkeit des Lokalitätspostulats folgt aus der Tatsache, dass für alle Poincaré-Transformationen τ, die das Gebiet K_0 in sein raumartiges Komplement abbilden, die Elemente der entsprechenden Algebren $\mathfrak{A}(K_0)$ und $\mathfrak{A}(K_0)_\tau$ kommutieren. Die Observablen und ihre grundlegenden Lokalitätseigenschaften werden also in der relativistischen Quantenphysik durch eine einzige Keilalgebra fixiert, deren innere Struktur bekannt ist.

3) Ihr offizieller mathematischer Name lautet Hyperfiniter Faktor vom Typ III_1.

Eine neue Arena der Teilchenphysik

Diese Einsichten, die sich aus der Mathematisierung physikalisch begründeter Forderungen und einer umfassenden strukturellen Analyse ergeben haben, lassen das Problem der Konstruktion von Modellen der

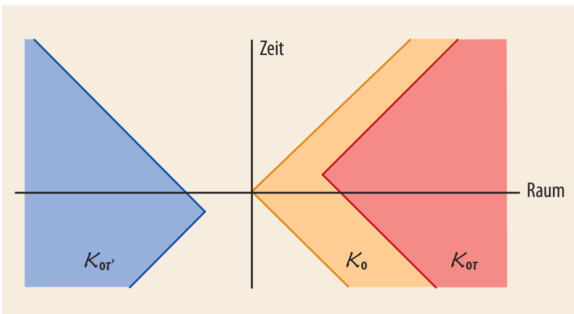

Abb. 3 Standardkeil K_0 und transformierte Keile $K_{0\tau} \subset K_0$, $K_{0\tau'} \subset K_0'$.

Teilchenphysik in einem neuen Licht erscheinen. Bei vorgegebenem Teilcheninhalt können die Observablen aller Modelle in der folgenden einheitlichen Form ohne jegliche Bezugnahme auf nichtobservable Felder präsentiert werden.

Ausgangspunkt ist der aus der Theorie wechselwirkungsfreier Quantenfelder bekannte Fock-Raum, der in üblicher Weise aus den Einteilchenzuständen konstruiert wird. In ihm erhält man eine von den Massen und Spins der Teilchen abhängige Darstellung der Poincaré-Transformationen τ durch unitäre Operatoren $U(\tau)$. Die Wirkung der Poincaré-Transformationen auf die Operatoren A im Fock-Raum ist gegeben durch $A_\tau = U(\tau)\, A\, U(\tau)^{-1}$. Ein konkretes dynamisches Modell entspricht dann, bei vorgegebenem Keilgebiet $\mathcal{K}_0$, der Wahl einer Kopie $\mathfrak{M}$ der Masteralgebra im Fock-Raum mit den folgenden Eigenschaften:

$$\mathfrak{M}_\tau \subset \mathfrak{M} \text{ für alle } \tau, \text{ für die } \mathcal{K}_{0\tau} \subset \mathcal{K}_0 \tag{1}$$

$$\mathfrak{M}_\tau \subset \mathfrak{M}' \text{ für alle } \tau, \text{ für die } \mathcal{K}_{0\tau} \subset \mathcal{K}_0' \,. \tag{2}$$

Hierin bezeichnet $\mathfrak{M}'$ die Menge der Operatoren im Fock-Raum, die mit allen Elementen von $\mathfrak{M}$ kommutieren, und $\mathcal{K}_0'$ das raumartige Komplement von $\mathcal{K}_0$. Diese Kompatibilitätsbedingungen garantieren, dass die gemäß $\mathfrak{A}(\mathcal{K}_0) = \mathfrak{M}$ definierte Keilalgebra alle im vorangegangenen Abschnitt genannten für die Rekonstruktion der Observablen des Modells erforderlichen Eigenschaften hat.

Jedes mit den Grundprinzipien verträgliche Modell fixiert bei vorgegebenem Teilcheninhalt eine derartige Kopie der Masteralgebra $\mathfrak{M}$ im Fock-Raum der Teilchen, der als Raum der Endzustände von Streuexperimenten interpretiert wird. Umgekehrt lassen sich aus dieser Masteralgebra alle Observablen des Modells rekonstruieren. Die verschiedenen Realisierungen der Masteralgebra im Fock-Raum erfassen daher alle mit den Grundprinzipien verträglichen Modelle. In einem gewissen Sinne entspricht die Spezifikation einer Masteralgebra in diesem Rahmen der Wahl eines Hamilton-Operators in der Quantenmechanik. Doch fehlt bisher ein dynamisches Prinzip zur Auswahl spezieller Modelle. Da bei diesem Zugang auf Konzepte der klassischen Physik verzichtet wird, sind hierzu neue Ideen erforderlich.

Der Formalismus bewährt sich jedoch bereits jetzt bei Existenzbeweisen. Die explizite Konstruktion singulärer Quantenfelder, deren Eigenschaften schwer zu kontrollieren sind, lässt sich dabei umgehen. Darüber hinaus kann man auf Methoden aus der Theorie der Operatoralgebren zurückgreifen, wie etwa die Tomita-Takesaki-Theorie [1], die im üblichen Formalismus der Quantenfeldtheorie nicht zur Verfügung stehen. Auf diese Weise ergibt sich ein ganz neuer, komplementärer Zugang zur Behandlung der konstruktiven Probleme in der relativistischen Quantenphysik.

Unter Benutzung dieses neuen Zugangs ist es u. a. gelungen, für eine unendliche Familie von zweidimensionalen Modellen mit faktorisierender Heisenbergscher Streumatrix die Existenz von zugrundeliegenden Theorien zu etablieren, die allen Grundprinzipien genügen [4]. Diese Frage war im sog. Formfaktorprogramm seit mehr als drei Jahrzehnten mit quantenfeldtheoretischen Methoden untersucht worden, ließ sich jedoch so nicht abschließend klären. Der Formalismus ist ferner geeignet, um die in der Wignerschen Klassifikation auftretenden masselosen Teilchen mit unendlichem Spin zu beschreiben, die sich im üblichen quantenfeldtheoretischen Formalismus nicht unterbringen lassen [5]. Ob diese Teilchen von physikalischer Bedeutung sind, etwa als Bestandteile der Dunklen Materie, ist allerdings noch unklar. Besonders vielversprechend sind jüngste Entwicklungen, bei denen erste nichttriviale Beispiele für Masteralgebren in physikalischer Raumzeit konstruiert wurden [6]. Man erhält sie durch Deformation der Masteralgebra einer freien Theorie. Wie Stephen J. Summers und der Autor dieses Beitrags kürzlich zeigen konnten, lässt sich diese Deformationsprozedur auf beliebige Modelle übertragen.

Auch wenn wir bei der Exploration dieser neuen Konstruktionsmethoden erst am Anfang stehen, geben die bisherigen Resultate Anlass zu der Hoffnung, dass in absehbarer Zeit die Existenz von Modellen wechselwirkender Teilchen in physikalischer Raumzeit etabliert werden kann. Damit wäre endlich ein Beweis erbracht, dass die in der heutigen Teilchenphysik implizit oder explizit zugrundegelegten Postulate in sich widerspruchsfreie Idealisierungen der physikalischen Realität sind. Dies wäre ein bedeutender Schritt auf dem Wege zu einer rigorosen Konstruktion des Standardmodells der Teilchenphysik.

Literatur

[1] *R. Haag*, Local Quantum Physics, Springer, Heidelberg (1996)
[2] *D. Buchholz*, Lect. Notes Phys. **558**, 43 (2000)
[3] *J. Glimm* und *A. Jaffe*, Quantum Physics, Springer, New York (1987)
[4] *G. Lechner*, Commun. Math. Phys. **277**, 281 (2008)
[5] *J. Mund, B. Schroer* und *J. Yngvason*, Commun. Math. Phys. **268**, 621 (2006)
[6] *H. Grosse* und *G. Lechner*, JHEP **0711**, 012 (2007)

DER AUTOR

J. Röhl

Detlev Buchholz studierte Physik in Hannover und Hamburg, wo er 1973 promovierte und 1977 habilitiert wurde. Nach der Promotion arbeitete er am CERN in Genf und ging im Anschluss an seine Habilitation als Max-Kade-Stipendiat an die University of California in Berkeley. Nach Erhalt eines Heisenberg-Stipendiums und eines Rufs an die TU Berlin nahm er 1979 den Ruf auf eine Professur an der Uni Hamburg an. 1997 folgte er einem Ruf an die Uni Göttingen, wo er seitdem tätig ist und sich mit konzeptionellen und konstruktiven Aspekten der relativistischen Quantenfeldtheorie und Quantenstatischen Mechanik befasst. Er ist Mitherausgeber namhafter Zeitschriften auf dem Gebiet der Mathematischen Physik und wurde für seine Arbeiten mehrfach national und international ausgezeichnet.

