Kernphysik

Chaos in Atomkernen

Atomkerne haben als wechselwirkende Vielteilchensysteme Modellcharakter für die Untersuchung von regulärer und chaotischer Dynamik

Hans Arwed Weidenmüller

Lange bevor der Begriff Chaos Allgemeingut wurde, hat die Kernphysik Begriffe, Ideen und Methoden geprägt, die inzwischen auf andere Gebiete der Physik übertragen wurden und heute mit Chaos assoziiert werden. In der Theorie gehört dazu vor allem die Methode der Zufallsmatrizen.

Seit einigen Jahrzehnten gehört das Wort Chaos zum Sprachschatz der Physiker. Es ist bekannt, daß in Systemen mit zwei und mehr Freiheitsgraden die Lösungen der Newtonschen Gleichungen generisch chaotisches Verhalten zeigen. Was heißt das? Jede Lösung definiert eine Trajektorie im Phasenraum. Nimmt man einen auf der Trajektorie gelegenen Punkt des Phasenraums und verschiebt ihn infinitesimal so, daß er nicht mehr auf dieser Trajektorie liegt, dann kann der Abstand zwischen der ursprünglichen und der durch die Verschiebung definierten Trajektorie entweder linear oder exponentiell mit der Zeit anwachsen. Im ersten Fall reden wir von einer regulären, im zweiten Fall von einer chaotischen Trajektorie. In chaotischen Systemen sind Teile des Phasenraums von chaotischen Trajektorien überdeckt. Dazwischen liegen Bereiche mit regulären Trajektorien. Völlig reguläre Systeme (ohne chaotische Trajektorien) und völlig chaotische Systeme (ohne reguläre Trajektorien) sind die Ausnahme, nicht die Regel. Der Atomkern, ein aus vielen wechselwirkenden Teilchen aufgebautes System, sollte also ebenfalls chaotisch sein. Doch Atomkerne müssen quantenmechanisch beschrieben werden. Wie manifestiert sich Chaos in einem Quantensystem? Gibt es experimentelle Evidenz für Chaos im Atomkern? Und wie weit reicht das theoretische Verständnis? Mit wachsendem Interesse der Physiker am Chaos und am Quantenchaos (der Manifestation chaotischen Verhaltens in Quantensystemen) sind diese Fragen auf zunehmende Resonanz seitens der Kernphysiker gestoßen. Der Artikel gibt einen Überblick über den gegenwärtigen Stand der Diskussion. Dabei werde ich anfangs historisch vorgehen. Dies deshalb, weil in der Kernphysik früh Begriffe geprägt worden sind, die heute eng mit Chaos verknüpft werden, lange bevor dieses Wort Allgemeingut wurde.

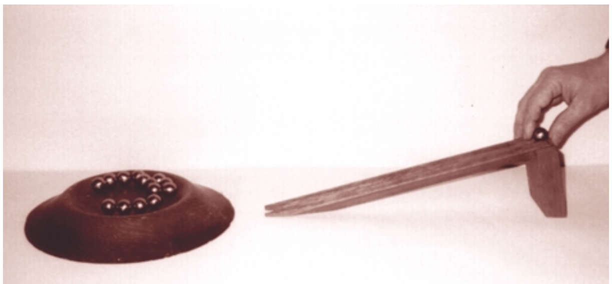

Abb. 1: Mit diesem Holzmodell zur Verdeutlichung seiner Idee des Compoundkerns griff Niels Bohr der späteren Diskussion über Chaos im Atomkern vor. Bei der Neutronenstreuung wechselwirkt das Neutron (rechts) demnach mit vielen Neutronen im Targetkern, die in einen Potentialtopf eingesperrt sind. (Quelle: Niels Bohr Archiv)

Bohrs Compoundkern

Die Grundlagen des heutigen Verständnisses von Chaos im Atomkern wurden bereits in den dreißiger Jahren des letzten Jahrhunderts gelegt. Es war bekannt, daß die Kernkräfte im Vergleich zur elektromagnetischen Wechselwirkung sehr stark sind, aber eine geringe Reichweite von ca. 10^{-13} cm haben, daß Atomkerne „Sättigung" der Teichendichte zeigen (der Kernradius R wächst mit $A^{1/3}$, wobei A die Massenzahl ist), daß die Bindungsenergie des letzten Nukleons in Abhängigkeit von A etwa 8 bis 10 MeV beträgt, und daß – wie in allen Systemen gebundener Fermionen – die Niveaudichte, d. h. die Zahl der Energiezustände pro Energieintervall, etwa exponentiell mit der Anregungsenergie wächst.

Streuexperimente mit langsamen Neutronen zeitigten ein überraschendes Ergebnis. In einem Einteilchenbild – der Targetkern definiert ein mittleres Einteilchenpotential, an dem das Neutron gestreut wird – würde man erwarten, im Streuquerschnitt breite Einteilchenresonanzen zu sehen, deren Abstände einige MeV betragen sollten und deren Breiten etwa zehnmal kleiner sein sollten. Statt dessen fand man scharfe Resonanzen mit kleinen Energieabständen. Hier bedeuten „scharf", daß die Resonanzbreiten klein gegen den Abstand benachbarter Resonanzen sind, und „klein", daß diese Abstände sehr viel kleiner sind, als die genannten Abschätzungen mit einem Einteilchenmodell erwarten lassen.[1] Diese Beobachtung war das auslösende Moment für Bohrs Idee des Compoundkerns: Die Resonanzen lassen sich nicht im Einteilchenbild verstehen, sondern müssen Vielteilchenzustände sein. Die scharfen Resonanzzustände entstehen, weil das einlaufende Neutron mit vielen Nukleonen im Targetkern wechselwirkt. Vermöge der Stärke der Wechselwirkung wird seine Energie dabei auf viele Freiheitsgrade verteilt. Der entstehende Compoundkern lebt lange und kann erst dann durch Emission eines Neutrons zerfallen, wenn eine sta-

1) Die experimentell gefundenen Werte lassen sich aus Abb. 2 ablesen. Man beachte die Energieskala.

Prof. Dr. Hans Arwed Weidenmüller, Max-Planck-Institut für Kernphysik, Saupfercheckweg 1, 69117 Heidelberg

 1617-9439/04/0303-1

tistische Fluktuation die gesamte Energie zufällig wieder auf ein Nukleon konzentriert. Wenn das geschieht, hat der Compoundkern „vergessen“, wie er gebildet wurde: Im Mittel über viele Resonanzen hängt die Zerfallswahrscheinlichkeit nur von erhaltenen Quantenzahlen (Energie, Parität, Gesamtspin) ab, nicht aber davon, wie der Compoundkern gebildet wurde. Zur Verdeutlichung seiner Idee ließ sich Bohr in Kopenhagen ein hölzernes Modell bauen (Abb. 1). Das einfallende Neutron und die Nukleonen im Kern werden durch Billardkugeln dargestellt, das Kernpotential durch die schalenförmige Vertiefung. Wir wissen heute, daß nichtdeformierbare Billardkugeln, die einander elastisch stoßen und in einem festen Volumen eingesperrt sind, ein voll chaotisches System bilden (der gesamte Phasenraum ist von chaotischen Trajektorien erfüllt). Insofern greift das Bohrsche Modell der späteren Diskussion über Chaos im Atomkern in überraschender Weise vor.

Bohrs Vorstellung vom Compoundkern führte später zur „Hauser-Feshbach-Formel“. Danach ist der mittlere Wirkungsquerschnitt σ_{ab} (gemittelt über viele Compoundkernresonanzen) für die Reaktion aus dem „Kanal“ a (etwa ein einfallendes Neutron mit festem Drehimpuls) in den Kanal b (etwa ein Proton oder ein Alphateilchen, ebenfalls jeweils mit festem Drehimpuls) das Produkt zweier Faktoren, der Bildungswahrscheinlichkeit T_a im Kanal a und der relativen Zerfallswahrscheinlichkeit in den Kanal b. Letztere ergibt sich aus Zeitumkehr und Normierung zu $T_b / \Sigma_c T_c$. Also gilt:

$$\sigma_{ab} \propto T_a \; (T_b \,/\, \Sigma_c T_c) \qquad (1)$$

Als direkte Folge der Bohrschen Vorstellung gehen Bildung und Zerfall des Compoundkerns nicht in diese Beziehung ein.

Zufallsmatrizen

Nach dem Zweiten Weltkrieg formalisierte Wigner diese Ideen dadurch, daß er den Begriff der Zufallsmatrizen in die Kernphysik einführte [1–4]. Ich postuliere hier einen Zusammenhang zwischen Wigners Arbeiten und der Idee des Compoundkerns. Dazu muß ich einschränkend feststellen, daß sich Wigner meines Wissens an keiner Stelle explizit auf Bohrs Idee bezieht. Er arbeitete aber während des Krieges an Kernreaktoren, mußte daher die Bohrschen Vorstellungen kennen. Und ich kann mir die Entstehung seines Ansatzes nur plausibel machen, indem ich diesen Zusammenhang postuliere. Seine Ideen wurden dann schnell von Dyson aufgegriffen und mathematisch ausgearbeitet.

Wie geht man vor, wenn man ein System stark wechselwirkender Teilchen beschreiben will, ohne daß man Details der Wechselwirkung kennt? Ausgangspunkt ist die Tatsache, daß jeder Hamilton-Operator H als Matrix $H_{\mu\nu}$ im Hilbert-Raum dargestellt werden kann. Die entscheidende Idee besteht darin, daß man fragt: Welches sind die gemeinsamen Eigenschaften aller $H_{\mu\nu}$, welche die gleichen Symmetrieeigenschaften besitzen? Im Falle des Kerns sind das Invarianz unter Zeitumkehr und unter Raumdrehungen. Die Antwort lautet: Es sind dies alle Matrizen $H_{\mu\nu}$, die reell und symmetrisch sind. Wir fragen also nach den Eigenschaften, die die Spektren (fast) aller dieser Matrizen gemeinsam haben. Es ist natürlich ein kühner Schritt, daß man eine Gesamtheit (ein „Ensemble“) von Hamiltonschen Matrizen betrachtet, was bisher in der statistischen Physik nicht üblich war. Ebenso überraschend ist vielleicht die Tatsache, daß eine so allgemeine Frage eine präzise, quantitative Antwort hat und zu Resultaten führt, die mit dem Experiment verglichen werden können. Das für die Kernphysik relevante Ensemble reellsymmetrischer Matrizen heißt das Gaußsche orthogonale Ensemble (GOE). Es ist im Raum der Matrizen durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte definiert – deshalb der Name „Zufallsmatrizen“. Sie hat die Form

$$N_0 \exp\left\{-(N/\lambda^2)\ \mathrm{Spur}(H^2)\right\} \prod_{\mu\le\nu} \mathrm{d}H_{\mu\nu}\,. \qquad (2)$$

Das Maß $\Pi_{\mu\le\nu}\, \mathrm{d}H_{\mu\nu}$ ist das Produkt der Differentiale der unabhängigen Matrixelemente von H. Der Gaußsche Faktor garantiert Konvergenz der Integrale über das Ensemble. Der Faktor N_0 ist die Normierung. Man betrachtet das Ensemble im Limes $N \to \infty$, wobei N die Dimension der Matrizen ist. Auf den einzigen Parameter λ wird unten eingegangen. Das Ensemble hat einen Gaußschen Abschneidefaktor und ist invariant unter orthogonalen Transformationen des Hilbert-Raums. Daher sein Name.

Die Ergebnisse der Theorie der Zufallsmatrizen werden dadurch gewonnen, daß man die Observable, für die man sich interessiert, durch den Hamilton-Operator H ausdrückt und das Ergebnis über das Ensemble mittelt. Zum Beispiel ist die Niveaudichte $\varrho(E)$ als Funktion der Energie E gegeben durch $\varrho(E) = \mathrm{Spur}\ \delta(E - H)$. Man kann auch Korrelationen zweier Observablen ausrechnen, indem man das Produkt der entsprechenden Ausdrücke über das Ensemble mittelt und das Produkt der Mittelwerte abzieht. Im Falle der Niveaudichten bei zwei Energien E_1 und E_2 handelt es sich dann um Spur $\delta(E_1 - H)$ Spur $\delta(E_2 - H)$. Die Begriffsbildungen sind die gleichen wie in jeder Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie. In allen für uns relevanten Fällen lassen sich die Rechnungen analytisch durchführen. Allerdings kann ich nicht auf die Details eingehen.

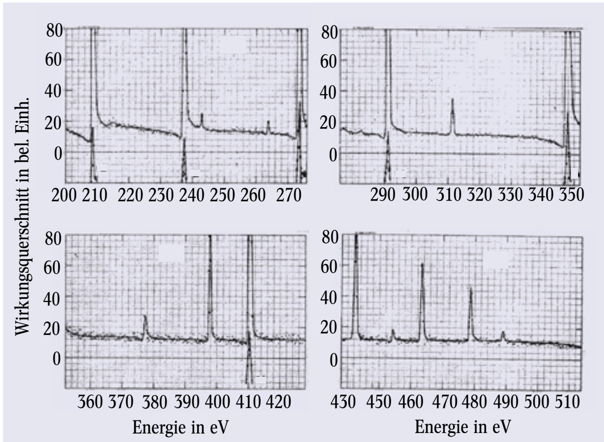

Abb. 2:
Der totale Wirkungsquerschnitt für die Streuung langsamer Neutronen am ^{238}U zeigt als Funktion der Neutronenenergie eine Vielzahl von Resonanzen. (aus *J. B. Garg* et al., Phys. Rev. 134, B 985 (1964)).

Von besonderem Interesse sind die Aussagen der Theorie über spektrale Eigenschaften. Darunter versteht man den mittleren Niveauabstand d, die Schwankungen der Abstände benachbarter Energieniveaus um diesen Mittelwert („spektrale Fluktuationen“) und die Korrelationen zwischen solchen Abständen. Der Wert von d wird nicht von der Theorie vorausgesagt, sondern durch die Wahl des Parameters λ festgelegt. Durch Anpassung von $d = \pi\lambda/N$ an ein experimentell gegebenes Spektrum wird es dann möglich, spektrale

Fluktuationen parameterfrei vorherzusagen und mit experimentellen Ergebnissen (etwa für die Resonanzen in der Streuung langsamer Neutronen) zu vergleichen. Die für den Vergleich wichtigsten Ergebnisse des GOE sind die folgenden.

▶ (a) Eigenwerte und Eigenfunktionen sind unkorreliert.

▶ (b) Die Verteilung $P(s)$ der Abstände unmittelbar benachbarter Eigenwerte ist in sehr guter Näherung gegeben durch

$$P(s) = (\pi/2)\ s\ \exp\{-(\pi/4)\ s^2\}. \tag{3}$$

Dabei ist s der Abstand in Einheiten des mittleren Niveauabstandes d. Für kleine Abstände s geht $P(s)$ linear gegen Null. Das ist die Folge der quantenmechanischen Niveauabstoßung, die in Abwesenheit von erhaltenen Quantenzahlen für jedes Paar von Zuständen und damit für voll chaotische Systeme immer gilt. Sie steht im Gegensatz zum Verhalten regulärer Systeme, bei denen alle Zustände durch eigene Quantenzahlen charakterisiert sind und bei denen sich deshalb benachbarte Eigenwerte nicht abstoßen. Das führt zur Poisson-Verteilung.

▶ (c) Das Spektrum ist steif. Das heißt: Die Abstände benachbarter Eigenwerte sind stark korreliert; auf einen großen Niveauabstand ($s > 1$) folgt sehr wahrscheinlich ein kleiner ($s < 1$) und umgekehrt. Formal heißt das: Sei $\varrho(E)$ die tatsächliche Niveaudichte und $N(E) = \int^E \mathrm{d}E'\ \varrho(E')$ die Anzahl der Eigenwerte unterhalb der Energie E. Die Schwankung von $N(E)$ um seinen Mittelwert (welcher linear in E ist) wächst nur logarithmisch in E. Oder in Formeln: Sei

$$\Delta_3(L) = (1/L)\left\langle \min_{AB} \int_{E_0}^{E_0+L} \mathrm{d}E\big(N(E) - AE - B\big)^2 \right\rangle_{E_0}, \tag{4}$$

wobei die eckigen Klammern eine Mittelung über die Anfangsenergie E_0 bedeuten und der Ausdruck auf der rechten Seite bezüglich A und B zu minimieren ist. Dann gilt für $L \gg d$, daß $\Delta_3(L) \propto \ln L$. Dies ist insofern überraschend, als unkorrelierte Abstände nächster Nachbarn ein lineares Anwachsen von $\Delta_3(L)$ mit L zur Folge hätten. Daher der Ausdruck „Steifigkeit des Spektrums".

▶ (d) Die Projektionen der Eigenvektoren auf einen festen Vektor im Hilbert-Raum sind gaußverteilt. Die Verteilung der Quadrate der Projektionen ist eine χ^2-Verteilung mit einem Freiheitsgrad und heißt Porter-Thomas-Verteilung.

Die Ergebnisse der Theorie der Zufallsmatrizen werden durch Mittelung über das Ensemble gewonnen. Experimentelle Ergebnisse beziehen sich aber natürlich immer nur auf Systeme mit einem festen Hamilton-Operator. Theorie und Experiment lassen sich aber dennoch vergleichen, und zwar unter Zuhilfenahme eines Ergodentheorems. Es besagt, daß für (fast alle) Mitglieder des Ensembles der Mittelwert einer Observablen über das Spektrum dem Ensemblemittel gleicht. Bildet man für den Vergleich spektrale Mittelwerte aus experimentellen Daten, so muß man natürlich nur Zustände gleichen Spins und gleicher Parität verwenden, denn nur für sie ist das GOE ein sinnvolles Modell.

Der Gaußsche Abschneidefaktor in Gleichung (2) ist natürlich willkürlich. Deshalb die Frage: Sind die Ergebnisse der Theorie, also z. B. die Form von $P(s)$ in Gleichung (3) und das logarithmische Verhalten von Δ_3, von diesem Faktor unabhängig und damit universell? Im Limes $N \to \infty$ lautet die Antwort Ja, ohne daß ich hier auf Details eingehen könnte.

Chaos und Zufallsmatrizen

Ich habe oben suggeriert, daß Zufallsmatrizen eng mit dem Bohrschen Modell des Compoundkerns verknüpft sind (und letzteres eng mit klassischem Chaos). Obwohl derartige Zusammenhänge vermutlich in den Köpfen mancher theoretischer Kernphysiker und später sicher in denen mancher Chaosforscher als assoziative Gedankenketten existierten, wurde ein formaler Zusammenhang zwischen Chaos und Zufallsmatrizen erst in Form einer Vermutung hergestellt, die 1984 von Bohigas, Giannoni und Schmit formuliert wurde. Sie fordert die Gleichheit der spektralen Fluktuationen von Quantensystemen, die im klassischen Limes voll chaotisch sind, mit denen eines Ensembles von Zufallsmatrizen gleicher Symmetrie [5, 6]. Die Vermutung ist an vielen Systemen mit wenigen Freiheitsgraden numerisch bestätigt worden, wenn auch ein analytischer Beweis bisher aussteht. Wir werden sie als gültig annehmen. Das heißt: Folgen die spektralen Fluktuationen eines Atomkerns den Voraussagen des GOE, dann sagen wir, der Kern verhalte sich chaotisch. Das begründet den Titel dieses Artikels. Für reguläre (integrable) Quantensysteme gilt hingegen, daß die Eigenwerte generisch unkorreliert sind, also einer Poisson-Verteilung folgen.

Wie verhalten sich chaotische Systeme mit gemischtem Phasenraum? Die Existenz von Teilbereichen, die von regulären beziehungsweise chaotischen Trajektorien überdeckt werden, und die genannte Vermutung führen zu der Vorstellung, daß das Spektrum der Eigenwerte eine Überlagerung zweier Spektraltypen ist: Die voll chaotischen Bereiche ergeben GOE-Spektren, die regulären Bereiche unkorrelierte Eigenwerte mit Poisson-Verteilung. Das Verhältnis der jeweiligen mittleren Niveauabstände spiegelt die Phasenraumvolumina beider Typen von Teilbereichen wider. Die resultierenden spektralen Fluktuationen interpolieren zwischen denen des GOE und denen des Poisson-Spektrums.

Im Prinzip bedarf es für die Datenanalyse einer unendlichen Menge von Eigenwerten, um den spektralen Mittelwert ohne Fehler zu bestimmen. In diesem Sinne gilt die genannte Vermutung nur im semiklassischen Limes. Natürlich umfassen die experimentellen Ergebnisse immer nur einen endlichen Teil des Spektrums. Das hat zur Folge, daß der Vergleich mit einem statistischen Fehler behaftet ist. Wichtiger noch ist die Tatsache, daß nicht alle statistischen Maße geprüft werden können. De facto ist der Vergleich fast ausschließlich auf die obengenannten Maße beschränkt: $P(s)$ und $\Delta_3(L)$.

Experimentelle Befunde: Spektren

Ehe ich einige Ergebnisse darstelle, die auf Chaos im Atomkern hinweisen [7], muß ich für die Leser, die der Kernphysik fernstehen, einen kleinen Umweg beschreiten. Ich muß deutlich machen, daß mit der Entdeckung des Schalenmodells durch Haxel, Jensen und Süss und durch Goeppert-Mayer im Jahre 1949 und der des kollektiven Modells durch A. Bohr und Mottelson kurz danach ein Paradigmenwechsel eingeleitet wurde, der das Interesse der Kernphysiker vom Bohrschen Modell des Compoundkerns weg- und auf reguläre Bewegung hinlenkte. Das Bohrsche Modell war durch Daten motiviert, die mit langsamen Neutronen, also bei Anregungsenergien von etwa 8 bis 10 MeV, gewonnen wurden. Schalenmodell und kollektives Modell finden Anwendung bei vergleichsweise geringen Anregungsenergien von bis zu einigen MeV. In den Jahren nach 1949 konzentrierten sich die experimentellen und die theoretischen Kernphysiker fast ausschließlich auf diesen Bereich. Das Problem des Compoundkerns geriet fast völlig in Vergessenheit. Die Eigenschaften der effektiven Wechselwirkung zwischen Paaren von Nukleonen im Schalenmodell, weitere kollektive Modelle und die zugehörigen Spektren und Übergangswahrscheinlichkeiten, sowie der Vergleich der Theorie mit immer umfangreicheren Datenmengen bezüglich Spektren, elektromagnetischen Übergängen, Betazerfällen und anderen spektroskopischen Eigenschaften beherrschte die Diskussion. Der Erfolg dieser Bemühungen ist ein klarer Hinweis darauf, daß Atomkerne nicht voll chaotisch sein können. Und das gilt nicht nur für Anregungsenergien von einigen MeV. Die Riesenresonanz für Dipolanregung, die bei Anregungsenergien von 12 bis 18 MeV auftritt und als Dipolschwingung des Massenschwerpunkts der Neutronen gegen den der Protonen verstanden werden kann, ist Evidenz für reguläres Verhalten bei größeren Energien.

Resultate des GOE beziehen sich auf die spektralen Fluktuationen von Zuständen gleichen Spins und gleicher Parität. Im Gegensatz dazu machen dynamische Kernmodelle typischerweise Aussagen über Zustände mit verschiedenen Quantenzahlen. Das Kollektivmodell für Rotationen sagt zum Beispiel in Kernen mit gerader Protonen- und Neutronenzahl („gg-Kerne“) Rotationsbanden mit den Spins $J = 0, 2, 4, \ldots$ und Anregungsenergien voraus, die proportional zu $J(J+1)$ sind. Und die Riesenresonanz für Dipolanregung hat in gg-Kernen, deren Grundzustand Spin/Parität 0^+ hat, die Quantenzahlen 1^-. Insofern ist theoretisch eine Situation denkbar, bei der Chaos und Kollektivität gleichzeitig existieren: eine Folge von Rotationsbanden, deren Bandenköpfe (Zustände mit Spin 0) der GOE-Statistik genügen. Dieses Extrembeispiel soll allerdings nur der Klärung der Begriffe dienen; es gibt keinerlei Evidenz für derartiges Verhalten.

Insofern mag es aber nicht verwundern, daß es parallel zur starken Evidenz für kollektives Verhalten auch klare Belege für chaotisches Verhalten in Atomkernen gibt. Allerdings stammen sie aus sehr beschränkten Spektralbereichen. Man braucht möglichst lange Folgen von Eigenwerten gleichen Spins und gleicher Parität.

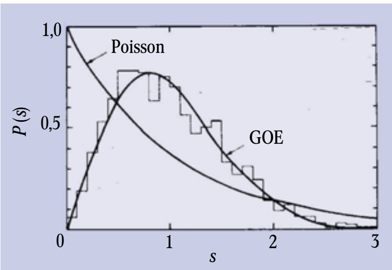

Abb. 3:
Die Verteilung der Abstände nächster Nachbarn $P(s)$ als Funktion vom Abstand s stimmt für das „Nuclear Data Ensemble“ jetzt mit den Erwartungen des Gaußschen orthogonalen Ensembles (GOE) überein. Im Gegensatz zur Poisson-Statistik, bei der ein verschwindender Abstand am häufigsten auftritt, liegt beim GOE das Maximum aufgrund der Niveauabstoßung bei einem endlichen Wert. Die durchgezogene Linie „GOE“ („Poisson“) gibt das GOE (Poisson) Ergebnis. (aus *Bohigas* et al., Nuclear Data for Science and Technology, Reidel, 809 (1983)).

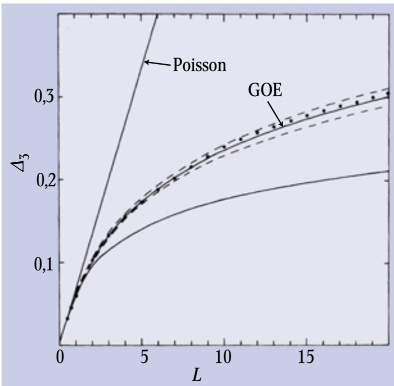

Abb. 4:
Auch hinsichtlich der Δ_3-Statistik fallen. Datenpunkte und GOE-Ergebnis innerhalb der statistischen Unsicherheit (gestrichelte Linien) zusammen. (aus *Haq* et al., Phys. Rev. Lett. 48, 1086 (1982)).

Nur für solche Daten ist ein Vergleich mit GOE-Ergebnissen möglich. Bisher sind Folgen hinreichender Länge (jeweils zwischen 150 und 200 Niveaus) nur mit Hilfe der Streuung langsamer Neutronen (Transmissionsmessungen mit Hilfe der Neutronenflugzeitspektroskopie) und Protonen gewonnen worden (Abb. 2). Die dargestellten Ergebnisse sind einige Jahrzehnte nach der Aufstellung des Bohrschen Modells gewonnen worden, sind also genauer als das in den dreißiger Jahren bekannte Material, und demonstrieren das unter „Bohrs Compoundkern“ Gesagte um so eindrücklicher. Die Resonanzen wurden analysiert; die so gewonnenen Resonanzenergien wurden als Eigenwerte eines gebundenen Systems aufgefaßt und zum „Nuclear Data Ensemble“ (NDE) zusammengefaßt. Dieses enthält insgesamt 1726 Abstände nächster Nachbarn. Die Verteilung $P(s)$ der Abstände nächster Nachbarn (Abb. 3) und die $\Delta_3(L)$-Statistik (Abb. 4) wurden bestimmt und mit den GOE-Voraussagen verglichen. In beiden Fällen ergibt sich innerhalb der statistischen Unsicherheit völlige Übereinstimmung. Das gleiche gilt für die Porter-Thomas-Verteilung der Partialbreiten. Daraus schließen wir, daß sich Kerne in dem Bereich von Anregungsenergien chaotisch verhalten, der bei der Streuung langsamer Neutronen (oder der von Protonen an der Coulomb-Barriere) erreicht wird.

Diese Tatsache führt sofort auf die Frage: Wie verhalten sich andere Bereiche des Spektrums? Von Resonanzen, die oberhalb der mit Neutronenflugzeitspektroskopie zugänglichen Energien liegen, wird weiter unten noch die Rede sein. Wie aber steht es im Gebiet zwischen dem Grundzustand und der Neutronenschwelle, das in schweren Kernen immerhin etwa eine Million Zustände enthält? Leider ist die verfügbare Information sehr beschränkt. Es gibt ganz wenige Atomkerne, für die lückenlose Spektren zwischen dem Grundzustand und der Teilchenschwelle bekannt sind. ^{26}Al ist einer dieser Fälle. Hier zeigt die Analyse völlige Übereinstimmung mit GOE-Fluktuationen, wenn man die (schwache) Isospinverletzung durch Coulomb-Kräfte etc. in Rechnung stellt. Sonst sind trotz jahrzehntelanger experimenteller Untersuchungen lückenlose Sequenzen von Zuständen festen Spins und fester Parität nur direkt oberhalb des Grundzustandes verfügbar. Sie umfassen zwischen zwei und einigen Dutzend Zuständen. Wegen der Kürze der Sequenzen kommt für die Analyse der Fluktuationseigenschaften nur das Maß $P(s)$ in Frage. In einer Untersuchung aller Kerne, in denen lückenlose Sequenzen von mindestens fünf Zuständen mit Spin/Parität 2^+ bekannt sind, wurden die Kerne in Gruppen eingeteilt. Diese waren durch das Verhältnis $R_{4/2}$ der Anregungsenergien des ersten 4^+-Zustandes und des ersten 2^+-Zustandes definiert. $R_{4/2}$ ist ein Maß für Kollektivität im Kern. Die Resultate waren konsistent mit Chaos außer bei Kernen, für die $R_{4/2}$ Werte annimmt, die für reguläres kollektives Verhalten (Rotations- oder Vibrationsspektren) typisch sind. Wegen Mangels an Daten war es nicht möglich, Aussagen für Kerne in unmittelbarer Umgebung abgeschlossener Schalen zu gewinnen. – Dagegen sind die spektralen Fluktuationen von Zuständen mit Spin > 2 in unmittelbarer Umgebung der Yrast-Linie (Zustände tiefster Energie mit festem Spin) mit regulärer Dynamik verträglich. Schließlich stimmt die Verteilung der Intensitäten für elektromagnetische Übergänge (E2 und M1) für Kerne in der s-d-Schale (Kerne mit $16 < A < 40$) mit GOE-Voraussagen (Porter-Thomas-Verteilung) überein.

Diese Ergebnisse (die allerdings zumeist auf einem kleinen Datensatz beruhen) legen den Schluß nahe, daß auch in der Nähe des Grundzustandes Chaos auftritt. Das gilt nicht für Kerne mit regulärer kollektiver Bewegung.

Verfeinerungen der Bethe-Weizsäcker-Formel für die Bindungsenergien der Kerne als Funktion von A berücksichtigen alles, was über Schalenmodellkorrekturen, Paarkraft etc. bekannt ist. Die zahlreichen Parameter werden durch den besten Fit an die Daten bestimmt. Die verbleibenden Differenzen zwischen bestem Fit und Daten schwanken um den Mittelwert Null mit einer Breite von etwa 0,5 MeV. Diese Schwankung ist als Manifestation chaotischer Dynamik interpretiert worden.

Theoretische Untersuchungen

Parallel zu diesen Analysen experimenteller Daten gibt es theoretische Untersuchungen [8]: Im Schalenmodell oder in einem kollektiven Modell werden Spektren berechnet und mit $P(s)$ und $\Delta_3(L)$ analysiert. Bei Schalenmodellrechnungen bedient man sich häufig des „Two-Body Random Ensemble" (TBRE): Die Zweiteilchen-Matrixelemente der effektiven Wechselwirkung werden als gaußverteilte unkorrelierte Zufallsvariabeln aufgefaßt. Damit werden Aussagen gewonnen, die von der speziellen Form der effektiven Wechselwirkung unabhängig sind und – im Rahmen der statistischen Fehler – für fast alle solche Wechselwirkungen gelten. Rechnungen mit dem TBRE gehen bis in die siebziger Jahre des zwanzigsten Jahrhunderts zurück und wurden vor etwa zehn Jahren mit erheblichem Aufwand für Kerne in der s-d-Schale durchgeführt. Die spektralen Fluktuationen sind in allen Fällen mit dem GOE verträglich. Ähnliche Rechnungen gibt es für eines der kollektiven Modelle (das „Interacting Boson Model"). In Abhängigkeit von den Parametern des Modells findet man auch hier große Bereiche chaotischen Verhaltens. Ausnahmen bilden solche Parameterwerte, bei denen das Verhältnis $R_{4/2}$ die oben erwähnten speziellen Werte annimmt, die für reguläres kollektives Verhalten charakteristisch sind.

Zusammenfassend können wir also feststellen, daß Experiment und Theorie übereinstimmend auf chaotisches Verhalten auch in der Nähe des Grundzustandes hinweisen, mit Ausnahme jener Kerne, die reguläres kollektives Verhalten zeigen. In welchem Verhältnis steht diese Aussage zu den sehr erfolgreichen Bemühungen, Kernspektren und Übergangswahrscheinlichkeiten mit Hilfe des Schalenmodells (inklusive effektiver Wechselwirkung) oder der kollektiven Modelle zu reproduzieren und zu deuten? Sind solche Bemühungen physikalisch uninteressant (außer für Kerne mit regulärer Dynamik)? Oder gilt umgekehrt, daß das Auftreten von Chaos für die Interpretation von Spektren bedeutunglos ist? Ich glaube nicht, daß es eine allgemein akzeptierte Antwort auf diese Fragen gibt. Ich persönlich sehe die Gültigkeit des GOE als einen starken Hinweis auf zwei Aussagen: (i) Die Eigenfunktionen sind stark durchmischt, d. h. sie enthalten viele Schalenmodellzustände mit etwa gleichem Gewicht. (ii) Das System ist instabil, d. h. eine kleine Änderung der Wechselwirkung führt zu einer qualitativen Änderung des Spektrums und der Eigenfunktionen. Dabei bedeutet „klein" eine Änderung von der Größenordnung des mittleren Niveauabstandes.

Die Tatsache, daß Rechnungen mit dem TBRE auf chaotisches Verhalten führen, legt andere Fragen nahe: Welcher Mechanismus führt auf dieses Verhalten? Und was sind die Bedingungen dafür, daß die effektive Wechselwirkung einmal chaotisches Verhalten und ein andermal reguläres kollektives Verhalten hervorruft?[2)] Diese Fragen haben bisher keine definitiven Antworten gefunden. Die erste ist insbesondere im Rahmen eines Modells studiert worden, bei dem man von den durch Spin, Drehimpuls und Isospin hervorgerufenen Komplikationen absieht. Man betrachtet m Fermionen in l entarteten Einteilchenzuständen, die durch eine k-Teilchenwechselwirkung interagieren und interessiert sich für $l \gg m \geq$ k. Die Matrixelemente der Wechselwirkung sind gaußverteilte unkorrelierte Zufallsvariablen. Dies ist das „k-body embedded ensemble of Gaussian random matrices". Der Fall $k = 2$ ist physikalisch relevant. Bisher ist es nicht möglich gewesen, für diesen Fall und $m \gg 2$ analytisch zu entscheiden, ob Chaos auftritt. Es gibt aber starke Hinweise darauf, daß das nicht der Fall ist. Die Frage nach dem Mechanismus, der im Kern zu chaotischem Verhalten führt, ist also weiter offen.

2) Dabei unterstelle ich natürlich, daß kollektives Verhalten aus dem Schalenmodell mit effektiver Wechselwirkung folgt, was bisher wegen des Umfangs der dafür nötigen Rechnungen nicht sicher belegt ist.

Wie sind die genannten Eigenschaften (Chaos und reguläre Kollektivität) mit der elementaren Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung verknüpft? Wie eingangs erwähnt, ist ein System von Billardkugeln in festem Volumen voll chaotisch. Die elementare Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung ist bei kleinen Abständen stark abstoßend. Ist dieser Umstand letztendlich die Ursache für chaotisches Verhalten? Die Antwort steht ebenfalls aus. Die theoretische Behandlung der Abstoßung erfordert komplexe Rechnungen. Der Zusammenhang zwischen deren Ergebnis und dem Ausgangsproblem ist nicht hinreichend transparent. Außerdem ist Kernmaterie so dicht, daß der klassische Limes auch bei sehr hohen Anregungsenergien nicht erreicht wird, Analogien zu klassisch chaotischen Systemen also fragwürdig sind.

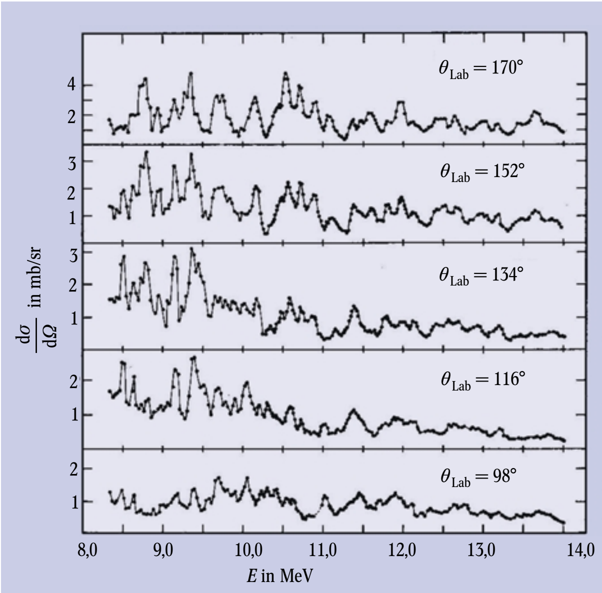

Abb. 5: **Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die inelastische Protonenstreuung am ^{26}Mg (Population des zweiten angeregten Zustandes) weist überlappende Resonanzen auf (aus *Häusser* et al., Nucl. Phys. A 109, 329 (1968)).**

Compoundkernreaktionen

Auch die Theorie der Kernreaktionen liefert ein frühes Beispiel für Chaos – in diesem Fall für chaotische Streuung, noch ehe dieser Begriff geprägt wurde. Die bei der Neutronenstreuung beobachteten Resonanzen verhalten sich stochastisch. Also kann auch der Wirkungsquerschnitt selbst als stochastische Variable aufgefaßt werden. In der statistischen Theorie der

Kernreaktionen [9] werden die Resonanzen durch das GOE modelliert. Die Theorie gestattet es, mittlere Wirkungsquerschnitte und die Varianz und Autokorrelationsfunktion von Wirkungsquerschnitten jeweils als Ensemblemittelwerte zu berechnen. Spektrale Fluktuationen werden vom GOE parameterfrei vorausgesagt, wenn der Parameter λ in Gleichung (2) durch den mittleren Niveauabstand festgelegt wird. Im gleichen Sinne bestimmt die statistische Theorie der Kernreaktionen die genannten Ensemblemittelwerte des Wirkungsquerschnittes parameterfrei, wenn die mittleren Elemente der Streumatrix festgelegt werden. Das geschieht im Rahmen einfacher dynamischer Modelle (optisches Modell, „coupled channels approach"), deren Parameter experimentell bestimmt werden.

Mit wachsender Anregungsenergie nimmt der mittlere Niveauabstand exponentiell ab, wohingegen die mittlere Zerfallsbreite exponentiell wächst (es stehen exponentiell mehr Endzustände für den Zerfall zur Verfügung). Bei der Streuung langsamer Neutronen haben wir es mit Resonanzen zu tun, deren mittlere Breite Γ klein ist gegen den mittleren Abstand d („isolierte Resonanzen"). Einige MeV oberhalb dieses Energiebereichs kehrt sich das Verhältnis um: Wir sind im Bereich „überlappender Resonanzen" $\Gamma \gg d$. Hier werden statistische Schwankungen des Wirkungsquerschnitts beobachtet („Ericson-Fluktuationen", Abb. 5). Ist dieses Phänomen mit Hilfe der statistischen Theorie der Kernreaktionen quantitativ ebenso zu erfassen wie der Wirkungsquerschnitt bei isolierten Resonanzen? Mit anderen Worten: Gilt die statistische Theorie sowohl für $\Gamma \ll d$ als auch für $\Gamma \gg d$ (und dann also auch im Zwischenbereich)?

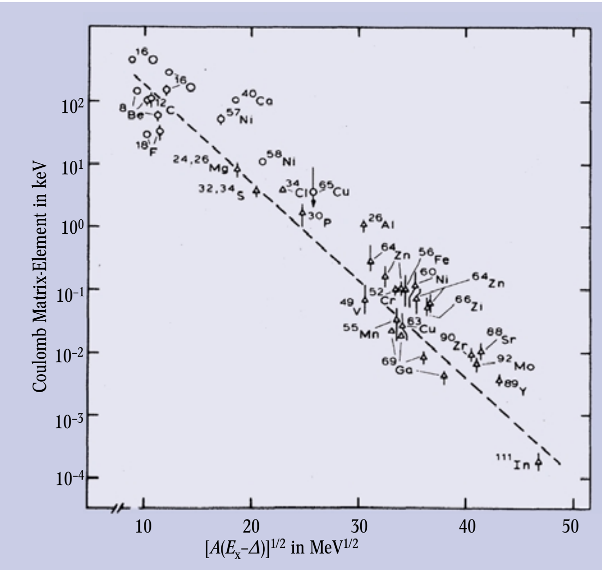

Abb. 6:
Coulomb-Matrixelemente als Funktion von A und Anregungsenergie E_x, letztere vermindert um die Paarkraft Δ [10].

Die Antwort ist ein uneingeschränktes Ja. Die phänomenologisch bestimmten Eigenschaften von Ericson-Fluktuationen wurden theoretisch bestätigt. Die Hauser-Feshbach-Formel ergibt sich im Bereich stark überlappender Resonanzen als nullte Näherung einer systematischen Entwicklung des mittleren Wirkungsquerschnitts nach Potenzen von d/Γ. Die Theorie liefert explizite Ausdrücke für den mittleren Wirkungsquerschnitt im gesamten Bereich von Γ/d-Werten, von den isolierten Resonanzen bis zu den stark überlappenden Resonanzen. Das geschieht mit Hilfe der aus der Festkörpertheorie entlehnten Methode der Grassmann-Integration. Die Ergebnisse gehören zum Standardrepertoire von Programmen zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten. Die hierfür entwickelten Methoden haben auch Anwendung in anderen Bereichen der Physik (mesoskopische Systeme) gefunden.

Symmetriebrechung

Die Isospinquantenzahl wird im Kern durch ladungsabhängige Kräfte, die Parität durch die schwache Wechselwirkung verletzt. Solche Symmetriebrechung wird in chaotischen Quantensystemen unter Umständen enorm verstärkt. Zum Beispiel hängt der Streuquerschnitt langsamer polarisierter Neutronen an unpolarisierten Targets von der Polarisationsrichtung ab, weil die Parität verletzt ist. Der Effekt ist mit bloßem Auge in den Rohdaten sichtbar, obwohl die schwache Wechselwirkung etwa 10^{-6} mal schwächer ist als die Kernkraft. Warum? In einem GOE-Modell für Symmetriebrechung werden zwei Ensembles, die

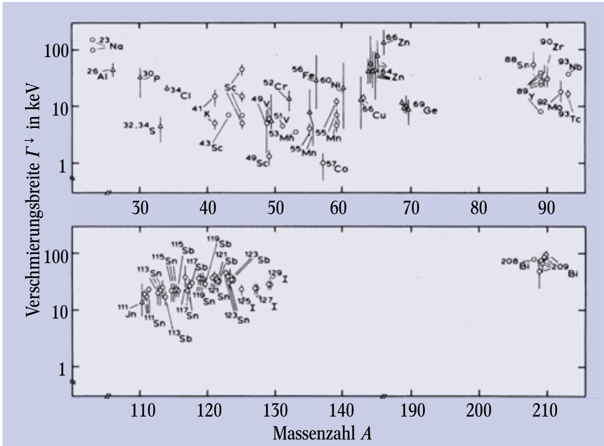

Abb. 7:
Die Verschmierungsbreite $\Gamma^{\downarrow}$ für Isospinverletzung hängt nur wenig von der Massenzahl als Funktion von A ab [10].

Zustände unterschiedlicher Quantenzahlen repräsentieren, durch die symmetriebrechende Wechselwirkung verknüpft. Wegen der orthogonalen Invarianz beider Ensembles wird die Stärke der Symmetriebrechung durch einen einzigen Parameter, das mittlere quadratische Matrixelement v^2 der symmetriebrechenden Kraft, beschrieben. Jedoch hängt v^2 stark von der lokalen Niveaudichte ab. Das liegt daran, daß Eigenfunktionen fester Symmetrie mit wachsender Niveaudichte immer komplizierter werden, ihr Überlapp und damit v^2 also immer kleiner. Theoretische Überlegungen zeigen, daß die Verschmierungsbreite („spreading width")

$$\Gamma^{\downarrow} = 2\pi v^2/d \qquad (5)$$

als Funktion der Anregungsenergie nahezu konstant sein sollte. Da der mittlere Niveauabstand d mit wachsender Anregungsenergie exponentiell abnimmt, ist zu erwarten, daß das Verhältnis $\Gamma^{\downarrow}/d$ mit wachsender Anregungsenergie stark anwächst. Ein zweiter Verstärkungsfaktor (der hier nicht erklärt werden soll) ist besonders an der Neutronenschwelle wirksam. Dort wurden die erwähnten Messungen gemacht. Die beiden Verstärkungsfaktoren führen zu einem deutlich sichtbaren Effekt.

Das umfangreiche experimentelle Material zur Isospinverletzung wurde verwendet [10], um die Abhängigkeit von $\Gamma^{\downarrow}$ von A und in etwa auch von der Anregungsenergie E zu bestimmen. Abb. 6 zeigt die Werte von $\sqrt{v^2}$ als Funktion eines aus Anregungsenergie und Massenzahl gebildeten Parameters, Abb. 7 die resultierenden Werte von $\Gamma^{\downarrow}$ als Funktion von A. Die theoretische Erwartung ($\Gamma^{\downarrow}$ nahezu unabhängig von E) wird erfüllt. Die Stärke der isospinverletzenden Kraft wurde bestimmt. Sie ist konsistent mit der Stärke der Coulomb-Wechselwirkung. Die Daten zur Paritätsverletzung sind weniger umfangreich, aber ebenfalls konsistent mit der Stärke der schwachen Wechselwirkung [11].

Fazit

In den Atomkernen gibt es starke Evidenz sowohl für geordnete (reguläre) als auch für chaotische Dynamik. Beide sollten sich als natürliche Folge des Schalenmodells mit einer effektiven Zweiteilchenwechselwirkung verstehen lassen. Von einem derartigen umfassenden Verständnis sind wir aber noch weit entfernt.

Die Untersuchungen zur chaotischen Dynamik in Atomkernen haben Modellcharakter für das Verhalten von wechselwirkenden Vielteilchensystemen, die der Quantenmechanik gehorchen. Viele der in der Kernphysik entwickelten Ideen und Methoden sind später in anderen Teilgebieten der Physik angewendet worden.

Literatur

[1] *C. Porter*, Statistical Theories of Spectra: Fluctuations, Academic Press, New York (1965)
[2] *M. L. Mehta*, Random Matrices, 2. Aufl., Academic Press, New York (1991)
[3] *T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey* und *S. S. M. Wong*, Rev. Mod. Phys. **53**, 385 (1981)
[4] *T. Guhr, A. Müller-Groeling* und *H. A. Weidenmüller,* Phys. Rep. **299**, 189 (1998)
[5] *F. Haake*, Quantum Signatures of Chaos, Springer, Berlin (1991)
[6] *O. Bohigas*, Les Houches Lecture Notes, session LII on Chaos and Quantum Mechanics, hrsg. von *M.-J. Giannoni, A. Voros* und *J. Zinn-Justin.* North Holland (1991) S. 87
[7] *O. Bohigas* und *H. A. Weidenmüller*, Ann. Rev. Nucl. Part. Science **38**, 421 (1988)
[8] *V. Zelevinsky, B. A. Brown, N. Frazier* und *M. Horoi*, Phys. Rep. **276**, 85 (1996)
[9] *H. A. Weidenmüller*, Statistical Theory of Nuclear Reactions, in: Scattering, hrsg. von *R. Pike* und *P. Sabatier*, Academic Press, San Diego (2002).
[10] *H. L. Harney, A. Richter* und *H. A. Weidenmüller*, Rev. Mod. Phys. **58**, 607(1986)
[11] *G. E. Mitchell, J. D. Bowman* und *H. A. Weidenmüller*, Rev. Mod. Phys. **71**, 445 (1999)

Der Autor

Hans Arwed Weidenmüller hat in Bonn und Heidelberg Physik studiert und in Heidelberg beim Mitbegründer des Kernschalenmodells und späteren Nobelpreisträger J. Hans D. Jensen promoviert. Nach längeren Aufenthalten in den USA kehrte er nach Heidelberg zurück, wo er bis zu seiner Emeritierung ordentlicher Professor an der Universität und Direktor am Max-Planck-Institut für Kernphysik war. H. A. Weidenmüller war und ist Mitglied zahlreicher Kommissionen und Beiräte und hat sich insbesondere um die Zusammenarbeit zwischen israelischen und deutschen Physikern verdient gemacht.