

# Das Global Positioning System

Globale Positionierungssysteme beruhen auf der Speziellen und der Allgemeinen Relativitätstheorie

Erik W. Grafarend und Volker S. Schwarze

**Weltumspannende, satellitengestützte globale Positionierungssysteme dienen der Standort- bzw. Richtungsbestimmung. Das Global Positioning System (GPS) ermöglicht heutzutage die einfache und zuverlässige Navigation auf Straßen, zu Wasser oder in der Luft. Inzwischen ist das System so verbreitet, dass sogar eigene Zeitschriften wie GPS World am Kiosk zu kaufen sind. In diesem Beitrag wollen wir zeigen, wie das Milliardenprojekt GPS auf speziell- und allgemein-relativistischen Zeitskalen routinemäßig arbeitet. Denn: Ohne die Allgemeine Relativitätstheorie gäbe es kein GPS!**

Am 1. Mai 2000 überraschte der damalige US-Präsident Bill Clinton mit der Mitteilung, dass künftig auch zivile Nutzer das Global Positioning System GPS mit einer wesentlich höheren Genauigkeit nutzen könnten. Ursprünglich hatten die USA das GPS für zwei getrennte Nutzerkreise ausgelegt: ein hochgenaues militärisches GPS und ein künstlich verschlechtertes ziviles System. Und tatsächlich – am 2. Mai 2000 wurde die so genannte *selective availability* eliminiert: Der mittlere Fehler einer Positionsbestimmung verringerte sich schlagartig von etwa 100 m auf 10 m (Abb. 1). Und auch die Initialisierung nach Signalunterbrechungen wurde schneller.

Für das Abschalten zu diesem Zeitpunkt gab es kommerzielle und technische Gründe. Schon im Jahre 1996 verkündeten die Verantwortlichen des amerikanischen GPS, dass die eingeschränkte Verfügbarkeit spätestens im Jahre 2006 abgeschaltet werden würde: Unter dem zunehmenden Druck der potenziellen Konkurrenz durch das rein zivil geplante europäische System GALILEO entwickelten die GPS-Systemtechniker neue Mechanismen, um die Signale bei Bedarf aus militärischen Gründen in bestimmten kritischen Regionen zu stören. Mehrere Millionen Besitzer von GPS-Empfängern in Raum-, Luft-, Schifffahrt und Straßenverkehr, aber auch Wanderer und Segler profitieren seitdem von der Abschaltung der Störmechanismen. Daneben ist die Zeitübertragung nun auf vierzig Teile in einer Milliarde genau und eröffnet neue Anwendungen in der Zeithaltung im Internet, in Strom- und in Mobilfunknetzen.

Mit unserem Beitrag möchten wir zunächst die globalen Positionierungs- und Navigationssatellitensysteme näher charakterisieren. Dabei gehen wir auf das



Mehr als 24 Satelliten funken ihre Koordinaten zur Erde, aus denen ein GPS-Empfänger seine Position berechnet. Eine Genauigkeit von wenigen Metern kann nur erreicht werden, indem man relativistische Effekte berücksichtigt. (Foto: Air Force Research Laboratory)

amerikanische Positionierungssysteme GPS, das russische Pendant GLONASS und das europäische Projekt GALILEO ein. Anschließend stellen wir die globalen Navigationssysteme als „Mega-Nutzer“ der Speziellen und Allgemeinen Relativitätstheorie vor: Bewegte Uhren im Gravitationsfeld der Erde ticken in relativistischen Zeitskalen, exakte Satellitenbahnen müssen relativistisch berechnet werden und die Kommunikation eines satellitengetragenen Senders zu einem erd- oder raumgebundenen Empfänger geschieht über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, die nach der Allgemeinen Relativitätstheorie von der terrestrischen Gravitation beeinflusst werden.

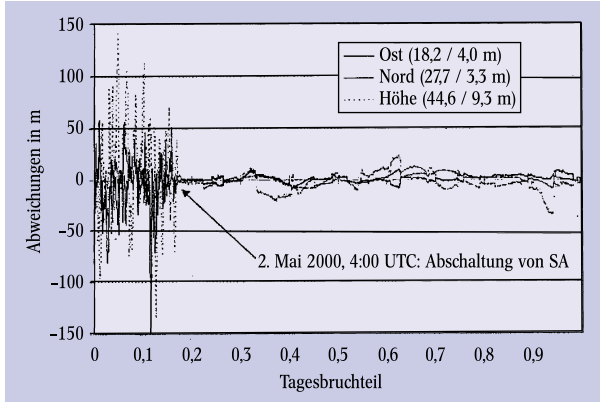
## Drei Systeme, ein Prinzip

Ein globales Positionierungssystem soll jederzeit in „Echtzeit“ und an jedem Ort auf der Erde oder im erdnahen Raum die Position bzw. Positionsänderung eines Beobachters in einem dreidimensionalen Koordinatensystem angeben, dessen Ursprung sich im Massenmittelpunkt der Erde befindet. Dazu senden Satelliten elektromagnetische Signale aus, die die jeweilige *Eigenzeit* des Satelliten kodiert enthalten. Der Signalempfänger misst die Eigenzeit der Signalkunft. Aus der Differenz der Sender- und Empfänger-Eigenzeiten lässt sich die Laufzeit des elektromagnetischen Signals bestimmen und – multipliziert mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit des elektromagnetischen Signals – die Distanz zwischen Sender und Empfänger. Werden „gleichzeitig“ mehrere Distanzen von Satelliten zu Bo-

Prof. Dr. Erik W. Grafarend, Dr. Volker S. Schwarze, Geodätisches Institut, Universität Stuttgart, Geschwister-Scholl-Str. 24D, 70174 Stuttgart

denempfängern gemessen, lässt sich mit einem *geodätischen Bogenschnitt* die Position des Empfängers bei gegebenen Positionen der Sender bestimmen – vorausgesetzt, das Signal eines Satelliten des globalen Satellitensystems enthält auch die momentane Satellitenposition. Der geodätische Bogenschnitt beschreibt eine besondere Art der Positionsbestimmung: Angenommen, man kennt die Positionen dreier Punkte (hier: Satelliten) im dreidimensionalen Euklidischen Raum sowie

**Abb. 1:** Das Abschalten der eingeschränkten Verfügbarkeit (*selective availability*) des globalen Positionierungssystems der USA am 2. Mai 2000 um 4 Uhr *Universal Time Coordinated* (UTC) verringerte schlagartig den mittleren Fehler bei der Positionsbestimmung.



den Abstand dieser drei „Altpunkte“ zu einem „Neupunkt“. Legt man nun um die drei Altpunkte Kugeln mit den Radien der jeweiligen Distanz Neupunkt-Altpunkt, so bestimmt der Schnitt der drei Kugeln die gesuchten Koordinaten des Neupunkts – allerdings nur zweideutig. Vorinformation über die tatsächliche Lage des Neupunktes – auf der Erdoberfläche oder im interplanetaren Raum – machen die Lösung eindeutig.

Differenzpositionen zwischen den Empfängern eines globalen Satellitensystems am Boden lassen sich auf Zentimeter genau bestimmen, falls die Laufzeitmessungen auf Nanosekunden genau sind. Das im Folgenden skizzierte System ermöglicht es, die dazu notwendigen Informationen über die momentanen Satellitenpositionen im Millisekunden-Takt bereitzustellen und von den Satelliten zum Empfänger zu transferieren. Ein globales Positionierungssystem besteht aus:

- ▶ dem Raumsegment – den Satelliten,
- ▶ dem Kontrollsegment – den Kontroll- sowie Monitorstationen auf der Erde,
- ▶ und dem Nutzersegment – Empfänger bzw. Software der Nutzer und Informationsdienste im Internet.

**GPS – das amerikanische Positionierungssystem**

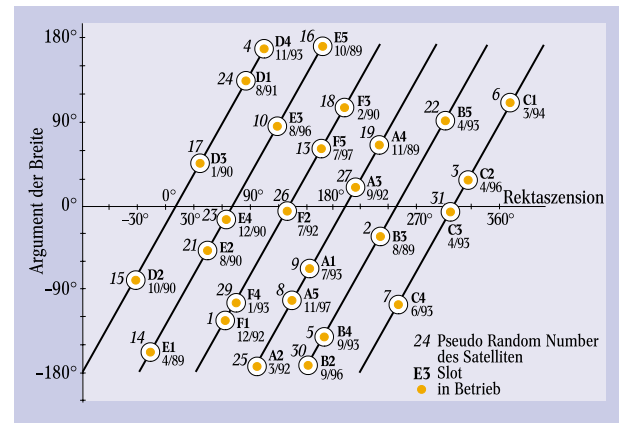
Das GPS arbeitet mit mehr als 24 Satelliten, die auf sechs Bahnebenen in einer Bahnneigung von 56° verteilt sind. Diese minimale Anzahl von Satelliten gewährleistet, dass an jedem Ort der Erdoberfläche mindestens vier Satelliten gleichzeitig empfangen werden können, so wie es der geodätische Bogenschnitt erfordert. Die Satelliten bewegen sich auf nahezu kreisförmigen Bahnen in einer Höhe von etwa 20 200 km über der Erdoberfläche bei einer Umlaufzeit von etwa 11 h 58 min. Um hochgenaue Laufzeitmessungen zu ermöglichen, sind die Satelliten mit je zwei Cäsium/Rubidium-Atomuhren oder Wasserstoff-Maser-Uhren ausgestattet. Die Frequenzstabilität dieser Zeitnormale beträgt etwa  $10^{-15}$  pro Tag. Abbildung 2 gibt einen Überblick über die verfügbaren Satelliten.

Die Konstellation der Satelliten führt nicht zu einer gleichmäßigen azimuthalen und zenitalen Verteilung der Satelliten an verschiedenen Beobachtungsorten. Bei-

spielsweise sind für einen Beobachtungsort im Süden Deutschlands fast permanent fünf, häufig sechs und maximal zehn Satelliten sichtbar.

Das GPS besteht aus einer zentralen Kontrollstation auf der Falcon Luftwaffenbasis in Colorado Springs, fünf so genannten Monitorstationen in Colorado Springs, Hawaii, Ascension, Diego Garcia und Kwajalein sowie drei Kontrollstationen auf Ascension, Diego Garcia und Kwajalein. Die zentrale Kontrollstation sammelt die großen Datensätze der Monitorstationen und berechnet aus ihnen die Satellitenbahnen sowie die Uhrenfehler vom Typ (i) Verschiebung des Ursprungs, (ii) Drift und (iii) Driftänderung, die regelmäßig einmal am Tag über die terrestrischen Kontrollstationen in die Speicher der Satelliten übertragen und korrigiert werden. Die Korrektur der Uhrenfehler ist notwendig, um hochgenaue Laufzeitmessungen zu erreichen. Die Monitorstationen sind ebenfalls mit Cäsium-Zeitnormalen ausgestattet und messen kontinuierlich so genannte Pseudostrecken zu allen sichtbaren Satelliten. Pseudostrecken sind aus Laufzeitmessungen elektromagnetischer Signale – von der Satellitenantenne zur bodengebundenen Empfängerantenne – abgeleitete Strecken, die noch nicht mit der Zeitverschiebung des zeitlichen Ursprunges der Satellitenuhr korrigiert sind. Unter der Annahme, dass die gemessene Eigenzeit einer Sender- oder Empfängeruhr schon in die geozentrische Koordinatenzeit transformiert wurde, lassen sich mittels des geodätischen Bogenschnittes entweder die Positionen der Satelliten aus so genannten terrestrischen Satellitenbeobachtungsnetzen oder die Positionen der Bodenstationen aus mindestens vier gegebenen Satellitenpositionen bestimmen [1].

Zum Nutzersegment gehören neben den GPS-Empfängern sowie der Software zur Verarbeitung gemessener Daten auch die im Internet vertretenen Informationsdienste (siehe Kasten „Globale Positionierungssysteme im Internet“).



**Abb. 2:** Das amerikanische GPS arbeitet mit mehr als 24 Satelliten, die auf sechs Bahnebenen in einer Bahnneigung von 56° verteilt sind. Das Diagramm gibt einen Überblick über die verfügbaren Satelliten, ihre Position in der Bahnebene, Code-Nummer und den Zeitpunkt des Satellitenstarts.

Offiziell wird die Struktur eines Satellitensignals im *Interface Control Document ICD-GPS-2000* beschrieben. GPS nutzt zwei Frequenzen,  $L_1 = 1575,42$  MHz und  $L_2 = 1227,60$  MHz, Vielfache der Grundfrequenz  $f_0 = 10,23$  MHz. Die zweite Frequenz – Tests laufen bereits mit einer dritten Frequenz – wird dafür genutzt, Parameter des Brechungsindex in der Atmosphäre, vor-

rangig der Ionosphäre, zu bestimmen. Wie wir später erklären, sind die universellen Frequenzen um etwa 0,005 Hz niedriger, damit sich der Einfluss relativistischer Terme verringert. Um die Signale der Satelliten eindeutig zuordnen zu können, wird beiden Frequenzen ein charakteristisches „Pseudo-Zufallsrauschen“ aufmoduliert. Es dient auch der Laufzeitmessung, indem das Satellitensignal mit einem beim Empfänger generierten Referenzsignal verglichen wird. Auch die Informationen über Satellitenposition und -uhrzeit werden dem vom Satelliten ausgesandten Signal aufmoduliert. Bis zum 2. Mai 2000 wurde das GPS-Signal für zivile Anwendungen absichtlich verschlechtert (*selective availability*). Dazu verfälschten die amerikanischen Betreiber die Grundfrequenz  $f_0$  lang- und kurzperiodisch. Gleichzeitig manipulierten sie die Satelliten-Uhrparameter und -bahndaten. Inzwischen sind diese Beschränkungen weitgehend aufgehoben. Die Position eines GPS-Empfängers in Deutschland lässt sich heute mit einer Genauigkeit von etwa 10 m bestimmen.

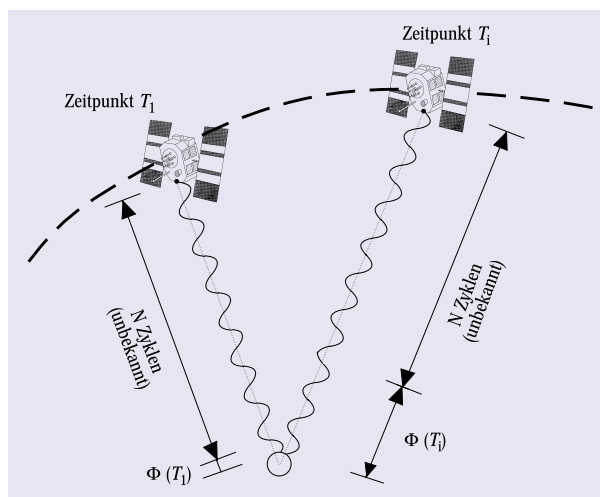
Bei längeren Messzeiten lässt sich diese Genauigkeit weiter steigern. Dazu werden die Phasen der  $L_1$ - und  $L_2$ -Trägerwellen ausgewertet und die aufmodulierten Signale von der Trägerwelle wieder entfernt. Solange die Störsignale bekannt sind, lässt sich eine einzelne Phase problemlos auf wenige Millimeter genau bestimmen. Abbildung 3 verdeutlicht, dass eine Phasenmessung eine hochgenaue Pseudostreckenmessung ist, falls sich die Anzahl ganzer Wellenlängen zwischen Sender und Empfänger zum gemessenen Phasenstück addieren lassen.

Die Anzahl ganzer Wellenlängen ist jedoch a priori unbekannt. Sie geht als Parameter der Phasenmehrdeutigkeit in das Budget der unbekannt Parameter ein. Gelingt es, die Mehrdeutigkeiten als ganze Zahlen schnell und zuverlässig zu bestimmen, so lassen sich hochgenaue Positionen in Echtzeit ermitteln – vorausgesetzt der Kontakt zum Sender (zur Satellitenantenne) wird nicht unterbrochen. Falls dies doch passiert, ist das Problem der Phasensprünge zu lösen.

Die typischen Fehler des amerikanischen GPS sind:

- ▶ Fehler in den sehr genau benötigten Satellitenpositionen,
- ▶ Fehler in den Satellitenuhren im Picosekunden-Niveau,

- ▶ atmosphärische Laufzeitverzögerungen der Signale – in der Ionosphäre (160–320 km über der Erde) und der Troposphäre (0–10 km über der Erde),
- ▶ Fehler durch Interferenz der direkt empfangenen Satellitensignale mit anderen, die in der Umgebung der Empfängerantenne reflektiert werden (Mehrwegeeffekte),
- ▶ elektromagnetische Störquellen (Amateurfunk), Empfängerrauschen.



**Abb. 3:** Bei Phasenmessungen ist die Zahl der ganzen Wellenlängen a priori unbekannt. Das führt zum Problem der Mehrdeutigkeit.

### GLONASS – das russische Gegenstück zum GPS

Das *Global Orbiting Navigation Satellite System* GLONASS ist das russische Gegenstück zum amerikanischen GPS. Es umfasst ebenfalls ein Raum-, ein Kontroll- und ein Nutzersegment. Das Raumsegment besteht konzeptionell aus 24 Satelliten in zirkulären Bahnen in 19 100 km mittlerer Höhe, die auf drei Bahnebenen mit je acht Satelliten und einer Bahnneigung von  $64,8^\circ$  gleichmäßig verteilt sind. Momentan stehen jedoch nur zehn Satelliten im Orbit, von denen nur acht funktionieren (Stand 16. Juni 2000). Die Umlaufzeit beträgt etwa 11 h 15 min. Die aufsteigenden Knoten der drei Bahnebenen sind äquidistant.

Das Kontrollsegment von GLONASS besteht aus einem Kontrollzentrum in Moskau, in dem die Bahnen und Uhrfehler der Satelliten relativ zum russischen Zeitsystem bestimmt werden. Ein terrestrisches Netz, das über ganz Russland verteilt ist, vermisst die Satelliten. Ein Frequenznormal vom Typ Wasserstoff-Maser steuert die Satellitenuhr. Seine Stabilität ist besser als  $5 \times 10^{-4}$  pro Tag. Auf der Erde verfolgen fünf Messstationen mittels Laser-Entfernungsmessung die Satelliten. Die regionale Beschränkung des Kontrollsegmentes auf Russland hat den Nachteil, dass sich die Satellitenbahnen nur in Teilen überwachen lassen. Darunter leidet die Stabilität der Bahn- bzw. Uhrendaten und daraus abgeleitete Systemfehler werden erst spät erkannt und dem Nutzer gegebenenfalls zu spät mitgeteilt. Das Kontrollzentrum überträgt die Positionsdaten zweimal täglich zu den Satelliten.

Auch GLONASS wird wie das GPS militärisch und zivil genutzt, und die Signale liegen ebenfalls im  $L$ -Band bei einer Grundfrequenz von  $f_0 = 5,0$  MHz. Sie werden auf zwei Frequenzen  $L_{1k} = 1602 \text{ MHz} + k \cdot 0,5625 \text{ MHz}$  und  $L_{2k} = 1246 \text{ MHz} + k \cdot 0,4375 \text{ MHz}$  mit der jeweiligen Satellitenkennziffer  $k$  übertragen. Wesentliche Unterschiede zwischen beiden Positionierungssystemen liegen in den Zeitstandards und in den geodätischen Referenzsystemen: GPS bezieht sich auf

### Globale Positionierungssysteme im Internet:

<http://gibs.leipzig.ifag.de/>

GPS Informations- und Beobachtungssystem (GIBS) des BKG (Informationen, präzise Ephemeriden wie IGS und CODE);

<http://igsceb.jpl.nasa.gov/>

Informationen, präzise Ephemeriden wie IGS und CODE;

[www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps\\_f.html](http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps_f.html)

GPS Systembeschreibung, nützliche Links

[www.genesis-office.org](http://www.genesis-office.org)

Informationen zu Galileo;

[www.navcen.uscg.mil/](http://www.navcen.uscg.mil/)

U.S. Coast Guard: zivile Informationsstelle in den USA zu GPS;

[www.ngs.noaa.gov/](http://www.ngs.noaa.gov/)

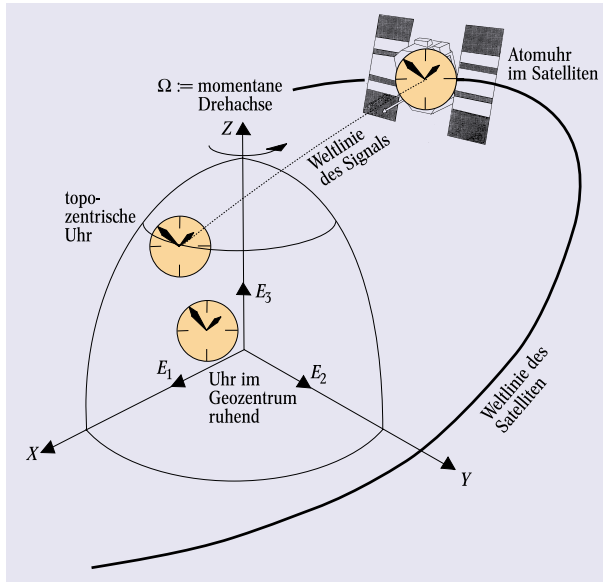
National Geodetic Survey: GPS Ephemeriden, nützliche Software;

[www.rssi.ru/SFCSIC/SFCSIC\\_main.html](http://www.rssi.ru/SFCSIC/SFCSIC_main.html)

Russisches Verteidigungsministerium:

GLONASS Systembeschreibung, Ephemeriden;

den Zeitstandard, der vom U. S. Naval Observatory zur Verfügung gestellt wird. Dieses Zeitsystem weicht vom Internationalen Zeitstandard des Bureau International des Poids et Mesures in Paris um weniger als 20 Nanosekunden ab. GLONASS dagegen basiert auf dem Nationalen Standard des Zeit- und Frequenzdienstes der russischen Föderation, der sich nach einer Korrektur im November 1996 um einige Mikrosekunden (!) von der internationalen Zeitskala unterscheidet. Aus



**Abb. 4:** Die drei Komponenten eines relativistischen Modells des globalen satellitengestützten Positionierungssystems: Uhrenmodell, Signalausbreitung und Bahndynamik.

diesem Grund werden Schaltsekunden in die GLONASS-Systemzeit eingeführt plus eine Korrektur auf Moskauer Zeit. Nach einer Untersuchung des Lincoln Labors der Massachusetts Institute of Technology sind die mithilfe von GLONASS ermittelten Positionen besser als diejenigen von GPS bei eingeschalteten Störsignalen. Falls die Amerikaner jedoch die Störsignalkarakteristiken dem Nutzer mitteilen, schneidet GPS besser ab als GLONASS.

#### **GALILEO – das europäische Projekt**

Die Europäische Union und die europäische Raumfahrtagentur planen gemeinsam das rein zivil kontrollierte Satelliten-Positionierungssystem GALILEO. Ohne Codeauflagen und ohne ausgeklügelte Signalverschlechterung soll jeder Nutzer eine dreidimensionale Position und Geschwindigkeit sowie eine sehr genaue Zeitangabe bestimmen können – und das zu jeder Zeit sowie überall auf der Erde bzw. im erdnahen Bereich. Die Genauigkeit, Verfügbarkeit und Zuverlässigkeit soll optional in verschiedenen Diensten bereit gestellt werden. Profitieren werden davon vor allem die Raumfahrt, Luft- und Seefahrt sowie der Straßenverkehr. GALILEO-Satellitenempfänger sollen mit anderen globalen Positionierungssystemen kompatibel und interoperabel ausgelegt werden. Insbesondere soll GALILEO dazu beitragen, die äußerst schwache Signalstärke in Stadtgebieten und in hohen nördlichen Breiten sowie zeitliche Lücken in der notwendigen Satellitenüberdeckung zu vermeiden. Das System soll 2006 in Betrieb gehen.

#### **Relativistisches GPS**

Nachdem wir einen Überblick über die aktuellen satellitengestützten Positionierungssysteme gegeben haben, möchten wir nachfolgend das relativistische

Modell globaler Positionierung vorstellen [3]. Dieses beinhaltet ein relativistisches Uhrenmodell, die relativistische Signalausbreitung und sowie die relativistische Bahndynamik (Abb. 4).

Die Uhren der Satelliten und Empfänger zeigen im Idealfall die jeweilige Eigenzeit an, die gemäß der Allgemeinen Relativitätstheorie sowohl orts- als auch geschwindigkeitsabhängig ist. Für die bisher beschriebenen Positionierungssysteme müssen die ermittelten Eigenzeiten in Koordinatenzeiten umgerechnet werden. Wird eine solche Zeittransformation vernachlässigt, treten lineare und periodische Streckenfehler auf, deren erstaunliche Größenordnungen wir nachfolgend abschätzen. Eng verknüpft mit diesem Problem ist die Definition von Koordinaten- bzw. Systemzeit. Für die eingangs beschriebenen Einwegsysteme auf der Basis eines aktiven Senders und passiven Empfängers wird eine Raumstrecke über einen Uhrenvergleich an der Erdoberfläche ermittelt. Der Ausbreitungsprozess des elektromagnetischen Signals wird dabei durch die Atmosphäre sowie durch das terrestrische und extraterrestrische Gravitationsfeld beeinflusst.

Eigenzeitdifferenzen werden als Funktion der Empfänger- und Satellitenposition berechnet. Über das Satellitensignal wird die Satellitenposition im Sekundentakt übermittelt. Dazu müssen die Bahnen der einzelnen Satelliten hochgenau berechnet werden, die aufgrund der Anisotropie des Gravitationsfeldes sowie nichtgravitativer Störkräfte stark von einer Keplerbahn abweichen. Im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie weicht die Bahn des Satelliten schon im Falle des relativistischen Kepler-Problems (Zentralkörper und Satellit seien Massenpunkte) von einer klassischen Kepler-Ellipse ab. Für einen Standardsatelliten eines globalen Positionierungssystems beträgt beispielsweise diese Bahnabweichung etwa 70 cm nach 24 Stunden. Zum Vergleich: Der maßgebliche Newtonsche Störterm – das Quadrupolmoment, hervorgerufen durch die Abplattung der Erde ( $J_2$ -Term) – ruft im gleichen Zeitraum eine Abweichung von der Kepler-Bahn im Bereich mehrerer tausend Meter hervor.

#### **Das relativistische Uhrenmodell**

Um die orts- und geschwindigkeitsabhängige Transformation einer uhrentechnisch ermittelten Eigenzeit in Koordinaten- oder Systemzeit ausführen zu können, ist ein relativistisches Uhrenmodell zu entwickeln. Im

**Nach der Relativitätstheorie beeinflussen sowohl das Gravitationsfeld der Erde als auch ihre Rotation den Uhrengang. Verglichen mit einer idealisierten Uhr im Massenmittelpunkt der Erde führt dies für eine Uhr auf der Erdoberfläche (Abstand vom Geozentrum 6378 km) bzw. in einem GPS-Satelliten (Abstand 26 571 km) zu unterschiedlich starken Gangabweichungen.**

Ursache der Zeitverzögerung	$d\tau/dT-1$
Einfluss des Monopolterms der Erde auf eine Uhr auf der Erdoberfläche	$6,953 \times 10^{-10}$
Einfluss des Monopolterms der Erde auf eine Uhr im GPS-Satelliten	$1,669 \times 10^{-10}$
Einfluss des Quadrupolterms der Erde auf eine Uhr auf der Erdoberfläche	$3,760 \times 10^{-15}$
Einfluss der Bewegung eines GPS-Satelliten bezüglich des Geozentrums	$8,350 \times 10^{-11}$
Einfluss der Bewegung eines erdfesten Beobachters bezüglich des Geozentrums	$1,200 \times 10^{-12}$

Folgenden möchten wir einen Überblick über die Größenordnung der einzelnen relativistischen Effekte geben. Ausgangspunkt ist eine geozentrische Koordinatenzeit, deren übergeordnete Zeitskala durch eine idealisierte Uhr im Massenmittelpunkt der Erde realisiert sei, die sich mitbewegt und nicht vom Gravitationsfeld der Erde beeinflusst wird. Dem in diesem Sinne realisierten Koordinatenzeitintervall  $dT$  werden die Gangraten einer Uhr erstens an der Erdoberfläche  $d\tau_\alpha$  und zweitens in einem Satelliten  $d\tau^\beta$  gegenübergestellt (siehe Tabelle).

Offensichtlich ist der Einfluss des terrestrischen Gravitationsfeldes (Monopol- und Quadrupolanteil) auf erdnahe Uhren größer als der Einfluss aufgrund der Bewegung relativ zum Geozentrum. Werden Raumstrecken aus messtechnisch ermittelten Eigenzeitdifferenzen anstatt aus Koordinatenzeitdifferenzen abgeleitet, so ergeben sich in erster Näherung bezüglich der Koordinatenzeit lineare Streckenfehler (Abb. 5a). Der Streckenfehler  $\Delta s = c(t_\alpha - t^\beta) - c(\tau_\alpha - \tau^\beta)$  beträgt für eine typische Satellitenkonfiguration eines globalen Positionierungssystems nach 24 Stunden etwa 12 000 m. Neben den zeitlich linearen Termen treten auch markante periodische Terme auf, welche sich beispielsweise dadurch ergeben, dass der Satellit sich nicht auf einer kreisförmigen, sondern auf einer nahezu elliptischen Bahn bewegt. Der bedeutende periodische Term ist in Abbildung 5b für eine typische Konfiguration von GPS-Satelliten aufgetragen. Üblicherweise wird dieser Term durch ein Polynom zweiter Ordnung angenähert, dessen Koeffizienten in regelmäßigen Abständen neu berechnet und vom Satelliten in der verschlüsselten Navigationsnachricht dem Nutzer mitgeteilt werden. Für die hochgenaue Positionierung, insbesondere für Deformationsnetze an der Erdoberfläche, muss allerdings der periodische Effekt exakt berechnet und in geeigneter Form als Reduktion der Daten eingebracht werden [4].

**Signalausbreitung im Medium und im Gravitationsfeld**

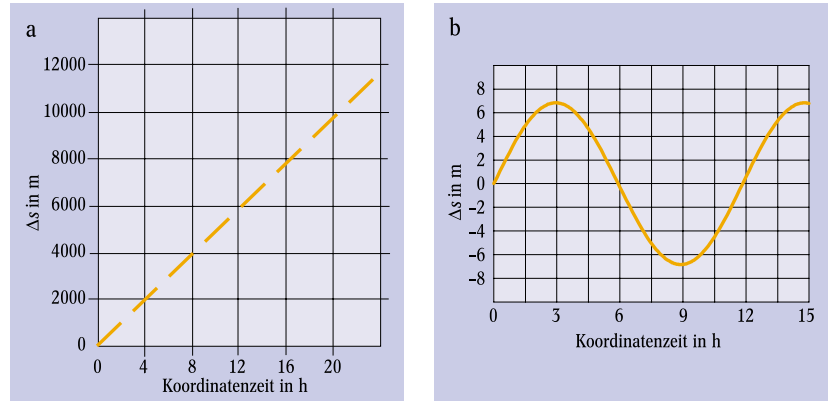
Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie wird Licht in einem Gravitationsfeld abgelenkt und seine Ausbreitung verzögert. Umfangreiche Studien über den Einfluss des Gravitationsfeldes und der Atmosphäre als dispersives und refraktives (Licht brechendes) Medium sind in [5] gesammelt. Abbildung 6a zeigt den Einfluss des Gravitationsfeldes auf die Laufzeit des Signals von einem Satelliten zur Erdoberfläche. Dieser Effekt hängt vom Elevationswinkel ab – dem Winkel zwischen der Richtung des einfallenden Signals und der Horizontalenebene des Beobachters – und führt zu einem geringen Fehler von bis zu zwei Zentimetern. Wesentlich größer ist der Einfluss der Atmosphäre – bis zu 80 m Streckenreduktion, wobei der dispersive Anteil – der Anteil der Ionosphäre – bis zu 60 m beträgt. Dieser dispersive Anteil kann durch Satellitenbeobachtungen auf zwei Frequenzen ( $L_1$  und  $L_2$ ) modelliert und weitgehend eliminiert werden. Der Einfluss der Troposphäre (der refraktive Anteil) lässt sich für die absolute Positionierung dagegen nur durch entsprechende Modelle unter Eingabe von Zusatzmessungen der Atmosphärenphysik reduzieren.

Ein weiterer Effekt ist auf die endliche Lichtgeschwindigkeit zurückzuführen. Während der Signalausbreitung bewegt sich der Empfänger gegenüber einem raumfesten Koordinatensystem. Dieser Effekt hängt

ebenfalls stark vom Elevationswinkel ab und kann bis zu 40 m betragen (Abb. 6b) [5]. Nur durch geeignete Beobachtungsverfahren lässt er sich beseitigen [3].

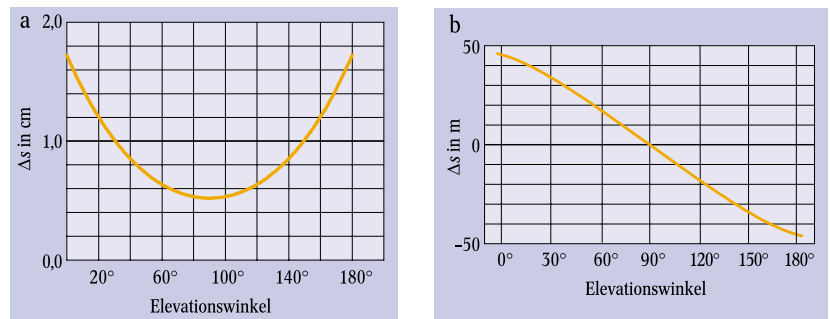
**Relativistische Bahnberechnung**

Zur Berechnung seiner relativistischen Bahn wird der Satellit als Massenpunkt approximiert, der im Gravitationsfeld der Erde frei fällt. Die Bewegungsgleichung lässt sich als Differentialgleichung der geodätischen Linie auf der Basis der Kepler-Gesetze lösen [2].



**Abb. 5:** Linearer (a) und periodischer Anteil (b) der Streckenkorrektur  $\Delta s$  bezogen auf eine geozentrische Koordinatenzeit

(GPS-Szenario: Exzentrizität  $e = 0,010$ , große Halbachse 26 371 km)



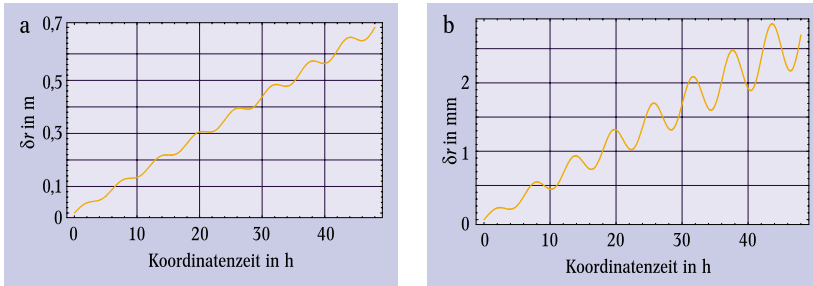
**Abb. 6:** Streckenmessfehler  $\Delta s$  als Funktion des Elevationswinkels:  
 ► a) durch den Einfluss des Gravitationsfeldes der Erde und

► b) durch den Einfluss der Bewegung des topozentrischen Beobachters.

Die so genannten post-Newtonschen Gravitationsterme werden hierbei als Störung des Kepler-Problems angesehen. Abbildung 7 zeigt die typischen relativistischen Störungen von GPS-Satellitenbahnen, aufgetrennt in a) den skalar- und b) den vektorwertigen Störanteil. Im skalaren Anteil wurde nur der Monopol des terrestrischen Gravitationsfeldes berücksichtigt, der so genannte Schwarzschild-Term. Der vektorwertige Anteil heißt Thirring-Lense-Term und ruft den so genannten gravitomagnetischen Effekt hervor. Zurzeit lassen sich die beiden Terme durch erdnahe Satellitenbahnen nicht ohne weiteres nachweisen, weil sie mit anderen gravitativen und nicht-gravitativen Bahneinflüssen überlagern. Für eine relativistische Bahnanalyse ist insbesondere der Quadrupol-Term des terrestrischen Gravitationsfeldes nicht genau genug bekannt. Allerdings gibt es Studien über eine spezielle Anordnung von zwei Satellitenbahnen, die eine Perspektive eröffnen, den Thirring-Lense-Term zu ermitteln [6].

**Die Systemzeit eines globalen Positionierungssystems**

Alle bisherigen Analysen und Zahlenangaben bezogen sich auf eine geozentrische Koordinatenzeit. Unter den vereinfachenden Annahmen, dass der Beobachter in einem erdfesten Koordinatensystem ruht und der Satellit sich auf einer kreisförmigen Bahn bewegt, gilt eine lineare Relation zwischen Koordinatenzeit  $t$  und Eigenzeit  $\tau$ :  $\tau_\alpha = (1+K_\alpha)\tau_\alpha$  für den Beobachter bzw.  $t^\beta = (1+K^\beta)\tau^\beta$  für den Satelliten. Die Systemzeit des Positio-



**Abb. 7:** Abweichung einer relativistischen Satellitenbahn von einer Kepler-Bahn als Funktion der Koordinatenzeit: **a)** skalarwertiger Anteil (Schwarzschild-Term) und **b)** der tausendmal geringere vektorwertige Anteil (Thirring-Lense-Term).

nierungssystems wird so gewählt, dass eine sich auf einer Äquipotentialfläche befindende Atomuhr diese Systemzeit  $t^*$  anzeigt. Diese Äquipotentialfläche des terrestrischen Schwerfeldes (Geoid) liegt dem Mittleren Meeresspiegel am nächsten. Für die Transformation „Eigenzeit  $\tau$  in Systemzeit  $t^*$ “ einer satellitengetragenen Uhr gilt:  $t^{*\beta} = (1+K^\beta-K_\alpha)\tau^\beta = (1-4,465 \times 10^{-10})\tau^\beta$ , wobei sich die Zahlenwerte für  $K^\beta$  (Uhr im Satelliten) bzw.  $K_\alpha$  (Beobachter auf der Erdoberfläche) aus der Tabelle ergeben. Dieser konstanten Differenz im Uhrengang wird dadurch Rechnung getragen, dass die Grundfrequenz  $f_0$  des Satellitensignals um  $\Delta f = 10,23(-4,465 \times 10^{-10})\text{MHz} = -0,0046\text{ Hz}$  reduziert wird. Der bereits einleitend erwähnte Zahlenwert berücksichtigt nur den linearen Anteil zwischen Eigenzeit und Koordinatenzeit. Außerdem ist im Allgemeinen nicht die Bedingung erfüllt, dass die Empfängeruhr auf der Äquipotentialfläche „tickt“. Diese Anteile werden durch geeignete Uhrenparameter aufgefangen, die bei der Auswertung von Satellitenbeobachtungen simultan geschätzt werden.

**Diskussion**

Ein relativistisches Modell – vor allem ein relativistisches Uhrenmodell – ist für ein globales Positionierungssystem unerlässlich. Zugleich ist ein GPS-Gerät bisher der einzige täglich millionenfach angewandte Gebrauchsgegenstand, bei dem ein relativistisches Modell berücksichtigt werden muss. Der Nutzer eines globalen Positionierungssystems kann damit zwar seine Position bestimmen bzw. navigieren, nicht aber die Allgemeine Relativitätstheorie verifizieren. Es ist jedoch möglich, diejenigen relativistischen Effekte zu berücksichtigen, die noch nicht in den internationalen Konventionen, insbesondere dem Internationalen Zeitdienst, aufgenommen wurden. Dazu werden geeignete Uhrenparameter als notwendige Systemunbekannte eingeführt. Der geodätischen Software, die derartige relativistische Effekte berücksichtigt, kommt deshalb eine zentrale Bedeutung zu. Darüber hinaus sind geodätische Messverfahren in einem Array von terrestrischen Empfängern und Satellitensendern entwickelt worden, die es gestatten, den Einfluss der relativistischen Zeitskala, der gravitativen Laufzeitverzögerung und der relativistischen Bahnstörung unter die Genauigkeitsgrenze zu bringen [3]. Die neuartigen Verfahren nutzen die Tatsache aus, dass bei benachbarten Empfängern die relativistischen Terme fast identisch sind,

folglich bei einer Differenzbildung nahezu verschwinden (Differentielle globale Positionierung).

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die hier vorgestellten relativistischen Modelle in der geodätischen Praxis leicht handhabbar sind, soweit sie die Frequenzminderung aufgrund des linearen Uhrenganges, die periodischen Uhrenterme und die Laufzeitverzögerung aufgrund des Gravitationsfeldes betreffen. Um seine Ergebnisse – insbesondere im hochgenauen Bereich der geodätischen Nano-Wissenschaft – bewerten zu können, muss der Nutzer eines globalen Positionierungssystems jedoch über die Allgemeine Relativitätstheorie und über die Kopplung von Elektromagnetismus und relativistischer Gravitation Bescheid wissen.

**Literatur**

[1] E. Grafarend, J. Shan, *Artificial Satellites* **31**, 133 (1996); E. Grafarend, B. Schaffrin, *manuscripta geodaetica* **11**, 262 (1986); E. Grafarend, *Zeitschrift für Vermessungswesen* **114**, 321 (1989); E. Grafarend in: S. P. Mertikas (Hrsg.), *Proc. Intl. Workshop on global positioning in geosciences*, Technical University of Crete (1993); B. W. Parkinson und J. J. Spilker, *Global Positioning System: Theory and Applications*, 2 Bände, American Institute of Astronautics and Aeronautics **163** (1996); P. J. G. Teunissen in: P. J. G. Teunissen und A. Kleusberg (Hrsg.), *GPS for Geodesy*, Springer Verlag Berlin (1996); D. Wells, W. Lindlohr, B. Schaffrin und E. Grafarend, *University of New Brunswick, Surveying Engineering, Technical Report* **116**, Fredericton/Canada (1987).  
 [2] G. Joos und E. Grafarend in: K. Linkwitz und U. Hangleiter (Hrsg.), *High Precision Navigation*, S. 19, Dümmler Bonn, (1992).  
 [3] V. S. Schwarze, *Deutsche Geodätische Kommission Reihe C* **449** (1995).  
 [4] A. J. van Dierendonck, S. S. Russell, E. R. Kopitzke und M. Birnbaum in: P. M. Janiczek (Hrsg.), *Global Positioning System* **1**, 55, Washington DC (1980).  
 [5] V. S. Schwarze, T. Hartmann, M. Leins und M. H. Soffel, *manuscripta geodaetica* **18**, 306, (1993).  
 [6] B. Bertotti, I. Ciufolini und P. L. Bender, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1062 (1987).

**Die Autoren**

**Erik W. Grafarend**, Physiker und Ingenieur, promovierte 1966 an der TU Clausthal-Zellerfeld über „schweregefesselte Kreisel als Richtungssensoren“. 1970 habilitierte sich Grafarend an der Uni Bonn. Heute ist die Satellitengeodäsie sein Fachgebiet. Nach Professuren in Bonn, Uppsala und Stockholm sowie mehreren Stationen in Nordamerika ist der fünffache Ehrendoktor jetzt Direktor des Geodätischen Instituts der Uni Stuttgart.



**Volker Schwarze** beschäftigt sich seit mehr als 15 Jahren mit der Satellitengeodäsie, insbesondere mit GPS. Seit einem Jahr betreibt er ein Vermessungsbüro mit mehreren Angestellten. Neben traditionellen Messmethoden der Geodäsie wie Nivellier und Tachymeter setzt er zunehmend GPS ein. Privat allerdings verlässt sich der ausgebildete Geodät, begeisterte Tennisspieler und Radfahrer auf seine berufsbedingten Kenntnisse des Kartenlesens und seinen Orientierungssinn.