

Globale Eigenschwingungen der Erde

Elastische Schwingungen und Kreiselschwingungen der Erde erlauben Rückschlüsse auf das Erdinnere

Walter Zürn und Rudolf Widmer-Schnidrig

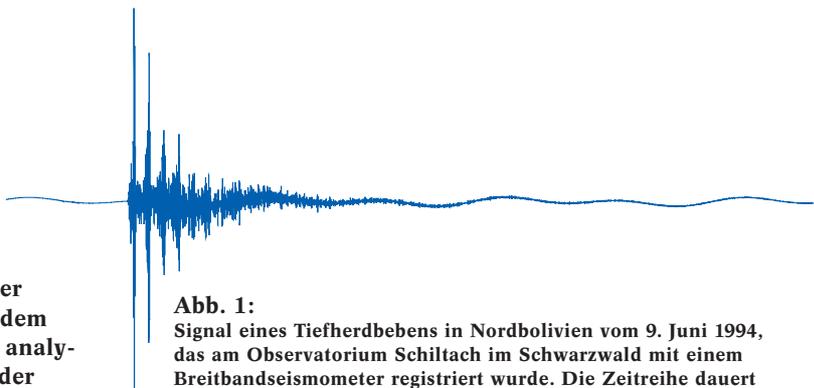


Abb. 1: Signal eines Tiefherdbebens in Nordbolivien vom 9. Juni 1994, das am Observatorium Schiltach im Schwarzwald mit einem Breitbandseismometer registriert wurde. Die Zeitreihe dauert insgesamt 84 Stunden und erreicht eine größte Amplitude von $25 \mu\text{m/s}$ (vertikale Bodengeschwindigkeit). Das auffälligste Signal sind die Rayleigh-Wellenzüge, die im 1,5-Stundenrhythmus aus wechselnden Richtungen auf dem Großkreis mit abnehmender Amplitude an der Station ankommen. Ein voller Umlauf um die Erde dauert etwa drei Stunden. Die schwache 12-Stunden-Schwingung im Hintergrund sind die elektronisch stark abgeschwächten Erdgezeiten.

So wie Geigenbauer die Geheimnisse einer Stradivari zu entschlüsseln versuchen, indem sie ihren Klang, ihre Eigenschwingungen analysieren, erlauben die Eigenschwingungen der Erde als Ganzes Rückschlüsse über das Erdinnere. Erdbeben übernehmen dabei die Rolle des Geigenbogens. Darüber hinaus regen Gezeitenkräfte und die Wechselwirkung mit der Atmosphäre und den Ozeanen die Erde auch zu Kreiselschwingungen an, die weitere Einblicke in das Erdinnere ermöglichen.

Die mechanischen Resonanzen eines Systems lassen sich mit zwei einfachen Methoden auffinden. Zum einen kann man das System aus der Ruhelage auslenken und loslassen; es kehrt dann mit freien, gedämpften Eigenschwingungen zurück. Zum anderen kann man das System harmonisch mit variabler Frequenz anregen und die Eigenschwingungen auf Grund der resonanten Reaktion finden, wobei die Art der Anregung zur Eigenschwingung passen muss. Hat man eine Theorie für diese Schwingungen zur Verfügung, lassen sich aus den Beobachtungen relevante Eigenschaften des Systems ermitteln.

Wird als Beispiel eine frei aufgehängte Stahlkugel kurz mit einem Hammer angeschlagen, so klingt sie danach für einige Zeit: Die Kugel wurde durch den Schlag zu ihren freien elastischen Eigenschwingungen angeregt, deren Verschiebungen an der Oberfläche zur Abstrahlung akustischer Wellen führen. Die zugehörigen Eigenfrequenzen sind charakteristisch für die Kugel und hängen von ihrer Größe, Form, Dichte und Elastizität ab. Ersetzt man die Kugel durch die Erde, den Hammer durch ein starkes Erdbeben und unsere Ohren durch empfindliche Seismometer, so hat man das geophysikalische Analogon des Laborversuchs vor sich. Die Natur führt diesen Versuch häufig durch – leider oft mit katastrophalen Folgen –, und eine Aufgabe der Seismologie ist es, die elastischen Eigenschwingungen der Erde zu detektieren und daraus die typischen Eigenschaften der Erde zu ermitteln. Die Frequenzen liegen dabei zwischen 0,3 und etwa 20 mHz, wobei die obere Grenze nur durch Auswerteverfahren gegeben ist.

Wird ein Spielkreisel in schnelle Rotation versetzt und seine Figurenachse kurz angestoßen, so führt die Achse kreisförmige Oszillationen, die Kreisel-Eigenschwingungen oder sog. freie Nutationen, aus. Deren

Eigenschaften werden durch Trägheitsmomente, Deformierbarkeit usw. bestimmt. Die Natur führt auch diesen Versuch mit der Erde als Kreisel dauernd durch, allerdings sind die Anregungen dabei kontinuierlich und bestehen aus breitbandigen Drehmomenten der Atmosphäre und Ozeane oder den quasiperiodischen Gezeitenkräften von Mond und Sonne.

Neben diesen freien Schwingungen führt die feste Erde eine ganze Reihe von erzwungenen (quasi-)periodischen Schwingungen aus, z. B. die allgemeine Präzession der Erdachse mit einer Periode von 25765 Jahren, die jährliche Polschwankung und die Gezeiten der festen Erde.

Wie wir im Folgenden zunächst an den elastischen, dann an den Kreisel-Eigenschwingungen der Erde sehen werden, ermöglichen es die beobachteten Frequenzen und Gütefaktoren der freien Schwingungen, unsere Kenntnisse über die mechanischen Eigenschaften des Erdinneren zu verbessern. Die Amplituden und Phasen erlauben darüber hinaus Rückschlüsse auf die Anregungsmechanismen.

Elastische Eigenschwingungen

Nach dem extrem starken Erdbeben am 22. Mai 1960 in Chile gelang es zum ersten Mal, Eigenschwingungen (Moden) der Erde mit verschiedenen langperiodischen Seismographen zu beobachten. Am 28. März 1964 regte ein weiteres starkes Beben in Alaska die Schwingungen wieder messbar an. Diese beiden Ereignisse markieren den Beginn einer neuen Forschungsrichtung der Seismologie und öffneten ein neues Fenster ins tiefe Erdinnere: die terrestrische Spektroskopie [1–3]. Die beobachteten Frequenzen vieler Moden lagen gleich sehr dicht bei denen, die für Erdmodelle berechnet wurden, die ihrerseits aus den Laufzeiten seismischer Wellen ermittelt worden waren.

Dr. Walter Zürn und Rudolf Widmer-Schnidrig, Ph.D., Geowissenschaftliches Gemeinschaftsobservatorium der Universitäten Karlsruhe/Stuttgart (BFO), Heubach 206, D-77709 Wolfach
E-mail: walter.zuern@gpi.uni-karlsruhe.de, widmer@geophys.uni-stuttgart.de

1) Diese Nomenklatur unterscheidet sich von derjenigen im Artikel von R. Kind et al. Die Polarisation der Partikelbewegung von S-Moden entspricht einer Kombination von P- und S_v-Wellen (longitudinal polarisierte Kompressions- und vertikal polarisierte Scherwellen), von T-Moden der von S_h-Wellen (horizontal polarisierte Scherwellen)

Seismometer und Gravimeter bestehen aus trägen Massen, die an Federn aufgehängt sind und deren Verschiebungen gegenüber den Gehäusen mit Weg- oder Geschwindigkeitsaufnehmern erfasst und dann elektronisch weiterverarbeitet werden. Sie reagieren auf Trägheitskräfte und Änderungen des Schwerfeldvektors, die mit seismischen Signalen einher gehen. Strainseismometer (auch: Extensometer) messen dagegen die durch elastische Deformation des Gesteins hervorgerufenen Abstandsänderungen zweier Punkte, die zwischen 10⁻² und 10³ m voneinander entfernt sein können.

Erdbebenseismogramme setzen sich aus verschiedenen impulsartigen Signalen der elastischen Kompressions- und Scherwellen zusammen, die durch das Erdinnere als sog. Raumwellen zur Station gelangen, gefolgt von Wellen, die sich an der Oberfläche ausbreiten, vom sog. Love- und Rayleigh-Typ, die wegen ihrer Dispersion zeitlich auseinandergezogene Wellenzüge

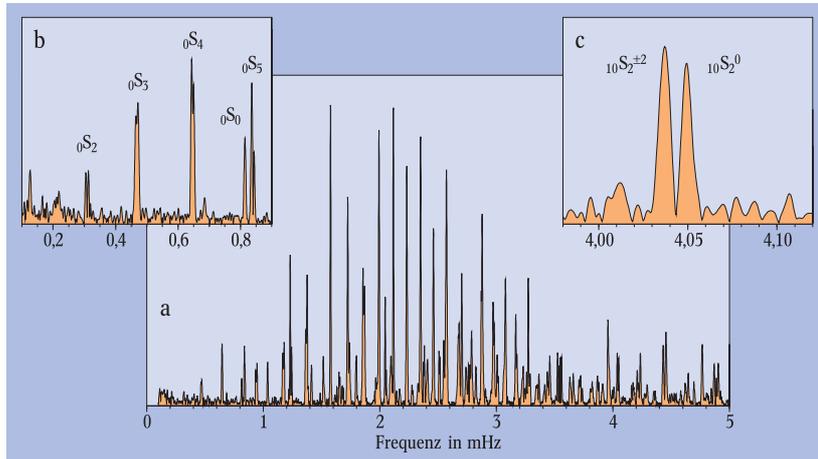


Abb. 2: Amplitudenspektrum einer 75 Stunden langen Gravimeterregistrierung in Schiltach des Bebens in den Kurilen am 4. Oktober 1994. Man erkennt die scharfen Spektrallinien der Erde, wobei die Mode bei 1,58 mHz (${}_0S_0$) die größte spektrale Amplitude hat. Der Amplitudenabfall bei hohen Frequenzen wird dadurch verursacht, dass diese nach drei Tagen bereits stark gedämpft sind. Der Anstieg bei tiefen Frequenzen wird durch die mit

ω^2 zunehmende Trägheitsbeschleunigung erzeugt. Im Detailbild b) erkennt man die durch die Coriolis-Kraft bewirkte Linienaufspaltung bei den drei tiefsten Frequenzen. Im Detailbild c) kann man die anomale Aufspaltung des Multipletts ${}_{10}S_2$ erkennen, die durch Anisotropie im inneren Kern etwa doppelt so groß ist wie sie aufgrund des Äquatorwulstes der rotierenden Erde zu erwarten wäre (s. Text).

bilden. Danach erscheint die sog. Coda, die aus mehrfach reflektierten und gestreuten, sowie mehrfach um die Erde gelaufenen Wellen besteht. Ähnlich wie eine stehende Welle auf einer Saite durch die Überlagerung einer nach links laufenden mit einer nach rechts laufenden Welle entsteht, führt die konstruktive Interferenz dieser Wellen zu den Eigenschwingungen der Erde. Verschiedene Eigenschwingungstypen entstehen dabei aus verschiedenen Typen von laufenden Wellen (s. u.). Auswertbare Eigenschwingungseismogramme müssen mindestens 20 Stunden lang sein.

Abbildung 1 zeigt eine Registrierung des stärksten je digital registrierten Tiefherdbebens (Nordbolivien, 9. Juni 1994) und Abb. 2 das Fourier-Spektrum eines ähnlich starken Bebens mit deutlich erkennbaren Spektrallinien der Erde.

Rückstellkräfte bei diesen Schwingungen sind sowohl die elastischen Spannungen, die durch Deformation aus dem Gleichgewichtszustand entstehen, als auch die Gravitationswirkung der verschobenen Mas-

sen (Selbstgravitation), wobei letztere nur bei den Moden mit den tiefsten Frequenzen eine größere Rolle spielt. Die Form der Verschiebungsfelder und die Frequenzen dieser „seismischen“ Moden werden durch die Geometrie der Grenzflächen sowie die Verteilung der Dichte ρ und der elastischen Parameter in der Erde vollständig definiert. Daher lassen sich umgekehrt diese Eigenschaften und ihre Verteilung für die Erde aus den beobachteten Verschiebungsfeldern und Frequenzen bestimmen.

In der ersten Näherung kann man bei der Erde von perfekter Kugelsymmetrie ausgehen, d. h. alle Eigenschaften hängen nur vom Abstand r vom Mittelpunkt ab ($K=K(r)$, $\mu=\mu(r)$ und $\rho=\rho(r)$). Im isotropen Fall charakterisieren Kompressionsmodul K und Schermodul μ die elastische Antwort bei Scherung bzw. Kompression. Löst man die homogenen elastischen Bewegungsgleichungen für kleine Verschiebungen aus der Ruhelage unter Berücksichtigung der Gravitation und ohne Rotation, so erhält man zwei Typen von Lösungen: T-Moden und S-Moden.¹⁾

Die Eigenfunktionen lassen sich (in Kugelkoordinaten r, θ, ϕ) jeweils in einen winkelabhängigen Oberflächenanteil und einen Radialanteil separieren. T-Moden (T steht für torodial) sind dadurch charakterisiert, dass das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ in radialer Richtung verschwindet ($u_r = 0$) und divergenzfrei ist ($\text{div } \mathbf{u} = 0$). Für sie gilt:

$$u_\theta = \frac{nW_\ell(r)}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} [P_\ell^m(\cos\theta) \cdot e^{im\phi}] \cdot e^{-i\omega(nT_\ell^m) \cdot t} \quad (1)$$

$$u_\phi = -nW_\ell(r) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} [P_\ell^m(\cos\theta) \cdot e^{im\phi}] \cdot e^{-i\omega(nT_\ell^m) \cdot t} \quad (2)$$

wobei \mathbf{u} die Verschiebung, $\omega(nT_\ell^m)$ die Eigenkreisfrequenz, P_ℓ^m zugeordnete Legendre-Polynome, $nW_\ell(r)$ die radiale Eigenfunktion und t die Zeit bedeuten. n, ℓ , und m ($-\ell \leq m \leq \ell$) sind ganze Zahlen entsprechend den Quantenzahlen bei der Lösung der Schrödinger-Gleichung für das Wasserstoffatom. Zur Kurzbeschreibung hat sich die Nomenklatur ${}_nT_\ell^m$ durchgesetzt. Als Folge der Kugelsymmetrie können die Frequenzen der Moden nicht von m abhängen (Entartung), da die Wahl des Koordinatensystems beliebig ist. Die Menge der $(2\ell + 1)$ Einzelmoden (Singulett) wird als Multiplett bezeichnet (m wird weggelassen). Die toroidale Grundmode ${}_0T_2$ (engl. „twisting“-mode, Abb. 3) hat eine Periode von 44 Minuten und ist bisher nur am Observatorium Schiltach mit Extensometern eindeutig beobachtet worden. Die gemessene Deformation betrug dabei etwa 10^{-11} .

Für S-Moden ${}_nS_\ell^m$ (S für sphäroidal) ist das Verschiebungsfeld wirbelfrei ($\text{rot } \mathbf{u} = 0$) und i. A. sind alle drei Verschiebungskomponenten von null verschieden:

$$u_r = nU_\ell(r) \cdot P_\ell^m(\cos\theta) \cdot e^{im\phi} \cdot e^{-i\omega(nS_\ell^m) \cdot t} \quad (3)$$

$$u_\theta = nV_\ell(r) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} [P_\ell^m(\cos\theta) \cdot e^{im\phi}] \cdot e^{-i\omega(nS_\ell^m) \cdot t} \quad (4)$$

$$u_\phi = \frac{nV_\ell(r)}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} [P_\ell^m(\cos\theta) \cdot e^{im\phi}] \cdot e^{-i\omega(nS_\ell^m) \cdot t} \quad (5)$$

mit den radialen Eigenfunktionen ${}_nU_\ell(r)$ und ${}_nV_\ell(r)$.

Die Mode mit der tiefsten Frequenz ist ${}_0S_2$, im Englischen als „football“-mode bezeichnet, mit einer Periode von 54 Minuten (siehe Abb. 3). Sie wird nur von den allerstärksten Erdbeben nachweisbar angeregt. Die

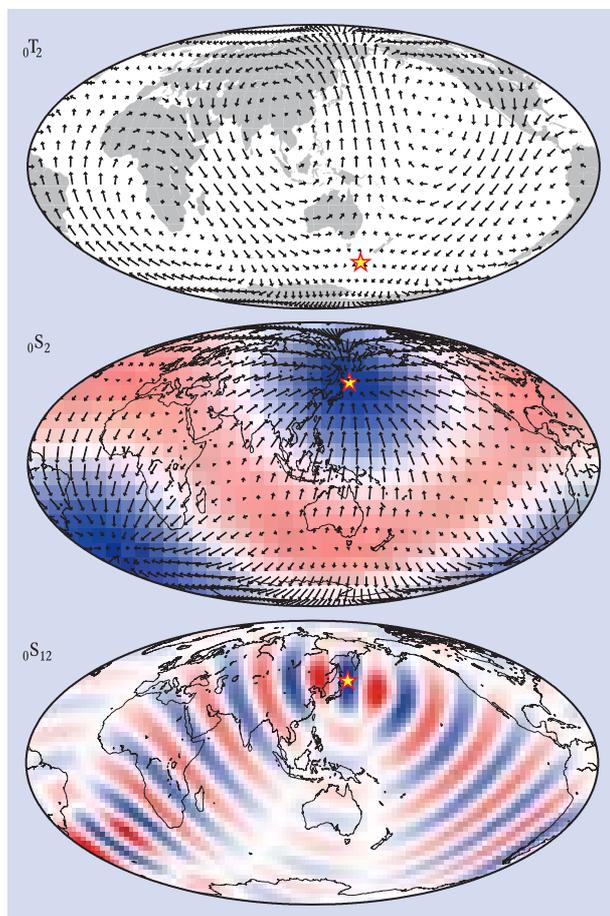


Abb. 3: Schnappschüsse der berechneten Verschiebungsfelder der Multipletts ${}_0T_2$, ${}_0S_2$ und ${}_0S_{12}$ an der Erdoberfläche in der sog. Mollweide-Projektion. Die jeweiligen Erdbebenherde sind durch Sterne markiert. Die horizontalen Verschiebungen sind durch Pfeile (selbstverständlich nicht maßstäblich) gegeben, die radialen Verschiebungen sind durch rote (nach außen) und blaue Farbtöne kodiert. Für ${}_0S_{12}$ sind die Horizontalverschiebungen nicht gezeigt. Sie verhalten sich aber analog zu ${}_0S_2$.

Erde schwingt dabei – stark übertrieben – zwischen den Formen eines „American football“ und eines Kürbis hin und her.

Spezialfälle der sphäroidalen Moden sind die radialen Moden (${}_nS_0$), bei denen nur u_r von null verschieden ist. Die einer atmenden Kugel (engl. „breathing“-mode) entsprechende Mode ${}_0S_0$ hat eine Periode von 20 Minuten, die annähernd gleich der Laufzeit einer Kompressionswelle von der Erdoberfläche zum Erdmittelpunkt und zurück ist. Daneben hat sie bei weitem den höchsten Gütefaktor, da bei dieser Mode der Anteil der Scherdeformation minimal ist (siehe Tab. 1 und Abb. 4). Da sie noch bis zu einem Monat nach sehr starken Beben beobachtet werden konnte, ist ihre Frequenz sehr genau bekannt. Eine homogene Stahlkugel mit demselben Radius wie die Erde hätte für diese Mode eine Periode von 30 Minuten.

Im Gegensatz zu den Oberflächenfunktionen hängen die radialen Eigenfunktionen $U(r)$, $V(r)$ und $W(r)$ vom genauen Aufbau der Erde ab, und ihre Knotenzahl entlang des Radius r nimmt mit wachsendem n zu (Abb. 4). Jede Mode besitzt drei Arten von Knotenflächen: n definiert die Anzahl der Knotenkugeln ($r = \text{const.}$) im Erdinnern, $|m|$ gibt die Anzahl der Knotenebenen durch den Erdmittelpunkt (Meridianebenen $\phi = \text{const.}$) an und $\ell - |m|$ definiert die Anzahl der Knotenkegel ($\theta = \text{const.}$) mit Spitze im Erdmittelpunkt. $n = 0$

definiert die so genannten Fundamentalmoden, Moden mit $n > 0$ sind die Obertöne.

Die Moden klingen durch anelastische Vorgänge bei der Deformation exponentiell ab, und ihre Energie wird in Wärme umgewandelt. Die Gütefaktoren Q entsprechen der Anzahl von Schwingungen, nach denen die Amplitude einer Mode um den Faktor $e^{-\pi}$ abgeklungen ist. Anelastische Dämpfung findet besonders bei Scherdeformation statt, d. h. Moden mit wenig Scheranteil (radiale Moden) besitzen höhere Gütefaktoren als andere. Tabelle 1 enthält die Eigenfrequenzen und Gütefaktoren ausgewählter Moden mit den experimentellen Unsicherheiten aus der Analyse von Spektren wie dem in Abb. 2. Obwohl die Linien zu hohen Frequenzen hin enger beieinander liegen, ist es gelungen, durch die simultane Analyse von mehr als 10000 Seismogrammen insgesamt mehr als 1600 Multipletts aufgrund ihres unterschiedlichen Verschiebungsfeldes an der Erdoberfläche zu identifizieren und ihre Frequenzen zu schätzen.

Die Fundamentalmoden ($n = 0$) lassen sich für $\ell \gg 1$ als konstruktive Interferenz aus Oberflächenwellen beschreiben, die den Planeten in zwei entgegengesetzte Richtungen von der Quelle umlaufen. Dabei überlagern sich zwei Rayleigh-Wellen zu einer ${}_0S_\ell$ -Mode und zwei Love-Wellen zu einer ${}_0T_\ell$ -Mode (vgl. Abb. 3 für ${}_0S_{12}$). Es gilt dann die Jeanssche Formel:

$${}_0\omega_\ell = \frac{c(\omega) \cdot (\ell + 1/2)}{a}, \quad (6)$$

mit der Phasengeschwindigkeit c der Oberflächenwelle und dem Erdradius a . In Abb. 1 kann man verschiedene Züge dieser wiederkehrenden Oberflächwellen ausmachen. Mit wachsendem ℓ dringen die Eigenfunktionen dieser Moden immer weniger in die Erde ein, und ihre Frequenzen enthalten damit Information aus immer geringer werdenden Tiefen (Abb. 4).

Obertöne ($n > 0$) kann man sich durch konstruktive Interferenz von hin- und herreflektierten Raumwellen entstanden denken. Ihre radialen Eigenfunktionen greifen dementsprechend tiefer in die Erde hinein (Abb. 4). Manche dieser Moden (wie z. B. ${}_3S_1$, ${}_8S_1$, ${}_{13}S_2$, ${}_{18}S_4$, siehe Abb. 4) haben Eigenfunktionen, die bis tief in den inneren Erdkern eindringen, was sie sehr wichtig macht für die Ermittlung der Struktur in der Nähe des Erdmittelpunktes.

Tab. 1: Aus seismischen Daten geschätzte entartete Eigenfrequenzen und Gütefaktoren [3] einiger Moden mit ihren experimentellen relativen Unsicherheiten

Mode	Frequenz μHz	Unsicherheit 10^{-4}	Q	Unsicherheit %
${}_0S_0$	814,39	0,04	5882	6
${}_0S_2$	309,45	9	813	24
${}_0S_3$	468,55	3	380	12
${}_0S_{12}$	1988,70	1,5	352	4
${}_0S_{25}$	3170,65	0,3	259	2
${}_0S_{28}$	3634,40	0,2	217	2
${}_1S_8$	1797,76	0,6	433	11
${}_3S_1$	944,20	3,2	800	10
${}_{10}S_2$	4042,58	0,5	855	13
${}_0T_2$	377,30	21	–	–
${}_0T_{25}$	3109,10	2,2	139	3

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass alle physikalischen Eigenschaften der Erde radialsymmetrisch verteilt und die Grenzflächen kugelförmig sind. Wenn man etwas genauer hinschaut, wird diese sehr hohe Symmetrie gebrochen, und die nächste Näherung ist die Axialsymmetrie um die Verbindungslinie zwischen den Polen. In Wirklichkeit gibt es erhebliche Abweichungen von diesen einfachen Symmetrien, wie man bei Betrachtung der Erdoberfläche leicht einsieht.

Führt man die Elliptizität der Erde ein (der Abstand Äquator – Mittelpunkt ist ca. 21 km größer als der Abstand Pol – Mittelpunkt) und ihre Rotation, so wird die Radialsymmetrie gebrochen, es liegt Axialsymmetrie um die Rotationsachse vor und die Entartung der Moden bezüglich m wird aufgehoben ($\theta=0$ entspricht dann der Rotationsachse). Diese Komplikationen lassen sich störungstheoretisch behandeln. Der erste Effekt ist die Aufspaltung der Multipletts. Für die Eigenkreisfrequenzen der Singulets gilt dann ($-\ell \leq m \leq \ell$):

$${}_n\omega_\ell^m = {}_n\bar{\omega}_\ell \cdot (1 + a + m \cdot b + m^2 \cdot c) \quad , \quad (7)$$

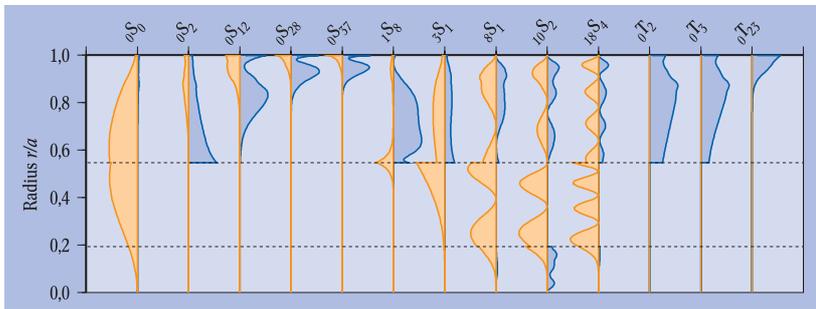


Abb. 4: Radiale Verteilung der Scherenergie-dichten (nach rechts, blau) und Kompressionsenergie-dichten (nach links, gelb) für einige Moden als Funktion des relativen Erdradius'. Man erkennt neben den reinen Mantelmoden ${}_0S_\ell$, ${}_0T_\ell$, deren Ein-

dringtiefe mit wachsendem ℓ abnimmt, auch Moden, die signifikante Energie-dichteanteile im äußeren (z. B. ${}_3S_1$) und inneren Kern (z. B. ${}_{10}S_2$) besitzen. Die Grenzen zwischen Mantel, äußerem und innerem Kern sind gestrichelt markiert.

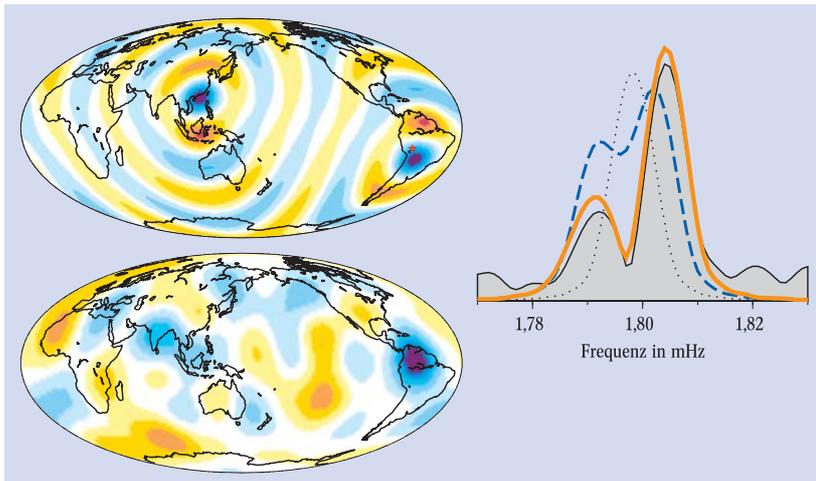


Abb. 5: Eigenschaften der Mode ${}_1S_8$. Links oben ist das radiale Verschiebungsfeld des gesamten Multipletts (17 Singulets) nach dem Beben von Abb. 1 dargestellt. Warme (kalte) Farbtöne entsprechen Verschiebungen nach außen (innen). Das Bild rechts zeigt das beobachtete Amplitudenspektrum an der Station MAJO (Matsushiro, Japan, schwarze Linie) für diese Mode zusammen mit theoretischen Linienformen: das gepunktete Spektrum

würde man auf einer kugelsymmetrischen, nicht rotierenden Erde erhalten, die blaue gestrichelte Linienform erhält man nach Einführung der Rotation und Elliptizität der Erde, die orange dicke Linie ergibt sich bei Berücksichtigung der lateralen Variationen der Scherwellengeschwindigkeit ($v_s = \sqrt{\mu/\rho}$) des Erdmantels, wie sie z. B. in einer Tiefe von 1165 km links unten dargestellt ist.

mit der entarteten Eigenfrequenz ${}_n\bar{\omega}_\ell$. Die Koeffizienten a , b und c sind für jedes Multiplett verschieden. Die symmetrische Komponente $m \cdot b$ ist auf den Effekt erster Ordnung der Coriolis-Kraft zurückzuführen, analog zum Zeeman-Effekt beim Wasserstoffatom in einem Magnetfeld. Diese symmetrische Aufspaltung führt dazu, dass das Knotenbild auf der Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit $b \cdot {}_n\omega_\ell$ nach Westen wandert. Die höchste Geschwindigkeit erreicht die „football“-Mode ${}_0S_2$, deren Knotenmeridiane in etwa 2,5 Tagen einmal die Erde umrunden. Die Frequenzen ihrer fünf Singulets liegen um etwas mehr als $4 \mu\text{Hz}$ auseinander. Die Frequenzverschiebung a und der quadratische Term in m sind hauptsächlich auf den Äquatorwulst zurückzuführen. Die Koeffizienten a , b und c hängen nur schwach von der Struktur des Erdinnern ab, b vor allem von der Dichte. Die Rotationsaufspaltung überwiegt bei tiefen Frequenzen und nimmt mit $\Omega/{}_n\omega_\ell$ ab, sodass die dadurch verursachte Linienaufspaltung nur bei wenigen Moden direkt im Spektrum eines Seismogramms sichtbar wird (Abb. 2, links oben).

Ein zweiter Effekt der Symmetriebrechung ist die Kopplung der Moden. Die Gleichungen (1) – (5) beschreiben die Eigenfunktionen nun nur noch näherungsweise. Man unterscheidet Kopplung zwischen S- und T-Moden, Kopplung zwischen Moden mit gleichem n , aber verschiedenem ℓ , und beliebige Kopplung. Am leichtesten beobachtbar ist die Coriolis-Kopplung, die zur Beobachtung von T-Moden in Spektren der vertikalen Bodenverschiebung führt [4]. Die Stärke dieser Kopplung hängt hierbei wiederum von der Dichteverteilung in der Erde ab. Für alle Kopplungsmechanismen gibt es Auswahlregeln [1, 4], d. h. je nach der Physik des Kopplungsmechanismus gibt es Bedingungen, die die Quantenzahlen erfüllen müssen, damit Kopplung überhaupt stattfinden kann. Die Kopplung zweier Moden ist umso stärker, je näher die Eigenfrequenzen der ungekoppelten Moden zusammenliegen. Deswegen sind zwischen 1,8 und 3,3 mHz die Moden ${}_0S_\ell$ und ${}_0T_{\ell+1}$ sehr stark durch die Coriolis-Kraft miteinander gekoppelt, was man deutlich in den beobachteten Eigenfrequenzen sehen kann. Bei Kopplung zweier Moden nähern sich die Gütefaktoren, und die Eigenfrequenzen entfernen sich voneinander.

Wird die Axialsymmetrie auch noch gebrochen durch laterale Heterogenitäten in der Struktur der Erde, so nimmt die Komplexität der Modenkopplung zu. Für Fundamentalmoden geht man davon aus, dass diejenigen Oberflächenwellen, die vom Erdbebenherd auf dem Großkreis zur Station und dann mehrfach um die Erde laufen, durch konstruktive Interferenz das Seismogramm und die darin enthaltenen Spektrallinien der Erde erzeugen. Auf einer lateral heterogenen Erde ist die über den Großkreis gemittelte Phasengeschwindigkeit je nach Lage des Großkreises verschieden, sodass die Interferenzbedingung (6) auf verschiedenen Großkreisen verschiedene Frequenzen für dasselbe Multiplett liefert. Natürlich kann jedes Singulett nur eine feste Frequenz haben, aber das unaufgelöste Multiplett ist die Summe aller Singulets und auf einem bestimmten Großkreis tragen nur Singulets bei, die Gl. (6) erfüllen, alle anderen interferieren destruktiv. Masters et al. haben diese Eigenschaft 1982 dazu benutzt, um das allererste lateral heterogene Erdmodell zu erstellen [5]. Weil die scheinbaren Eigenschaften des Multipletts nicht davon abhängen können, wo auf dem Großkreis der Herd lag, haben nur laterale Heterogenitäten einen

Einfluss, die durch Kugelfunktionen geraden Grades beschrieben werden können, eine starke Einschränkung bei der Inversion.

Als intermediäre Größe zwischen dem Spektrum eines Multipletts und der heterogenen Struktur ist es hilfreich, zu jedem Multiplett die Aufspaltungsfunktion $\sigma(\theta, \phi)$ zu definieren. σ gibt an jedem Punkt der Oberfläche an, um wieviel die Eigenfrequenz des Multipletts gegenüber dem kugelsymmetrischen Referenzmodell verschoben wäre, wenn die radiale Struktur unter diesem Punkt in der ganzen Erde vorliegen würde. Wenn Erdbeben, Instrumente, Rotation und Elliptizität bekannt sind, kann man durch iterativen Vergleich gerechneter mit beobachteten Multipletts die Aufspaltungsfunktion ermitteln. Laske und Masters wiesen nach, dass sich diese Aufspaltungsfunktionen für Multipletts, die den inneren Erdkern „spüren“, in 20 Jahren nicht signifikant geändert haben und dass damit die postulierte „Superrotation“ des inneren Kerns von einem Grad pro Jahr gegenüber dem Erdmantel höchstens $0,3^\circ/\text{Jahr}$ betragen kann, aber wahrscheinlich viel näher bei null liegt [6]. Die Aufspaltungsfunktion erlaubt eine Inversion der 3-D Struktur der Erde, allerdings mit der Beschränkung auf gerade Kugelfunktionen. Abbildung 5 zeigt für die Mode ${}_1S_8$ neben einem Schnappschuss des Verschiebungsfeldes die sukzessive Annäherung gerechneter Spektren an ein beobachtetes Spektrum durch die theoretische Berücksichtigung der Symmetriebrechung. Aus Eigenschwingungen ermittelte Heterogenitäten der Erde sind in Abb. 5 unten in lateraler Richtung dargestellt. Abbildung 6 zeigt einen radialen Schnitt durch den Erdmantel, für den neben Eigenschwingungen auch Laufzeitresiduen von seismischen Raumwellen verwendet wurden [7].

Bisher wurden nur Erdbeben als Anregungsmechanismus für Eigenschwingungen der Erde erwähnt. Diese Scherbrüche sind von sehr kurzer Dauer im Vergleich zu den Abklingzeiten der Moden, damit können die Moden frei schwingen, bis sie im Rauschen verschwinden. Widmer und Zürn u. a. haben 1991 beobachtet, dass beim Ausbruch des Vulkans Mount Pinatubo auf den Philippinen ca. acht Stunden lang harmonische Rayleigh-Wellen mit zwei charakteristischen

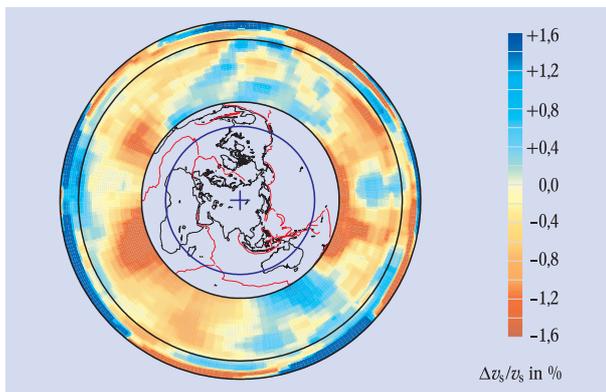


Abb. 6: Schnitt durch ein modernes Modell des Erdmantels, wie es aus Laufzeitresiduen seismischer Raumwellen und den Aufspaltungsfunktionen von Eigenschwingungen invertiert worden ist [7]. Dargestellt sind wiederum Abweichungen in der Scherwellengeschwindigkeit relativ zu einem kugelsymmetrischen Geschwindigkeitsmodell. Die Orientierung des Schnitts und der Anomalien im Modell ist aus der Lage der blauen Linie auf der Weltkarte zu ersehen, die an Stelle des Erdkerns eingesetzt wurde. Die schwarze Linie im Modell verläuft in einer Tiefe von 660 km.

Frequenzen erzeugt wurden, die mehrfach um die Erde liefen und damit konstruktiv interferieren konnten (${}_0S_{28}$ und ${}_0S_{37}$) [8]. Der Vulkan lieferte dabei die Energie für zwei vertikale Eigenschwingungen der Atmosphäre, die durch ihre Druckschwankungen an der Erdoberfläche Rayleigh-Wellen erzeugten.

1998 haben japanische Seismologen entdeckt, dass im Hintergrundrauschen zwischen 2 und 7 mHz alle sphäroidalen Fundamentalmoden ${}_0S_\ell$ mit Amplituden von höchstens 10 pm/s^2 (10^{-12} g) dauernd angeregt sind. Man kann dies an guten Stationen statistisch nachweisen (z. B. [9]). Im Vergleich dazu sind die Anfangsamplituden bei starken Erdbeben und die Schwingungsweiten beim Mount Pinatubo um etwa den Faktor 1000 größer. Statistische Druckschwankungen in der Atmosphäre werden als Anregung dieser Hintergrundschwingungen favorisiert.

Kreiseleigenschwingungen

Betrachtet man die Erde als abgeplatteten Kreisel, so führt sie aufgrund der äußeren Kräfte und Drehmomente durch Mond und Sonne Präzessionsbewegungen aus. Zusätzlich kann die Erde noch überlagerte freie Bewegungen ausführen, die denen eines kräftefreien Kreisels entsprechen. Ein abgeplatteter Kreisel kann stabil um seine Figurenachse rotieren. Weicht die Rotationsachse von der Figurenachse ab, so muss er gleichzeitig eine sog. freie Nutation ausführen, bei der die momentane Drehachse um die raumfeste Richtung des Drehimpulsvektors mit charakteristischer Frequenz umläuft. Diese Bewegung zählt als Eigenschwingung des Kreisels, da sie ohne zusätzliche Drehmomente existieren kann, wenn entsprechende Anfangsbedingungen vorliegen. Betrachtet man die Bewegung statt im raumfesten System im mitbewegten Eigensystem des Kreisels, so entspricht die Nutation einer Rotation der momentanen Drehachse um die Figurenachse, die im Englischen „wobble“ („taumeln“) genannt wird, im Deutschen aber keinen besonderen Namen hat. Der Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeit des Wobbles σ_{Wobble} und Periode der Nutation T_N ergibt sich aus der Kreiseltheorie zu:

$$\sigma_{\text{Wobble}} = \frac{2 \cdot \pi}{T_N} - \Omega \quad , \quad (8)$$

wobei Ω die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels ist.

Der amerikanische Astronom Seth Carlo Chandler entdeckte schon 1891 bei astronomischen Beobachtungen eine Breitenschwankung der Erde mit einer Periode von 435 Sterntagen. Die momentane Rotationsachse bewegt sich dabei an den Polen der Erde zyklisch innerhalb eines Kreises mit 10 m Radius. Diese Bewegung setzt sich zusammen aus dem sog. Chandler-Wobble und der etwas stärkeren, von der Atmosphäre erzwungenen Jahresperiode. Die Chandlersche Bewegung wurde schnell mit der bereits von Euler vorhergesagten Bewegung mit der Periode 305 Sterntage in Verbindung gebracht, die Diskrepanz verlangte aber eine Erklärung.

Euler kannte den inneren Aufbau der Erde natürlich noch nicht und behandelte die Erde daher als starren Kreisel. Um die korrekten Kreiseleigenschwingungen der Erde zu erhalten, muss man den Drehimpulssatz (im mit der Erde rotierenden System) ohne äußere Drehmomente auf den deformierbaren Erdmantel und den flüssigen Kern getrennt anwenden und beide Teile durch innere Drehmomente koppeln [10]. Dies erlaubt

eine Rotation der beiden Teile um leicht unterschiedliche Achsen. Man schreibt:

$$\dot{\mathbf{L}}_K + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_K = \mathbf{N} \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{L}}_M + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_M = -\mathbf{N} \quad (10)$$

\mathbf{L}_K und \mathbf{L}_M sind dabei die Drehimpulsvektoren von Kern bzw. Mantel. \mathbf{N} ist die Summe aller Wechselwirkungen (topographisch, elektromagnetisch, gravitativ, viskos) zwischen Mantel und Kern. Als wichtigste wird die sog. Druck- oder Trägheitskopplung angesehen: Wenn Kern und Mantel nicht um dieselbe Achse rotieren, entstehen durch die ellipsoidische Form der Kern-Mantel-Grenze Druckkräfte, die versuchen, die beiden Achsen zusammenzubringen. Setzt man nun die entsprechenden Größen ein, so erhält man zwei Eigenfrequenzen für freie Wobble-Bewegungen der Erde:

$$\sigma_{CW} = \frac{A}{A_M} \cdot \alpha \cdot (1 - \delta) \cdot \Omega \quad (11)$$

und

$$\sigma_{NDFW} = -\Omega \cdot \left(1 + \frac{A}{A_M} (\alpha_K - \beta) \right) \quad (12)$$

wobei $\alpha = (C - A)/A$ und $\alpha_K = (C_K - A_K)/A_K$ die dynamischen Elliptizitäten von Erde und Kern sind. A , A_K und A_M sind die äquatorialen, C , C_K und C_M die polaren Trägheitsmomente [11] von ganzer Erde, Kern und Mantel, Ω ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Erde. Die erste der Rotationseigenfrequenzen ist der berühmte Chandler-Wobble, dessen Drehsinn mit der Erdrotation übereinstimmt (prograd). Die zweite wird je nach Sichtweise als „Nearly Diurnal Free Wobble“ (NDFW) oder als freie Kern-Nutation (FCN) bezeichnet; aufgrund des Vorzeichens in Gl. (12) verläuft sie entgegen der Erdrotation (retrograd).

Abbildung 7 zeigt beide Wobbles in einer anschaulichen Darstellung: Der körperfeste Kegel (Achse = Figurenachse) rollt reibungslos auf bzw. in dem raum-

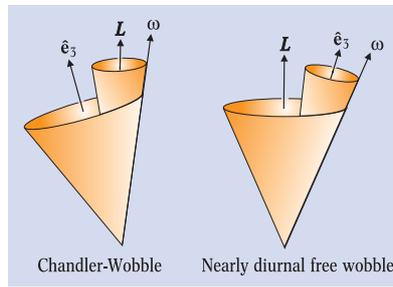


Abb. 7: Darstellung der beiden Kreisel-Eigenbewegungen der Erde mit aufeinander abrollenden Kegeln. \mathbf{L} ist die Drehimpulsachse (Achse des raumfesten Kegels), $\hat{\mathbf{e}}_3$ ist die Figurenachse (Achse des körperfesten Kegels) und $\boldsymbol{\omega}$ die momentane Rotationsachse. Die Öffnungswinkel aller Kegel sind hier stark übertrieben gezeichnet. Das wirkliche Winkelverhältnis zwischen äußeren und inneren Kegeln beträgt in beiden Fällen etwa 1:400.

festen Kegel (Achse = Drehimpulsachse) ab. Die Berührungslinie der beiden Kegel ist die momentane Rotationsachse. Drehimpuls, momentane Rotationsachse und Figurenachse bleiben immer in einer Ebene²⁾.

Für eine starre Erde ohne flüssigen Kern reduziert sich Gl. (11) auf $\sigma_{CW} = \alpha \cdot \Omega$, mit der Euler-Periode von 305 Sterntagen. Ein Anteil des Äquatorwulstes besteht jedoch aus der momentanen Reaktion der elastischen Erde auf die Fliehkraft und dieser Anteil trägt damit nicht zum „Rückstellmoment“ bei. Dies führt über die Konstante δ zu einer Periodenverlängerung. Andererseits ist der flüssige Erdkern nur schwach an den Mantel gekoppelt und nimmt am Wobble nicht teil, dies

verkürzt die Periode wieder mittels des Faktors A/A_M . Mit realistischen Zahlen führt dies auf eine Periode von 397 Sterntagen. Es kommen zwei weitere Periodenverlängerungen hinzu [12]: 29,8 Sterntage durch die momentane Einstellung der Ozeanoberfläche auf die Fliehkkräfte und 8,5 Sterntage durch die Relaxation der Elastizität des Mantels gegenüber seismischen Frequenzen (Anelastizität). Damit ist die Periode des Chandler-Wobble im Prinzip verstanden, wobei die letzten beiden Terme noch etwas voraussetzungsbehaftet sind. Der Chandler-Wobble hat einen Gütefaktor unter 100, als dissipative Prozesse kommen Anelastizität im Erdmantel, viskose Reibung, elektromagnetische und topographische Kopplung an der Kern-Mantel-Grenze sowie Reibung in den Ozeanen in Frage. Frequenz und Gütefaktor des Chandler-Wobble sind sehr wichtige Messgrößen zur Ermittlung der Frequenzabhängigkeit der Elastizität des Erdmantels (Rheologie).

Der Chandler-Wobble wird dauernd angeregt, wobei als Energiequellen die Atmosphäre, die Ozeane und Erdbeben (Veränderungen der Trägheitsmomente) diskutiert werden. Die Atmosphäre scheint nur etwa ein Drittel der nötigen Energie liefern zu können, Erdbeben sind nicht sicher als Quellen identifiziert worden. R. Gross behauptet, die restlichen zwei Drittel in den Ozeanen gefunden zu haben [14].

Heute wird die Orientierung der Erdachse im Raum vom Internationalen Erdrotationsdienst kontinuierlich mit Methoden wie Radiointerferometrie mit langer Basis (VLBI), Laser-Entfernungsmessungen zum Mond (LLR) und zu Satelliten (SLR) sowie GPS mit hoher Präzision gemessen. Supraleitende Gravimeter sind in der Lage, die mit den Wobbles assoziierten Änderungen der lokalen Zentrifugalbeschleunigung von etwa 40–80 nm/s² im Jahres- und 14-Monats-Rhythmus aufzulösen (Abb. 8). Etwa 16 % dieses Effekts sind auf die elastische Deformation der Erde durch die Fliehkkräfte zurückzuführen. Eine genaue Messung dieses Anteils würde einen neuen Eckwert für die Mantelrheologie liefern, da die elastischen Modulen gegenüber denen bei den mehr als vier Größenordnungen höheren seismischen Frequenzen dadurch kleiner sind.

Die Amplitude der freien Kern-Nutation ist etwa 400mal so groß wie die des NDFW. Diese Schwingung wird auf zwei Arten beobachtet. Zunächst ist die Nutati-

2) $\boldsymbol{\omega}$ stimmt nur dann mit Ω überein, wenn die Kreiselbewegungen nicht angeregt sind.

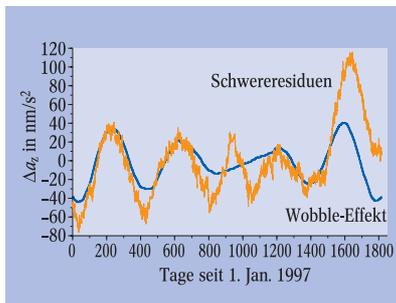


Abb. 8: Aus der mit raumgeodätischen Methoden ermittelten Polbewegung lässt sich die lokale Änderung der Zentrifugalbeschleunigung berechnen, die der Wobble-Periode von rund 400 Tagen folgt. Die für Straßburg berechnete Änderung (blau) lässt sich auch lokal mit supraleitenden Gravimetern detektieren (rot). Von letzterer sind die bekannten Erdzeiten sowie atmosphärische und hydrologische Effekte subtrahiert worden.

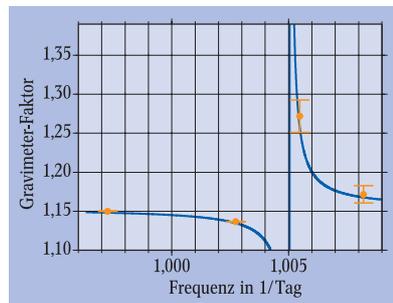


Abb. 9: Die Antwort der Erde auf die von den Gezeitenkräften ausgeübten Drehmomente weist eine Resonanz auf, die von dem Nearly Diurnal Free Wobble verursacht wird und mit Gravimetern detektiert werden kann (Messpunkte). Unterlegt ist die Modellkurve für die Parameter $T_{FCN} = 432$ Sterntage und $Q_{FCN} = 3 \cdot 10^4$. Die zugrundeliegende Gezeitenregistrierung von 1996 bis 2000 wurde mit einem supraleitenden Gravimeter bei Straßburg erstellt.

tion selbst mit VLBI beobachtet worden mit einer Amplitude von 0,84 nrad. Sie ist ebenfalls zeitabhängig, und in der Atmosphäre ist genügend Energie vorhanden, um diese Amplitude zu erzeugen. Die zweite Methode ist indirekt: Man beobachtet die resonante Reaktion der Erde auf Drehmomente mit Frequenzen in der Nähe der Resonanz. Diese Drehmomente werden durch die ganztägigen Erdzeitenkräfte erzeugt [13], deren angreifende Amplituden sehr genau bekannt sind. Die Reaktion der Erde wird mit Gravimetern und Extensometern gemessen, und aus der Frequenzabhängigkeit dieser Reaktion lassen sich die Eigenschaften der Resonanz (komplexe Eigenfrequenz, komplexe Admittanz) ermitteln (Abb. 9). Dasselbe gilt für VLBI-Beobachtungen der erzwungenen Nutationen, die mit den Erdzeiten eng assoziiert sind.

Es ist abgeschätzt worden, dass alle weiter oben angeführten Kopplungsmechanismen gegenüber der Trägheits- oder Druckkopplung an der Kern-Mantel-Grenze vernachlässigbar sind. Letztere wird durch die dynamische Elliptizität α_K an der Kern-Mantel-Grenze beschrieben. Die Größe β gibt an, welcher Anteil von α_K momentan auf die Druckkräfte reagiert und damit die „Rückstellmomente“ um etwa 25 % verringert. Die beobachtete Periode von 432 Sterntagen ist kürzer als die von 466 Sterntagen für ein hydrostatisch auf die Rotation reagierendes seismologisches Erdmodell. Führt man Anelastizität im Erdmantel ein, wird die Diskrepanz noch größer. Diese wird zurzeit damit erklärt, dass die Kern-Mantel-Grenze um ca. 5 % (entsprechend 300 – 500 m) stärker abgeplattet ist als hydrostatisch (1/400) erwartet wird. Derart kleine Perturbationen in der Topographie der Kern-Mantel-Grenze lassen sich mit seismologischen Methoden nicht erfassen. Der Gütefaktor des NDFW beträgt etwa 20000, zu niedrig für Mantel-Anelastizität alleine, d. h. ein noch nicht identifizierter Dämpfungsmechanismus ist am Werk. Auch die Admittanz der Erde für den NDFW kann in Zukunft Eckwerte für diese Umgebung der Kern-Mantel-Grenze liefern.

Führt man den festen inneren Kern zusätzlich ein, ergeben sich zwei weitere Kreisel-Eigenschwingungen [15], deren Beobachtung aussteht, jedoch u. a. die Elliptizität der Oberfläche des inneren Kerns einschränken würde.

Ausblick

Der heutige Stand unserer Kenntnisse der langwelligen Struktur des tiefen Erdinnern beruht zu einem wesentlichen Teil auf den Beobachtungen der verschiedenen Eigenschwingungen der Erde. Weitere und verbesserte Beobachtungen im Zusammenwirken mit theoretisch-numerischen Weiterentwicklungen werden helfen, dieses Bild zu verfeinern. Die dreidimensionale Verteilung der Dichte im Erdmantel z. B. stellt noch eine Herausforderung dar, der nur mittels Eigenschwingungen auf den Leib gerückt werden kann.

Die jüngsten Entdeckungen der ständig angeregten elastischen Moden [9] und der Coriolis-gekoppelten tieffrequenten Moden [4], die ersten Ansätze zu einer zeitabhängigen Seismologie [6], sowie die immer höher werdende Auflösung bei der Beobachtung der freien Nutationen zeigen auch, dass dieses aufregende Forschungsgebiet immer wieder Überraschungen bereithält, die unseren Blick in Richtung Erdmittelpunkt verbessern werden.

Dank

Wir bedanken uns bei Bettina Bayer, Jacques Hinderer, Gabi Laske, Joe Resovsky und Séverine Rosat für Material zu den Abbildungen.

Literatur

- [1] F. A. Dahlen und J. Tromp, *Theoretical Global Seismology*, Princeton University Press, Princeton 1998
- [2] G. Müller und W. Zürn, *Landolt-Börnstein, Neue Serie V/2a*, Springer Verlag, Berlin 1984
- [3] T. G. Masters und R. Widmer, *Free Oscillations: Frequencies and Attenuation*. In T. J. Ahrens, (Hrsg.), *Global Earth Physics: a handbook of physical constants*, Am. Geophysical Union, Washington (1995)
- [4] W. Zürn et al., *Geophys. J. Int.* **113**, 113 (2000)
- [5] G. Masters et al., *Nature* **298**, 609 (1982)
- [6] G. Laske und G. Masters, *Nature* **402**, 66 (1999)
- [7] G. Masters et al., *The Relative Behavior of Shear Velocity, Bulk Sound Speed, and Compressional Velocity in the Mantle: Implications for Chemical and Thermal Structure*. In S. Karato et al., (Hrsg.), *Monograph 117*, AGU, Washington (2000)
- [8] R. Widmer und W. Zürn, *Geophys. Res. Lett.* **19**, 765 (1992)
- [9] K. Nishida und N. Kobayashi, *J. Geophys. Res.* **104**, 28741 (1999)
- [10] K. Lambeck, *Geophysical Geodesy: The Slow Deformations of the Earth*, Clarendon Press, Oxford 1988
- [11] C. F. Yoder, *Astrometric and Geodetic Properties of Earth and the Solar System*. In T. J. Ahrens, (Hrsg.), *Global Earth Physics: a handbook of physical constants*, Am. Geophysical Union, Washington (1995)
- [12] M. L. Smith und F. A. Dahlen, *Geophys. J. R. Astr. Soc.* **64**, 223 (1981)
- [13] W. Zürn, *The Nearly-Diurnal Free Wobble Resonance*. In H. Wilhelm et al., (Hrsg.), *Lecture Notes in Earth Sciences 66*, Springer-Verlag, Heidelberg (1997)
- [14] R. Gross, *Geophys. Res. Lett.* **27**, 2329 (2000)
- [15] D. De Vries und J. M. Wahr, *J. Geophys. Res.* **96**, 8275 (1991)

Die Autoren



Walter Zürn beschäftigt sich seit über 30 Jahren mit Erdbebenwellen und Eigenschwingungen der Erde. Nach seiner Promotion verbrachte er einige Jahre in den USA an der University of California at Los Angeles sowie ein Jahr als wissenschaftlicher Stationsleiter der Amundsen-Scott-Südpolstation in der Antarktis. Für seine Verdienste wurde 1976 der 1515 m hohe *Zürn Peak* in der Antarktis nach ihm benannt. Seit Mitte der 70er-Jahre ist er am Geophysikalischen Institut der Uni Karlsruhe und am Observatorium Schiltach tätig. In seiner Freizeit ist er in den Bergen unterwegs und spielt Schach.

Rudolf Widmer-Schmidrig hat an der ETH Zürich Geophysik studiert und 1991 am Institute of Geophysics and Planetary Science der Scripps Institution of Oceanography in San Diego/USA promoviert. Seither ist er, unterbrochen durch einen weiteren USA-Aufenthalt, Assistent am Geophysikalischen Institut in Karlsruhe und arbeitet am Observatorium Schiltach. Beruflich steht sein Interesse für das Erdinnere im Vordergrund, privat erkundet er das Erdäußere beim Klettern in Fels und Eis, Radfahren und auf Skitouren.

