

Hochpräzision im Kochtopf

Neues zur turbulenten Wärmekonvektion

Günter Ahlers, Siegfried Großmann und Detlef Lohse

Hundert Jahre nach Henry Bénards ersten Untersuchungen zum Wärmetransport in einem „Kochtopf“ ist das konzeptionell einfache System eines Fluids, das sich zwischen zwei unterschiedlich warmen Platten befindet, noch immer für Überraschungen und neue Erkenntnisse gut. Durch hochpräzise Messungen einerseits sowie Vorhersagen für experimentell zuvor unzugängliche Parameterbereiche andererseits haben sich Experiment und Theorie in den vergangenen Jahren wechselseitig herausgefordert und befruchtet – mit dem Ergebnis, dass heute eine vereinheitlichte Theorie der turbulenten Wärmekonvektion existiert. Wie diese Theorie zeigt, ist die in der Turbulenzphysik praktisch überall angenommene Gültigkeit von Potenzgesetzen keineswegs so universell wie bisher geglaubt.

Ein volles Jahrhundert ist es her, als ein 26 Jahre junger Physiker im Jahre 1900 in Paris seine Dissertation einreichte, *Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide*. Sein Name: Henri Bénard (1874–1939), später Professor in Paris. Er hatte den Wärmetransport durch eine 0,81 mm dicke Schicht aus Walrat-Fett (Spermaceti) untersucht, die von unten durch siedendes Wasser erwärmt wurde. Bei 46 °C schmolz die kreisförmige Schicht von 20 cm Durchmesser. Durch den Temperaturunterschied von 80 K zwischen der unteren Platte (über siedendem Wasser von 100 °C) und der oben freien Fettgrenze (unter Luft von 20 °C) setzte Strömung ein – eine alltägliche Küchenerfahrung. Wie Abbildung 1 zeigt, bildeten die auf- und absteigenden Strömungen ein schönes Muster aus aneinandergereihten Sechsecken, deren Entdeckung Bénards bleibendes wissenschaftliches Verdienst ist (weiteres siehe [1]).

Einige Jahre später, mitten im 1. Weltkrieg, 1916, veröffentlichte der 74-jährige Lord Rayleigh (John William Strutt, 1842–1919), bereits seit 1904 Nobelpreisträger, Professor und damals Kanzler der Cambridge University, unter Hinweis auf *the interesting results obtained by Bénard* seine Erklärung der Musterbildung beim konvektiven Wärmetransport, *On convective currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side*. Er, der die Stabilitätstheorie in seiner brillanten Karriere wesentlich mitentwickelt hatte, erkannte auch hier die Insta-

bilität der zunächst ruhenden Schicht gegenüber dem Einsetzen von Strömung in der Schicht. Die das Muster charakterisierende Wellenlänge deutete er als die Wellenlänge der zuerst instabil werdenden Fourier-Mode (siehe [1]). Rayleigh hatte auch die freie Oberfläche von Bénards Experiment durch eine feste ersetzt. Aus den Sechseckmustern werden dadurch horizontale, schlauchartige Strömungs-„Rollen“, nunmehr allein von der Schwerkraft getrieben, ohne Mitwirkung der Oberflächenspannung.

Das Rayleigh-Bénard-Experiment (RB) beschäftigt uns seitdem immer wieder. (Die Grundbegriffe sind in den Infokästen auf Seite 32 und Seite 33 zusammengestellt und erläutert.) Das RB-Experiment wurde zu *dem* hydrodynamischen Mustereperiment, das Taufpate vieler Durchbrüche wurde. So beschäftigten sich zum Beispiel Anfang der 60er Jahre die Meteorologen Barry Saltzman und Edward Lorenz mit der Modenanalyse des RB-Experimentes, stellt doch evidenterweise die im Vergleich zur Erdgröße dünne Atmosphäre über dem durch die Sonne erwärmten Erdboden unten und der kalten Stratosphäre oben ein RB-System par excellence dar. Die numerische Lösung der nichtlinearen Gleichungen für die Modenamplituden führte 1963 zur Entdeckung der chaotischen, dissipativen Dynamik in der Hydrodynamik: statistisches, unvorhersagbares Verhalten, seltsame Attraktoren mit fraktaler Dimension, empfindliche Abhängigkeit von den Anfangswerten u. a. [2]. RB-Konvektion war auch *das* Mustersystem beim weiteren Durchbruch der Nichtlinearen Dynamik, zeigte es doch 1974 beispielhaft und zum ersten Mal ein chaotisches Verhalten, gemessen am unregelmäßigen Schwanken des Wärmestroms, in einem hydrodynamischen System (Abb. 2), heute selbstverständlich, damals erstmal ungläubig in der Schublade versteckt. Auch wurde an diesem System erstmalig experimentell der Weg zum Chaos durch Periodenverdopplung untersucht (Maurer und Libchaber, 1979),

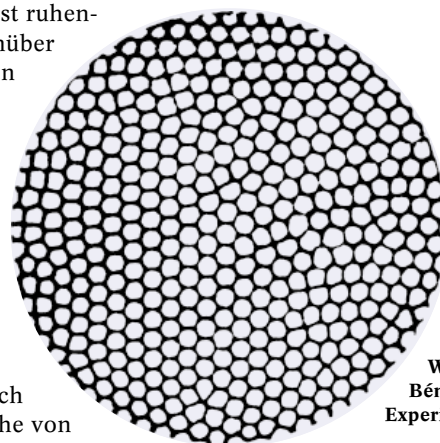


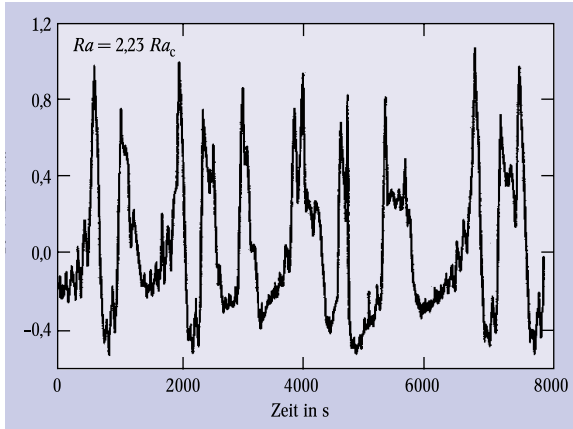
Abb. 1: Musterbildung bei Wärmekonvektion in Bénards historischem Experiment, aus [1].

Prof. Dr. Günter Ahlers, Dept. of Physics, University of California, Santa Barbara, California 93106, USA, E-Mail: guenter@physics.ucsb.edu;
Prof. Dr. Siegfried Großmann, Fachbereich Physik der Philipps-Universität, Renthof 6, 35032 Marburg (Lahn), E-Mail: grossmann@physik.uni-marburg.de;
Prof. Dr. Detlef Lohse, Dept. of Applied Physics and J. M. Burgers Centre for Fluid Dynamics, University of Twente, 7500 AE Enschede, Niederlande, E-Mail: lohse@tn.utwente.nl

ein Phänomen, das man bei Scherströmungen durch Rohre, Windkanäle u. ä. vergeblich gesucht hätte.

Wie verhält sich nun die Strömung, wenn man den thermischen Antrieb, also Ra , und damit die Konvektion mehr und mehr erhöht? Die laminaren, schön regelmäßigen Muster beginnen zunächst periodisch in Zeit und Raum zu schwanken. Dann werden sie chaotisch (Abb. 2) und schließlich wird die Strömung turbulent. Nie aber, so jedenfalls glauben wir den Experi-

Abb. 2: Zeitlich chaotisches Schwanken der beim Konvektionsexperiment pro Zeit effektiv von unten nach oben transportierten Wärmemenge. Messgröße ist der Wärmestrom, genauer dessen jeweilige relative Abweichung ΔNu von seinem zeitlichen Mittelwert Nu . Als Temperaturunterschied $\Delta \propto Ra$ wurde das 2,23fache desjenigen eingestellt, bei dem die Konvektion einsetzt, A_c aus [3].



menten entnehmen zu können, vergisst sie ihre ursprüngliche Rollenstruktur: Ans andere Ufer – also von der unteren, heißen Platte zur oberen, kühlen Platte – kommt die Wärme mittels turbulentem Wärmetransport durchs Innere sowie durch eine mittlere Strömung, den „Wind“. Dieser steigt als großer, rollenförmiger Wirbel an einem Rand auf, bläst unter dem Deckel entlang zur anderen Seite, steigt am anderen Rand wieder herab und schließt über die Bodenplatte wehend den Kreislauf. Auch lösen sich aus den zunächst noch laminaren Randschichten immer wieder,

unregelmäßig, kleine Flüssigkeitströpfchen – so genannte *plumes* – ab, warme steigen auf, kalte fallen herunter: eine brodelnde Suppe (Abb. 4 und 5). Was kann man darüber aussagen?

Die hier zu berichtenden Neuigkeiten betreffen einmal die außerordentlichen experimentellen Fortschritte in der Genauigkeit, mit der die äußeren Bedingungen kontrolliert werden und mit der gemessen wird, so dann die heute erreichbaren riesigen Rayleigh- und Reynolds-Zahlen, die atmosphärischen Stürmen entsprechen können, sowie schließlich die Abhängigkeit der Konvektion von den molekularen Eigenschaften der Flüssigkeit. Aber auch auf immer noch ungeklärte experimentelle Widersprüche ist hinzuweisen. Die Theorie kann den Wärmestrom und die Windstärke in dem derzeit experimentell überdeckten großen Bereich der Parameter Ra und Pr erstaunlich gut beschreiben. Das physikalische Geheimnis dahinter ist, dass man nach globalen, mittleren Eigenschaften des Wärmetransports fragt – und diese Fragen offenbar aus der Kenntnis ebenso globaler Eigenschaften turbulenter Strömungen beantworten kann.

Die Physik der Wärmekonvektion

Wie entsteht nun thermische Konvektion? Betrachten wir ein kleines Flüssigkeitselement der Ausdehnung ℓ , das zufällig etwas wärmer als seine Umgebung ist. Sein Temperaturkontrast δT zur umgebenden Flüssigkeit verringert seine Dichte ρ um $\delta \rho$ und erzeugt so eine Auftriebskraft $ag\delta T$ (pro Masse $\rho\ell^3$). Die Geschwindigkeit δu der einsetzenden Bewegung darf nicht zu groß sein, damit die Reibungskraft pro Masse, $\nu\delta u/\ell^2$, die Auftriebskraft nicht übertrifft und den Aufstieg verhindert.

Lässt sich das Fluidelement andererseits zu viel Zeit, verliert es seinen Temperaturkontrast δT zur Umgebung wegen des Wärmeverlustes infolge der thermischen Leitfähigkeit κ mit der Rate $\kappa\delta T/\ell^2$. Es kann den Temperaturkontrast wieder vergrößern, wenn es durch die Aufwärtsbewegung schnell genug wieder in kältere Umgebung gelangt. Die Temperatur ändert sich beim Aufsteigen um δx pro Zeit δt mit der Rate $\delta x/\delta t \cdot \Delta/L = \delta u\Delta/L$. Um das zu nutzen, muss das Fluidelement nur schnell genug steigen. Konvektion kommt also zustande, wenn zwei Bedingungen für die Auftriebsgeschwindigkeit gleichzeitig erfüllt sind: ausreichendes Wettmachen der Wärmeleitungsverluste durch Bewegung in kältere Umgebung sowie nicht zu viel Bremsung durch Reibung. Das ergibt folgende zwei Ungleichungen:

$$\frac{L}{\Delta} \frac{\kappa}{\ell^2} \delta T < \delta u < \frac{\ell^2}{\nu} ag\delta T. \quad (1)$$

Damit ein solches δu -Fenster offensteht, muss die rechte Seite größer als die linke sein. Das ist der Fall, sogar unabhängig vom zufälligen Temperaturkontrast δT , wenn

$$\frac{\alpha g L^3 \Delta}{\nu \kappa} \equiv Ra \geq \left(\frac{L}{\ell}\right)^4. \quad (2)$$

In einem gegebenen Experiment (also α , g , L , ν und κ gewählt) erfolgt der Einsatz der Konvektion gemäß (2) zuerst, also bei umso kleinerem Temperaturunterschied Δ , je größer das gedachte Tröpfchen mit dem zufälligen Temperaturkontrast ist. Offenbar darf seine Ausdehnung ℓ aber zu groß auch wieder nicht sein, sonst wäre es zwischen Wänden und Deckplatten fest eingeklemmt und unbeweglich. Experiment und Theorie lie-

Die dimensionslosen Kennzahlen des Rayleigh-Bénard-Systems

Das Rayleigh-Bénard-Experiment wird durch folgende physikalische Parameter beschrieben: die Höhe L der im allgemeinen zylindrischen Zelle, ihr Durchmesser d , die Temperaturdifferenz Δ zwischen der warmen unteren und der kalten oberen Platte, die Erdbeschleunigung g , sowie die (schwach temperaturabhängigen) Materialgrößen des Fluids, also seine kinematische Viskosität ν (für Luft etwa $15 \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1}$, für Wasser $1 \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1}$), seine thermische Diffusivität κ (für Wasser etwa $1/7 \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1}$) und sein thermischer Ausdehnungskoeffizient α (für Wasser $2,07 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$). Letzterer beschreibt, wie sich die Dichte und somit der Auftrieb mit der Temperatur ändern, $\rho(T) = \rho(T_0)[1 - \alpha \cdot (T - T_0)]$.

Die Dimensionsanalyse dieser Größen zeigt, dass sie sich in drei dimensionslose Zahlen zusammenfassen lassen: den dimensionslosen Temperaturunterschied, Antrieb für die thermische Konvektion, genannt die **Rayleigh-Zahl**

$$Ra = \frac{\alpha g L^3 \Delta}{\nu \kappa},$$

die **Prandtl-Zahl**

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa},$$

die eine reine Materialgröße ist, und die dimensionslose Schichtbreite, das so genannte Geometrieverhältnis oder **aspect ratio** $\Gamma = d/L$.

Das System „antwortet“ auf das Temperaturgefälle Δ/L mit einem (mittleren) Wärmestrom J von unten nach oben und mit einer rollenförmig angeordneten Konvektionsströmung, genannt „Wind“, dessen (mittlere) Strömungsgeschwindigkeit U sei. Im Inneren der Rolle ist die Strömung bei starkem Wind U turbulent. Der mit dem molekularen Wärmestrom dimensionslos gemachte Wärmestrom J heißt **Nusselt-Zahl**

$$Nu = \frac{J}{\kappa \Delta L^{-1}}.$$

Der Wind U wird mit der molekularen Geschwindigkeit ν/L dimensionslos gemacht und heißt **Reynolds-Zahl**

$$Re = \frac{UL}{\nu}.$$

Die zentrale Frage lautet nun: Wie hängen Nu und Re von den Kontrollparametern ab, also $Nu(Ra, Pr, \Gamma)$ und $Re(Ra, Pr, \Gamma)$?

fern bei fest berandeten Flüssigkeitsschichten als größtmögliches konvektionsfähiges Fluidelement eines mit $\ell_c = L/6,429$. Es bedarf deshalb mindestens eines Temperaturunterschieds Δ_c bzw. einer Rayleigh-Zahl $Ra_c = agL^3 \Delta_c / \nu \kappa$ von $Ra_c = (L/\ell_c)^4 = 1708$, damit die Konvektion einsetzen kann. Für kleinere Ra verhindern die Viskosität und die Wärmeleitfähigkeit den Aufstieg, für $Ra > Ra_c$ dagegen verursacht der Auftrieb den Einsatz der Wärmekonvektion. Das Argument erklärt auch, warum die Rayleigh-Zahl der für den Antrieb der Wärmekonvektion relevante dimensionslose Kontrollparameter ist.

Kommt an einer Stelle im Fluid ein Auftrieb zustande, so muss wegen der Inkompressibilität woanders kalte Flüssigkeit wieder herunter, um Platz zu machen. So entsteht eine geordnete, rollenartige Strömung, der Wärme-Wind. Nach den bisherigen experimentellen Erfahrungen weht er auch bei den größten bisher erreichten $Ra \approx 10^{17}$. Schon ab etwa 10^8 ist er stark genug, dass im Inneren des Gefäßes Turbulenz herrscht.

Wie verhält sich die Nusselt-Zahl als Funktion von Ra und Pr ?

Durch den Wind und die *plumes* ist der Wärmestrom J natürlich deutlich größer als der rein molekulare Wärmestrom $\kappa \Delta / L$, die Nusselt-Zahl also größer als 1. Am Einsatzpunkt der Konvektion kann man Nu noch numerisch aus den zugrundeliegenden hydrodynamischen Gleichungen ausrechnen. Aber spätestens ab $Ra = 10^8$ geht das nicht mehr so leicht, da die Strömung zu turbulent wird. Immerhin gibt es Abschätzungen mathematisch strenger oberer Schranken durch Howard (1963), verbessert durch Busse (1969) [5]

$$Nu - 1 \leq \sqrt{Ra/1035} \quad (3)$$

Diese Schranke liegt allerdings weit über den experi-

mentellen Messwerten und löst das Pr -Verhalten von Nu gar nicht auf.

Theoretisch erwartet man für große Ra zunächst – und meint es auch zu beobachten – wegen des hochgradig nichtlinearen Charakters der turbulenten Wärmekonvektion *potenzartige* Abhängigkeiten

$$Nu = Nu(Ra, Pr) \sim Ra^\beta Pr^\delta; \quad (4)$$

analog für $Re = Re(Ra, Pr)$, mit Exponenten β_U und β'_U . Potenzgesetze und damit Selbstähnlichkeit, „Skaleninvarianz“, sind die Signatur nichtlinearer Systeme, im Unterschied zu den exponentiellen Abhängigkeiten der linearen Physik, siehe z. B. [6].

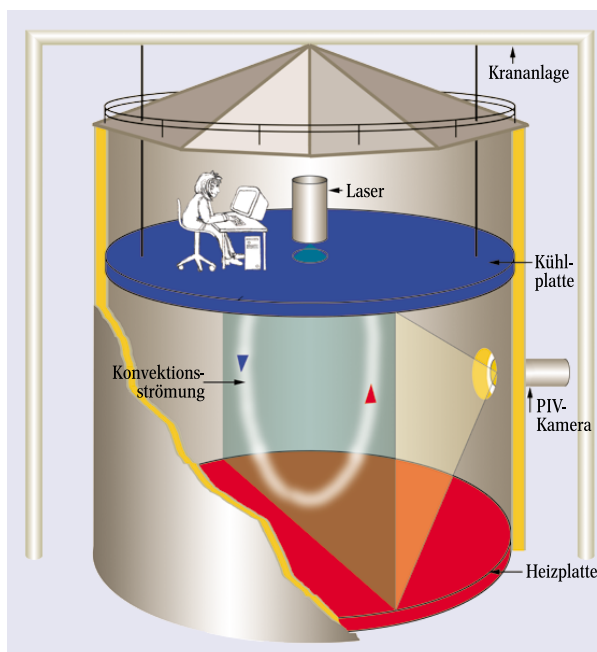


Abb. 3: Entwurfszeichnung für das außen 8 m hohe „Ilmenauer Fass“. Die effektive Höhe L für die Rayleigh-Bénard-Strömung ist variabel und wird maximal 6,6 m betragen (www.ilmenauer-fass.de).

Welche Werte der Kontrollparameter können erreicht werden?

Rayleigh-Zahlen: Jedem vertraut ist das Beispiel eines auf dem Herd erhitzten, mit Wasser gefüllten Kochtopfs. Nehmen wir an, er sei $L = 10$ cm hoch gefüllt und die Temperaturdifferenz zwischen der Herdplatte und der Luft darüber betrage $\Delta = 200$ K. Mit typischen Werten für die Materialgrößen (siehe oben) bekommt man eine Rayleigh-Zahl von 3×10^9 . Im kontrollierten Rayleigh-Bénard-Experiment wählt man die Temperaturdifferenz Δ kleiner, damit man die Temperaturabhängigkeit der Materialgrößen vernachlässigen kann. Auch begrenzt man die Flüssigkeit oben wie unten durch Metallplatten, um flächenhaft konstante Temperaturen zu gewährleisten. Die Abschätzung beim Kochtopf vermittelt eine Vorstellung, welche Ra man ohne weitere Tricks erreichen kann.

$Ra = 10^9$ mag zunächst groß erscheinen, ist jedoch

wenig im Vergleich zu den in der Atmosphäre auftretenden Rayleigh-Zahlen von bis zu 10^{20} oder von noch größeren in astronomischen Fragestellungen. Daher möchte man auch im Labor große Ra erreichen. Ein Weg dazu ist, die Höhe L der RB-Zelle zu vergrößern. In der Gruppe von André Thess an der TU in Ilmenau bereitet man zur Zeit Experimente an einer RB-„Zelle“ mit einer Strömungshöhe von ungefähr $L = 6,6$ m vor (Abb. 3).

Einen anderen Weg beschritten schon Mitte der 70er Jahre Ahlers und Threlfall. Sie verkleinerten die kinematische Viskosität und die thermische Diffusivität durch Erhöhung des Drucks. Ideal dafür ist Helium nahe an seinem kritischen Punkt, der bei sehr tiefen Temperaturen, bei etwa 5 K liegt. Dort hat man ν und κ etwa 20mal kleiner als unter normalen Bedingungen in Helium oder Luft. Libchaber und

Mitarbeiter [4] erreichten mit diesem Trick Ende der 80er Jahre erstmals Rayleigh-Zahlen bis zu 10^{14} und damit Nusselt-Zahlen bis zu 10^3 und Reynolds-Zahlen bis 10^6 , wie im Windkanal.

Prandtl-Zahlen: Die Prandtl-Zahl $Pr = \nu/\kappa$ beschreibt, ob der molekulare Impuls- oder der molekulare Wärmetransport des Fluids der schnellere ist. Wasser hat $Pr = 7$, der Wärmetransport ist der langsamere. Bei (fast) idealen Gasen ist $\nu \approx \kappa$, also $Pr \approx 1$, weil Impuls- und Wärmetransport dem gleichen Mechanismus folgen. Die Wechselwirkung der Moleküle des Fluids kann aber ν und κ sehr verschieden voneinander machen, sodass Pr sehr klein (z. B. 0,005 bei flüssigem Natrium) oder sehr groß (z. B. 7250 bei Glycerin) sein kann. Seit kurzem gibt es auch experimentelle Nusselt-Zahl-Messungen für diese sehr kleinen oder sehr

großen Prandtl-Zahlen. Eine Prandtl-Zahl von praktisch unendlich ($Pr \approx 10^{21}$) wird im Erdmantel erreicht. Der Grund dafür liegt in der hohen Viskosität des Magmas. Dementsprechend sind dort die Rayleigh-Zahlen auch nicht besonders groß, nämlich „nur“ 10^6 – 10^7 .

Aspect ratio: Im ursprünglichen Experiment von Bénard betrug das Geometrieverhältnis, *aspect ratio*, $\Gamma = d/L = 247$, war somit praktisch unendlich. Bei kleinen Ra sind solche großen Γ ohne weiteres realisierbar. Das wird aber bei den interessierenden großen Ra zunehmend schwieriger, weil das Fluidvolumen zu groß würde. Daher experimentiert man bei turbulenter Konvektion meistens mit Γ von der Größenordnung 1. Die Abhängigkeit von Nu und Re von Γ ist erst wenig erforscht, und wir werden sie hier nicht weiter betrachten.

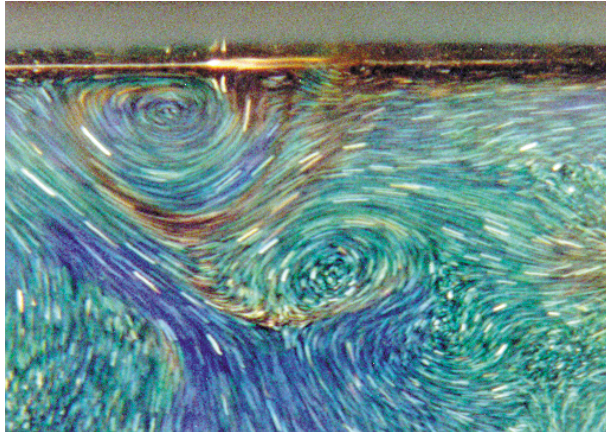


Abb. 4: Um die turbulente Strömung in einer Rayleigh-Bénard-Zelle (RB) zu visualisieren, wurden Flüssigkristalle zugesetzt, die je nach Temperatur eine andere Farbe zeigen. Man sieht deutlich, wie sich kalte *plumes* (rot) aus der oberen, kalten Grenzschicht ablösen. Gezeigt wird nur ein kleiner Teil der RB-Zelle, dicht bei der oberen Platte, entlang der der Wind von rechts nach links bläst. Das Bild wurde von Yibing Du und Penger Tong (Oklahoma) aufgenommen (<http://physics.okstate.edu/tong/homepage.html>).

„Handwaving arguments“, um diese Exponenten zu bestimmen, führen schnell zu Widersprüchen mit den experimentellen Befunden: Stellt man sich z. B. vor, dass der Wärmestrom $J = Nu \cdot \kappa \Delta L^{-1} = (\alpha g L^3 \Delta / \nu \kappa)^\beta \cdot (\nu / \kappa)^\beta \cdot \kappa \Delta L^{-1}$ wegen der stark brodelnden Turbulenz, also einem praktisch momentanen Transport, doch eigentlich von der Höhe L unabhängig sein sollte, erhält man sofort $\beta = 1/3$, ohne β' festlegen zu müssen (Malikus 1954, Spiegel 1962, Howard 1964). Das ist aber nicht immer so, sagt das Experiment, d. h. die konvektive Wärmeleitung „weiß“ dann offenbar doch, wie dick die Flüssigkeitsschicht ist. – Plausibel erscheint auch die Überlegung, dass bei sehr starker Turbulenz der Wärmestrom J von den molekularen Eigenschaften

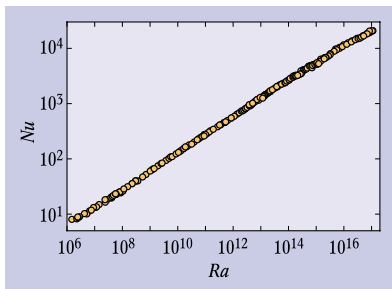


Abb. 6: Die Nusselt-Zahl Nu in Helium als Funktion der Rayleigh-Zahl Ra in dem ungewöhnlich breiten Bereich $10^6 < Ra < 10^{17}$. Die Daten, von [11], sind logarithmisch aufgetragen. Sie scheinen gut auf einer Geraden zu liegen, ein Potenzgesetz scheint also eine gute Näherung über viele Dekaden der Rayleigh-Zahl Ra zu sein. Die Steigung (der Exponent) ist $\beta = 0,31$.

gar nichts mehr merken, also unabhängig von ν und κ sein sollte. Aus obiger Formel für J folgt dann sofort $\beta = \beta' = 1/2$, was 1962 von Kraichnan als Skalensexponenten bei sehr starker Turbulenz vorgeschlagen wurde. Wieder sagt das Experiment: Ist in der Regel aber nicht so. Trotz starker Turbulenz spürt der Wärmetransport eben doch die Zähigkeit ν und die thermische Leitfähigkeit κ . Ursache dafür müssen die Randschichten sein, in denen dissipative Prozesse immer eine Rolle spielen.

Die experimentelle Situation ist kompliziert und widersprüchlich: Schon Anfang der 70er Jahre ergaben sich signifikante Abweichungen von der ursprünglichen Vorhersage $\beta = 1/3$. Der Exponent lag bei 0,28. Nach den ersten Messungen mit Helium (Threlfall 1975), die bei $L = 2$ cm bis $Ra = 2 \times 10^9$ reichten, folgten dann – allerdings erst mehr als zehn Jahre später – die inzwi-

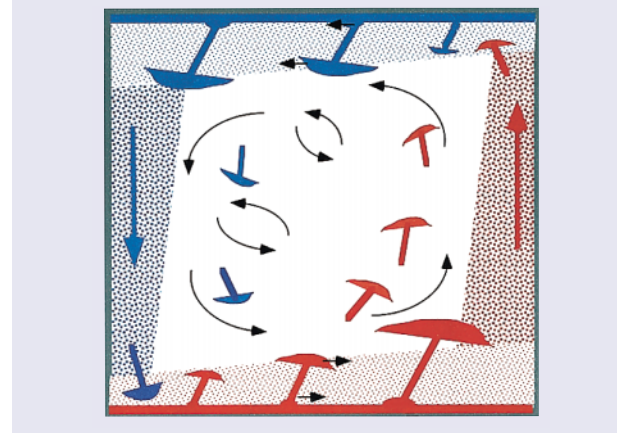


Abb. 5: Illustration der thermischen Konvektion. In den roten Bereichen ist das Fluid wärmer, in den blauen kälter. Man erkennt die warmen und kalten *plumes*, die sich von den Randschichten unten (rot) und oben (blau) ablösen und die Turbulenz antreiben. Die seitlichen Pfeile geben die Strömungsrichtung des Windes an. Die vier keilförmigen Bereiche heißen Mischzone. Man vergleiche diese Skizze mit der direkten Visualisierung in Abb. 4. (Skizze von Leo Kadanoff, Physics Today, August 2001, S. 34).

schen berühmten Experimente der Libchaber-Gruppe in Chicago [4], ebenfalls mit Helium. Für $Ra > 10^8$ ergab der Datenfit wiederum ein Potenzgesetz, und wieder mit $\beta \approx 0,28$. Um die Messergebnisse zu interpretieren, wurde eine neue theoretische Vorstellung entwickelt [4], die die *plumes* berücksichtigte, die aus den laminaren Randschichten herauskommen. Dieses Modell gab $\beta = 2/7 \approx 0,286$, in guter Übereinstimmung mit den Messungen. Auch eine von Shraiman und Siggia 1990 veröffentlichte Theorie, die von turbulenten Randschichten in der Rayleigh-Bénard-Zelle ausging, konnte den gemessenen Exponenten von etwa $2/7$ erklären. Eine Zeit lang sah es so aus, als ob das Problem des Wärmestroms in der turbulenten RB-Konvektion damit gelöst wäre.

Die Situation änderte sich drastisch, als Ciliberto und Mitarbeiter [7] bei Konvektionsexperimenten mit Quecksilber mit einer Prandtl-Zahl von nur $Pr = 0,025$ eine deutlich andere Pr -Abhängigkeit der Nusselt-Zahl fanden, als alle Theorien bis dahin vorausgesagt hatten. Im selben Jahr 1997 beobachteten andererseits Castaing und Mitarbeiter in Grenoble [8], dass in ihren Experimenten, wieder mit Helium, ab etwa $Ra = 10^{11}$ die Nusselt-Zahl sehr viel stärker als mit $2/7$ ansteigt, nämlich mit einem Exponenten nahe $1/2$. Diese Arbeiten läuteten eine neue Phase in der Erforschung der Wärmekonvektion ein. Sie stießen die Entwicklung einer neuen Theorie [9, 10] und weitere, sehr viel präzisere Messungen sowie Experimente über noch größere Parameterbereiche an.

In den letzten Jahren wurde an der Universität von Oregon die bisher größte Tieftemperatur-Konvektionszelle aufgebaut, mit Helium als Fluid [11]. Sie hatte nun eine Höhe von einem Meter! Da die Rayleigh-Zahl proportional zu L^3 ist, war es möglich, mit dieser Apparatur bis zu $Ra \approx 10^{17}$ zu messen. Wie so oft, wenn ein neuer Parameterbereich erforscht wird, gab es auch hier eine Überraschung. Die neuen Daten ergaben den effektiven Exponenten $\beta = 0,31$ (Abb. 6). Jüngst ist außerdem klar geworden, dass für hochpräzise Messungen auch die Wärmeverluste in den Seitenwänden berücksichtigt werden müssen [12]. Mit dieser Korrektur ist der Exponent sogar $\beta = 0,32$, also erheblich

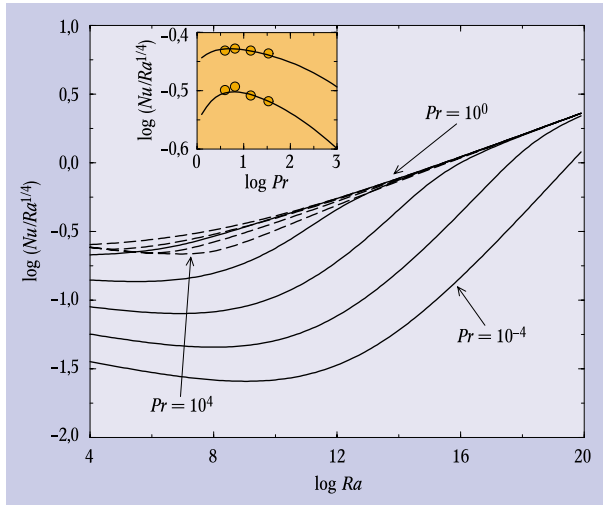


Abb. 8: Die Nusselt-Zahl Nu als Funktion der Rayleigh-Zahl Ra für feste Prandtl-Zahlen $Pr = 10^{-4}, \dots, Pr = 10^0$ (durchgezogene Linien) und für $Pr = 10^1, \dots, Pr = 10^4$ (gestrichelte Linien). Die eingesetzte kleine Abbildung zeigt, wie gut die Daten aus [13, 12] innerhalb der Theorie gefittet werden können; es ist $Ra = 5,62 \times 10^7$ und $Ra = 1,78 \times 10^9$ für die untere bzw. obere Kurve. Da sich Nu in dem riesigen Bereich von 16 Größenordnungen sehr stark verändert, von etwa 1 bis 3000, haben wir $Nu/Ra^{1/4}$ aufgetragen, was sich nur noch um etwa einen Faktor 10 ändert. Der Nutzen solcher *reduzierten* Größen wird noch diskutiert.

haupt. In der Turbulenzphysik werden ja Potenzgesetze praktisch überall vermutet oder angenommen. Wenn man sich nicht mehr auf ihre allgemeine Gültigkeit verlassen kann, wird das vielseitigen Einfluss auch auf andere Aspekte des Turbulenzproblems haben. Nach der Theorie [9, 10] sind die durch Auswerten der Experimente mit einem Potenzansatz gefundenen Werte von β nur *effektive* Exponenten, deren Wert vom Ra -Bereich abhängt, den man beschreiben will. In logarithmischer Auftragung ist diese Abhängigkeit allerdings recht schwach, sodass sie in den früheren Messungen gar nicht erkannt worden war.

Potenzgesetz oder nicht?

Im Rahmen ihrer Genauigkeit waren die Oregon-Daten [11], siehe Abb. 6, sowohl mit einem Potenzgesetz als auch mit der im vorigen Abschnitt skizzierten Theorie verträglich, sogar auf linearer, nicht-logarithmischer Skala. Sollte es möglich sein, die Messgenauigkeit soweit zu steigern, dass zwischen einem reinen Potenzgesetz und der Theorie der Referenzen [9, 10] für $Nu(Ra, Pr)$ zu unterscheiden wäre?

Die Antwort wurde von der Santa Barbara-Gruppe gegeben, und sie heißt „ja“. Die Messungen der Nusselt-Zahl wurden mit verschiedenen organischen Fluiden, z. B. Azeton, durchgeführt. Das erlaubte es, Wärmekonvektion bei unterschiedlichen Prandtl-Zahlen zu untersuchen. In einer Zelle mit $L \approx 17$ cm Höhe konnten Rayleigh-Zahlen bis zu 10^{11} erreicht werden [13]. Nach den Oregon-Experimenten bis $Ra \approx 10^{17}$ ist

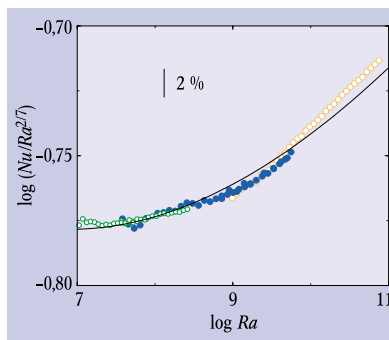


Abb. 9: Die reduzierte Nusselt-Zahl $Nu/Ra^{2/7}$ als Funktion der Rayleigh-Zahl Ra , logarithmisch aufgetragen (aus [13]). Zur Reduktion eignet sich jede Ra -Potenz, die nicht zu weit vom tatsächlichen Verlauf $Nu(Ra)$ entfernt ist; den Exponenten $2/7$ wählen wir aus historischem Sentiment. Von rechts nach links beziehen sich die Datensätze auf $\Gamma = 0,5; 1,0$ und $3,0$. Sie sind senkrecht schwach gegeneinander verschoben, um die Γ -Abhängigkeit zu kompensieren. (Eigentlich müsste man die vier Fitparameter der Theorie an Datensätze mit anderem $\Gamma \neq 1$ neu anpassen.) Die durchgezogene Kurve entspricht der Großmann-Lohse-Theorie aus [10].

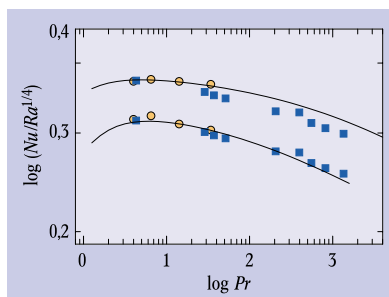


Abb. 10: Reduzierte Nusselt-Zahlen $Nu/Ra^{1/4}$ als Funktion der Prandtl-Zahl Pr bei $Ra = 5,62 \times 10^7$ (untere Kurve) und $Ra = 1,78 \times 10^9$ (obere Kurve). Offene Kreise: von [12]. Ausgefüllte Quadrate: ganz neue Daten der Hongkong-Gruppe (Xia et al.), gemessen an Schichten organischer Fluide mit Prandtl-Zahlen aus einem sehr großen Bereich. Die beiden durchgezogenen Kurven sind die Voraussagen der Theorie [10].

das scheinbar nicht sehr beeindruckend. Aber die Santa Barbara-Messungen waren um etwa eine Größenordnung genauer als alle vorhergehenden – eine Frucht langer Erfahrung mit Temperaturmessungen und besonders sorgfältiger Kontrolle aller experimentellen Einzelheiten. Die Streuung der Messwerte konnte bis auf 0,1 % verringert werden, und die systematischen Fehler waren geringer als etwa 1 %. Aus den Messergebnissen wurde überzeugend klar, dass ein einfaches Potenzgesetz die Daten *nicht* innerhalb ihrer Genauigkeit wiedergeben konnte. Weil die logarithmische Auftragung von Nu selbst, wie z. B. in Abb. 6, nicht die nötige Auflösung hat, ist es Stand der Kunst geworden, eine *reduzierte* oder *kompensierte* Auftragung zu machen, etwa von $Nu/Ra^{2/7}$ gegen Ra . Durch geschickte Kompensation von Nu , wie z. B. mittels Teilen durch $Ra^{2/7}$, hat die Ordinate nur noch eine um vielleicht einen Faktor 2 gespreizte Skalenausdehnung – kann also sogar linear sein – statt eines Faktors ≈ 3000 für Nu selbst. Wenn auch hier, trotz Reduktion, wieder logarithmische Achsen verwendet werden, so sollten die Messpunkte auf einer Geraden liegen, sofern ein Potenzgesetz gilt. Und die Steigung der Geraden sollte $\beta - 2/7$ sein, also 0, falls $\beta = 2/7$ ist. In Abb. 9 sind die Santa Barbara-Ergebnisse kompensiert aufgetragen worden. Hier sind zwar die Daten für verschiedene Geometrieverhältnisse Γ ein wenig senkrecht gegeneinander verschoben worden, um die Abhängigkeit vom Verhältnis der Breite zur Höhe des Messvolumens zu berücksichtigen. Man sieht aber sehr deutlich, dass ein Potenzgesetz nicht passt, und dass die lokale Steigung, also der *effektive* β -Wert, von Ra abhängt. Die durchgezogene Linie entspricht der Anpassung der im vorigen Abschnitt beschriebenen Theorie und passt sehr gut.

An den hier beschriebenen Entwicklungen sieht man, dass in der Experimentalphysik auf zweierlei Weisen Fortschritte gemacht werden können. Den Parameterbereich der Messungen zu erweitern, kann Neues bringen; aber auch die Genauigkeit im alten Bereich zu verbessern, kann zu Fortschritten führen.

Nun hätte man wieder einmal zufrieden sein können. Aber es war für Fluide mit Prandtl-Zahlen größer als bei Wasser, d. h. für $Pr > 7$, immer noch recht wenig über die Abhängigkeit der Nusselt-Zahl von der Prandtl-Zahl bekannt. Die älteren Modelle und das Modell aus [9] machten hierzu unterschiedliche Vorhersagen, aber alle führten zu einer schwachen Abnahme von Nu mit steigendem Pr bei konstantem Ra . Die organischen Fluide, die von der Santa Barbara-Gruppe verwendet wurden, gaben nun die Möglichkeit, die Pr -Abhängigkeit von Nu auch für recht große Pr zu untersuchen [12]. Azeton ($Pr=4,0$) und die Alkohole Methanol ($Pr=6,5$), Ethanol ($Pr=14$) und 2-Propanol ($Pr=34$) wurden benutzt. Die Messergebnisse werden in Abb. 10 als offene Kreise gezeigt. Bei Ra von etwa 10^8 bis 10^9 nimmt $Nu(Pr)$ in diesem Pr -Bereich nur um etwa 2 % ab, während auf Grund der Vorhersage von [9] eine Abnahme von etwa 20 % erwartet wurde. Diesmal dauerte es überhaupt nicht lange, bevor die Theoretiker wussten, wo die Ursache für diese Diskrepanz lag: Die Experimente waren für Parameterwerte außerhalb des Gültigkeitsbereichs der Theorie in [9] durchgeführt worden. Aber die Theorie konnte sehr leicht erweitert werden [10], was nun zu einer Abhängigkeit $Nu(Ra,Pr)$ führte, die in großartiger Übereinstimmung mit den Messungen ist. Das sieht man in Abb. 10, wo eine reduzierte Nusselt-Zahl gegen Pr aufgetragen ist.

Die beschriebene Entwicklung ist ein schönes Beispiel dafür, wie eine schnelle Wechselwirkung zwischen Theorie und Experiment zu Fortschritten führen kann. Überraschend ist vielleicht die ganz kurze Zeitspanne dieser Entwicklungen. Sie ist u. a. dadurch zu erklären, dass Experimentalphysiker und Theoretiker am Institute for Theoretical Physics in Santa Barbara in einem sechsmonatigen Programm zusammen kamen und Ideen und Ergebnisse austauschen konnten. Inzwischen ist die Theorie in der Bewährungsphase. Die Messungen von $Nu(Pr)$ z. B. sind erst ganz jüngst von einer Forschergruppe in Hongkong (Xia et al., preprint 2001) bis etwa $Pr \approx 1400$ ausgedehnt worden (Abb. 10). In diesem viel größeren Pr -Bereich nimmt Nu nach dem Maximum um fast 20 % ab. Und auch für so große Prandtl-Zahlen stimmt $Nu(Pr)$ gut mit den theoretischen Erwartungen von [10] überein, obwohl die Theorie sich nur auf Daten bis $Pr=O(10)$ stützt.

Auch ist es schön zu sehen, dass die Physik wirklich international ist und dass dem globalen Austausch von Ideen und Resultaten nichts im Wege steht. So werden sich vielleicht auch weitere Ideen voranbringen lassen, z. B. das 10 m hohe Helium-Fass in Brookhaven, was Großgeräte-Management erfordert, wie wir es aus anderen Gebieten kennen (Beschleuniger, Teleskope, ...).

Schließlich sollte bemerkt werden, dass es auch in einem anderen Parameterbereich interessante Entwicklungen gibt. Die Grenoble-Gruppe um Bernard Castaing hat vor kurzem Messungen veröffentlicht [15], die für $Ra > 10^{12}$ in logarithmischer Genauigkeit ein Potenzgesetz für $Nu(Ra)$ mit $\beta \approx 0,5$ geben. Sie fand somit ein ähnliches Ergebnis wie schon in ihren früheren Messungen aus dem Jahre 1997 [8]. Dieser β -Wert stimmt mit der im Abschnitt „Die Physik der Wärme-konvektion“ skizzierten, vierzig Jahre alten Kraichnan-Voraussage $\beta = 1/2$ für extrem starke RB-Turbulenz, im Volumeninneren wie in den Randschichten, überein. Allerdings gibt es ein gravierendes Problem. Diese Messungen decken sich nicht mit den Oregon-Daten

in einem sehr ähnlichen Ra - und Pr -Bereich. Letztere können ja bis $Ra = 10^{17}$ durch die Theorie [9, 10] unter Beteiligung laminarer Randschichten gedeutet werden. Wir werden also erst in der Zukunft sehen, wie sich dieses Problem löst. Wieder besteht ein Stimulus für neue Einsichten, für weitere interessante Physik.

Literatur

- [1] S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Dover, New York 1981.
- [2] E. N. Lorenz, J. Atmos. Sci. **20**, 130 (1963).
- [3] G. Ahlers, Phys. Rev. Lett. **53**, 1185 (1974).
- [4] B. Castaing, G. Gunaratne, F. Heslot, L. Kadanoff, A. Libchaber, S. Thomae, X. Wu, S. Zaleski und G. Zanetti, J. Fluid Mech. **204**, 1 (1989).
- [5] F. H. Busse, Adv. Appl. Mech. **18**, 77 (1978).
- [6] S. Großmann, Phys. Bl., Juni 1989, S. 172.
- [7] S. Cioni, S. Ciliberto und J. Sommeria, J. Fluid Mech. **335**, 111 (1997).
- [8] X. Chavanne, F. Chilla, B. Castaing, B. Hebral, B. Chabaud und J. Chaussy, Phys. Rev. Lett. **79**, 3648 (1997).
- [9] S. Grossmann und D. Lohse, J. Fluid. Mech. **407**, 27 (2000).
- [10] S. Grossmann und D. Lohse, Phys. Rev. Lett. **86**, 3316 (2001).
- [11] J. Niemela, L. Skrebek, K. R. Sreenivasan und R. Donnelly, Nature **404**, 837 (2000).
- [12] G. Ahlers und X. Xu, Phys. Rev. Lett. **86**, 3320 (2001).
- [13] X. Xu, K. M. S. Bajaj und G. Ahlers, Phys. Rev. Lett. **84**, 4357 (2000).
- [14] R. Verzicco und R. Camussi, J. Fluid Mech. **383**, 55 (1999).
- [15] P. E. Roche, B. Castaing, B. Chabaud und B. Hebral, Phys. Rev. E **63**, 045303 (2001).

Die Autoren

Günter Ahlers genießt den Ruf eines exzellenten Experimentators, dessen außerordentlich sorgfältige und präzise Messungen zur Musterbildung und zum chaotischen Verhalten in Fluiden für die Entwicklung der Nichtlinearen Dynamik wegweisend gewesen sind. Für seine Beiträge zu kritischen Phänomenen und hydrodynamischen Instabilitäten wurde er mit dem Fritz London Award ausgezeichnet.



Siegfried Großmann blickt auf eine brillante 40-jährige Forscherlaufbahn zurück, die bis heute der Statistischen Physik und Nichtlinearen Dynamik gewidmet ist. Auch nach dem „Phasenübergang“ seiner Emeritierung 1998 forscht er weiter und stellt seinen geschätzten Rat zahlreichen Wissenschaftsorganisationen zur Verfügung. Sein hohes wissenschaftliches Ansehen drückt sich in zahlreichen Ehrungen aus: Er erhielt u. a. die Max-Planck-Medaille der DPG sowie das Große Verdienstkreuz des Bundesverdienstordens.

Detlef Lohse arbeitet theoretisch und experimentell an der Universität Twente in Enschede, Niederlande, wo er den Lehrstuhl für Physik der Fluide innehat. Besonders bekannt sind seine mit dem Heinz-Mayer-Leibniz-Preis ausgezeichneten Arbeiten zur Erklärung der Sonolumineszenz. Für seine Präsentationen erhielt er mehrfach Preise der American Physical Society.

