

# Verschränkung und Information

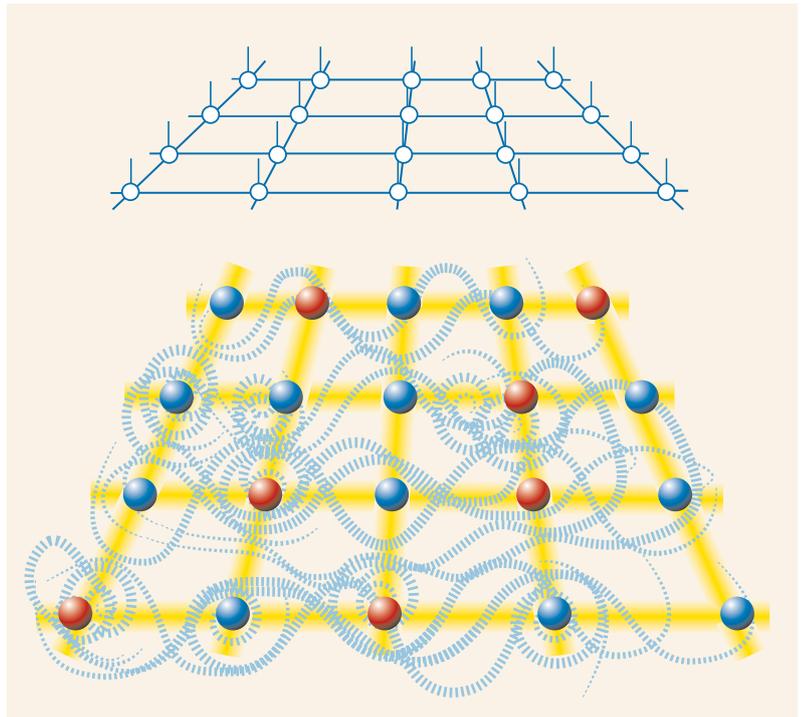
Wie die Quanteninformationstheorie bei der Beschreibung von Quantenvielteilchensystemen hilft.

Mari Carmen Bañuls, J. Ignacio Cirac und Norbert Schuch

Quantenvielteilchensysteme weisen eine Vielzahl interessanter Phänomene auf, sind aber aufgrund ihrer komplexen Verschränkung sehr schwer zu modellieren. Ideen aus der Quanteninformationstheorie können uns helfen, solche Systeme mit Hilfe von Quantensimulatoren zu simulieren sowie basierend auf ihrer Verschränkungsstruktur effizient zu beschreiben.

Der enorme experimentelle Fortschritt in den letzten fünfzig Jahren hat viele grundlegende Tests der Quantenmechanik ermöglicht. Dies hat die Tür zu neuen Anwendungen aufgestoßen, insbesondere im Zusammenhang mit der Verarbeitung und Übertragung von Information. Quantencomputer und -kommunikationssysteme könnten das Gebiet der Informationsverarbeitung und Kryptographie revolutionieren, auch wenn die Konstruktion skalierbarer Geräte trotz erster Prototypen eine große Herausforderung darstellt. Mit diesen Bemühungen geht die Entwicklung einer Quantentheorie der Information einher, die beschreibt, wie sich die quantenmechanischen Gesetze nutzen lassen, um Daten effizient zu verarbeiten und zu übertragen. Zudem stellt diese Theorie eine formale Sprache zur Verfügung, um beliebige Quantensysteme zu beschreiben und viele Phänomene auf eine einheitliche Art zu verstehen. Diese Sprache hat sich über den Bereich der Informationsverarbeitung hinaus entwickelt und hält mittlerweile auch in andere Bereiche Einzug, wie die Atom-, Molekül- und Festkörperphysik, Optik und sogar Hochenergiephysik und Kosmologie.

Die vielleicht verblüffendste Eigenschaft der Quantenphysik ist die Verschränkung. Sie beschreibt eine besondere Art von Korrelationen zwischen zwei oder mehr Systemen, die sich nicht klassisch modellieren lassen. Verschränkung ist die Grundlage einiger der faszinierendsten Phänomene der Quantenphysik und liegt gleichzeitig den meisten ihrer Anwendungen in der Informationsverarbeitung zugrunde, und ihre Erforschung ist daher ein Kernstück der Quanteninformationstheorie. Zwei Systeme gelten als verschränkt, wenn es nicht möglich ist, jedem von ihnen einen unabhängigen Quantenzustand zuzuweisen, oder genauer, wenn wir sie nicht als Produktzustand schreiben können. Verschränkte Zustände tauchen bereits in den einfachsten Quantensystemen, den Quantenbits oder Qubits, auf. Diese können zwei Werte annehmen,  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$ , sowie Überlagerungen davon. Ein verschränk-



Atome, die in einem optischen Gitter präpariert (unten) und miteinander verschränkt sind (gestrichelte Kurven), lassen sich beispielsweise als Quanten-

simulator nutzen. Die mathematische Darstellung des Quantenzustands in einem Gittersystem (oben) kann den Zustand des Experiments beschreiben.

ter Zustand von zwei Qubits ist etwa

$$|0,0\rangle + |1,1\rangle. \quad (1)$$

Dies ist abgesehen von Normierungsfaktoren eine

## KOMPAKT

- Verschränkung liegt dem komplexen Verhalten quantenmechanischer Vielteilchensysteme zugrunde und erschwert ihre klassische Beschreibung außerordentlich.
- Quantensimulatoren nutzen die Gesetze der Quantenphysik, um andere Quantensysteme trotz deren großer Komplexität effizient zu simulieren.
- Quanteninformationstheorie versucht unter anderem, die Verschränkung von Vielteilchensystemen zu charakterisieren und Anwendungen in der Informationsverarbeitung zu finden.
- Darauf basierend lassen sich effiziente Beschreibungen für Systeme mit wenig Verschränktheit entwickeln, insbesondere „Projected Entangled Pair States“ (PEPS).

Dr. Mari Carmen Bañuls, Prof. Dr. J. Ignacio Cirac, Prof. Dr. Norbert Schuch, Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Hans-Kopfermann-Str. 1, 85748 Garching – Preisträgerartikel anlässlich der Verleihung der Max-Planck-Medaille 2018 auf der DPG-Jahrestagung in Erlangen

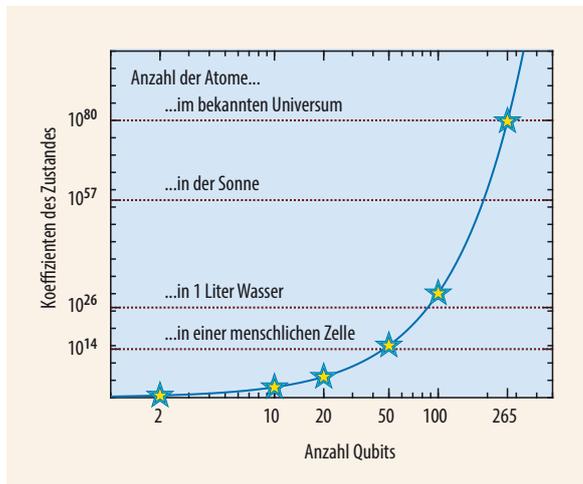


Abb. 1 Die Anzahl der Koeffizienten, die einen Quantenzustand von  $N$  Qubits beschreiben, wächst exponentiell an, was die klassische Beschreibung größerer Quantensysteme unmöglich macht. Bereits die vollständige Beschreibung von 265 Qubits benötigt mehr Zahlen, als es Atome im Universum gibt.

Überlagerung von zwei Zuständen: Im einen liegen beide Qubits im Zustand 0 vor, im anderen beide im Zustand 1. Genauso könnten wir verschränkte Zustände durch Überlagerung aller möglichen Konfigurationen 00, 01, 10 und 11 erhalten. Verschränkung wird nochmals interessanter, wenn wir viele Qubits betrachten, denn die Zahl der möglichen Konfigurationen wächst exponentiell mit der Zahl der Qubits. So können wir für  $N$  Qubits alle Zustände der Form

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N=0}^1 c_{n_1, n_2, \dots, n_N} |n_1, n_2, \dots, n_N\rangle \quad (2)$$

erhalten.  $c_{n_1, n_2, \dots, n_N}$  sind hier komplexe Zahlen, welche die physikalischen Eigenschaften des Zustands eindeutig bestimmen. Da jedes  $n_k$  zwei Werte annehmen kann, gibt es insgesamt  $2^N$  solcher Zahlen. Ein Quantencomputer nutzt genau diese exponentiell vielen verschränkten Zustände, um bestimmte Probleme effizienter zu lösen als sein klassisches Pendant.

Gleichzeitig ist Verschränkung auch für die großen Schwierigkeiten verantwortlich, denen wir bei der Beschreibung von quantenmechanischen Vielteilchensystemen begegnen. Die allermeisten Quantenzustände, die in solchen Systemen auftreten, sind verschränkt, einschließlich zahlreicher physikalischer Phänomene wie Supraleitung, Suprafluidität, gigantischem Magnetwiderstand, topologischen Isolatoren bis zu Quark-Confinement sowie Kern- oder chemischen Reaktionen. Um diese und andere Phänomene untersuchen zu können, müssen wir in der Lage sein, ihren Quantenzustand zu bestimmen. Ist dieser verschränkt, erfordert dies, sämtliche Koeffizienten  $c_{n_1, n_2, \dots, n_N}$  zu berechnen. Da jedoch deren Anzahl exponentiell mit  $N$  anwächst, ist dies unmöglich, sobald wir auch nur einige Dutzend Qubits betrachten (Abb. 1). Dies unterscheidet die Quantenphysik von klassischen Vielteilchenproblemen, bei denen der Zustand des Systems sich etwa durch  $N$  klassische Bits beschreiben und somit stets effizient speichern lässt.

## Andere Quantensysteme für sich arbeiten lassen

Die Quanteninformation hat verschiedene Möglichkeiten entwickelt, mit diesem Problem umzugehen. Die grundlegende Idee ist, dass sich der Zustand einer Anzahl von Qubits stets speichern lässt, indem man einfach dieselbe Zahl an Qubits in dem jeweiligen Zustand präpariert. Die Art dieser Qubits kann völlig verschieden von den Qubits im ursprünglichen Problem sein, solange sie nur gut zu kontrollieren und von Störungen isoliert sind. So kann man Atome als Qubits verwenden, um Probleme von komplexen Elektronensystemen zu untersuchen, wobei der Quantenzustand der Elektronen in internen Zuständen der Atome codiert wird. Quantenzustände in Qubits zu speichern ist äußerst effizient und umgeht die exponentielle Skalierung, die bei Verwendung von klassischen Speichern auftritt – ein Umstand, den Richard Feynman bereits 1982 in einem visionären Vortrag beobachtet hat [1]. Zwar können wir in diesem Fall nicht den gesamten Zustand des Systems auslesen, d. h. alle Koeffizienten  $c$ , da dies die Präparation und Messung einer exponentiellen Anzahl von Systemen erfordern würde. Jedoch sind wir meist auch nur an bestimmten physikalischen Eigenschaften des Systems interessiert, die wir erhalten können, indem wir einfach die entsprechende Messung direkt an den Qubits durchführen. Besteht das zu simulierende System aus komplexeren Objekten, können wir zur Codierung entweder ebenso komplexe Systeme oder aber mehrere Qubits verwenden. Probleme im Kontinuum, beispielsweise in der Hochenergiephysik oder Quantenchemie, lassen sich durch Einführung eines Gitters im Raum oder einer geeigneten Basis von Elektronenorbitalen diskretisieren. Somit reduziert sich das Problem der Simulation von Quantenvielteilchensystemen auf die Kontrolle eines Satzes beliebiger Quantensysteme (z. B. Qubits) sowie die Fähigkeit, die gewünschten Zustände in diesen Systemen zu präparieren.

An welchen Quantenzuständen sind wir nun interessiert, wenn wir Quantenvielteilchensysteme untersuchen? Dazu müssen wir zuerst klären, welche Art von Problemen wir behandeln wollen. In diesem Kontext spielt der Hamilton-Operator oder Hamiltonian  $H$  eine zentrale Rolle: Erstens erlaubt er uns, die Energie des Systems zu bestimmen, zweitens erzeugt er die Dynamik des Quantensystems durch die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = H|\Psi(t)\rangle,$$

die uns sagt, wie sich das System im Laufe der Zeit entwickelt, und schließlich beschreibt er das System im thermischen Gleichgewicht. Insbesondere ist der Zustand des Systems bei Temperatur Null – der so genannte Grundzustand – derjenige, der den Erwartungswert des Hamiltonians  $\langle\Psi|H|\Psi\rangle$  minimiert. Festkörpermodelle wie das Hubbard-Modell, welches das Verhalten von Elektronen in Kristallgittern beschreibt, oder Spinmodelle für den Magnetismus, sind

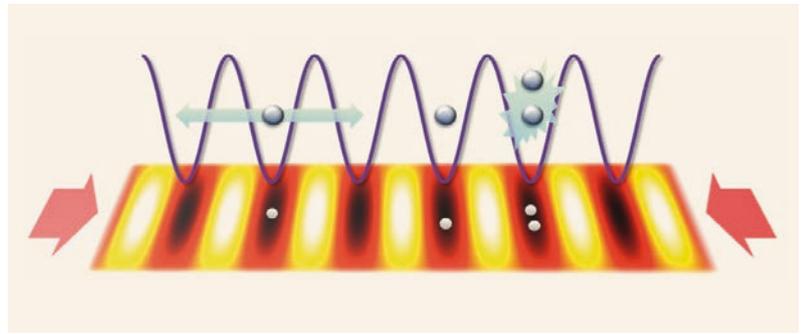
durch wohlbekanntes Hamiltonians charakterisiert. Quantenelektrodynamik und Quantenchromodynamik, die fundamentalen Theorien für die Wechselwirkung zwischen Elektronen, Positronen und Photonen beziehungsweise zwischen Quarks und Gluonen, können ebenso durch Hamiltonians beschrieben werden wie Atome und Moleküle. Die allermeisten Fragestellungen in der Quantenphysik sind somit derart, dass wir einen Hamiltonian kennen oder postulieren und anschließend versuchen, die physikalischen Eigenschaften seines Grundzustands, seines thermischen Zustands bei einer gewissen Temperatur oder seines Zustands nach einer gewissen Zeit zu bestimmen.

Eine besondere Relevanz kommt hier der Zeitentwicklung zu. Der Grund ist, dass wir diese verwenden können, um Grundzustände von Systemen zu präparieren. Dazu müssen wir das System lediglich in einem einfachen Anfangszustand wie  $|0,0,\dots,0\rangle$  präparieren und den dazugehörigen Hamiltonian langsam zum gewünschten Hamiltonian durchstimmen. Das Adiabatische Theorem garantiert nunmehr, dass das System zu jedem Zeitpunkt im Grundzustand ist, wenn dies nur hinreichend langsam geschieht. Obwohl die dafür benötigte Zeit immer noch exponentiell mit der Systemgröße skalieren kann, erlaubt dies doch die Präparation einer großen Zahl von Grundzuständen basierend auf der Simulation von Dynamik.

## Quantencomputer und analoge Simulatoren

Um die Dynamik von Quantensystemen zu simulieren, gibt es zwei verschiedene Herangehensweisen: zum einen die Verwendung eines Quantencomputers und zum anderen die eines analogen Quantensimulators. Ein Quantencomputer nutzt die Gesetze der Quantenphysik, um Information besonders effizient zu verarbeiten. Er besteht aus Qubits, deren Zustand durch die Anwendung von Quantengattern gemäß dem verwendeten Quantenalgorithmus geändert wird. Probleme wie das Faktorisieren von Zahlen oder die Suche in Datenbanken sind damit deutlich effizienter lösbar als mit klassischen Computern. Eine der wichtigsten Anwendungen eines Quantencomputers ist jedoch die Quantensimulation, d. h. seine Fähigkeit, Quantenvielteilchensysteme zu simulieren [1, 2]: Der Quantenzustand, den man nach der Zeitentwicklung mit einem gegebenen Hamiltonian erhält, lässt sich in einem Quantencomputer präparieren, indem man eine bestimmte Sequenz von Quantengattern ausführt. Diese Präparation ist effizient, d. h. die Anzahl der Gatter (und somit die für die Rechnung benötigte Zeit) skaliert polynomial mit der Anzahl der Teilchen und der Zeit  $T$ , ebenso wie die Zahl der benötigten Qubits.

Die Entwicklung eines vollwertigen Quantencomputers, der sich auch für Simulationen eignet, stellt eine große Herausforderung dar. Eine Alternative dazu ist ein Quantensimulator [3, 4]: ein System, das wir sehr gut kontrollieren können und dessen Wechselwirkungen wir so einstellen, dass der resultierende Hamiltonian



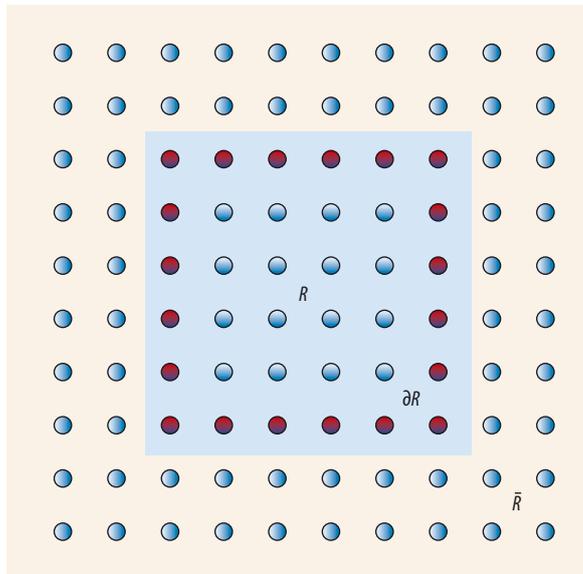
**Abb. 2** Bei einer Quantensimulation im optischen Gitter bilden gegenläufige Laserstrahlen stehende Wellen. Diese erzeugen effektiv ein periodisches Potential, in dessen Minima Atome gefangen sind. Die Atome tunneln von einem Minimum zum nächsten und wechsel-

wirken miteinander, wenn sie sich im gleichen Minimum befinden. Durch Einstellen von Intensität, Frequenz und Polarisation des Lasers simuliert die Dynamik der Atome die Physik von Elektronen, die sich in einem Material bewegen.

der gleiche ist wie der des zu simulierenden Systems. So können wir zum Beispiel Atome in einem optischen Gitter verwenden [5], um die Dynamik von Elektronen in einem Festkörpergitter zu simulieren (**Abb. 2**) – ein Problem, das für klassische Computer sehr schwierig sein kann. Das gleiche System kann zur Simulation weiterer Probleme dienen, z. B. von Spinmodellen oder sogar einfachen Modellen der Quantenelektrodynamik oder Quantenchromodynamik. Wie Quantencomputer verwenden also auch Simulatoren Quantensysteme, um den Zustand des zu simulierenden Systems effizient zu codieren. Die Dynamik wird aber nicht mehr in diskrete Schritte aufgeteilt, sondern korrespondiert vielmehr mit der entsprechend eingestellten Zeitentwicklung des Quantensimulators. Der wesentliche Vorteil dieses Zugangs liegt darin, nicht jede Eigenschaft des Simulators absolut präzise kontrollieren zu müssen. Vielmehr sollte die Simulation auch dann realistische Ergebnisse liefern, wenn der eingestellte Hamiltonian hinreichend nahe an dem zu simulierenden liegt. Der Nachteil ist, dass der Simulator möglicherweise nicht universell ist, also nur bestimmte Modelle und insbesondere keinen Quantencomputer simulieren kann. Derzeit gibt es eine Reihe experimenteller Ansätze, um Quantensimulatoren zu bauen. Die am meisten fortgeschrittenen verwenden Atome in optischen Gittern [6], Ionen in Fallen [7] sowie supraleitende Schaltkreise [4]. Weitere Ideen basieren auf Quantenpunkten [8], Photonen [9] oder polaren Molekülen [10].

## Wie viel Verschränkung?

Viele Gebiete der Physik haben außerordentlich leistungsfähige Methoden entwickelt, um das Quantenvielteilchenproblem zu simulieren, beispielsweise Dichtefunktionaltheorie, dynamische Molekularfeldnäherung (DMFT), Coupled-Cluster-Verfahren oder Monte-Carlo-Methoden, um nur einige zu nennen. Jedes dieser Verfahren hat es ermöglicht, andernfalls unlösbare Probleme anzugreifen. Jedes hat seinen Anwendungsbereich, in dem es sehr gut funktioniert,



**Abb. 3** Das „Area Law“ besagt, dass in physikalischen Zuständen bei Temperatur Null die Verschränktheit einer Region  $R$  mit ihrem Komplement  $\bar{R}$  wie die Länge des Randes  $\partial R$  skaliert. Die Punkte stellen hier einzelne Qubits eines Quantensystems dar, von denen lediglich die roten Qubits am Rand mit den äußeren Qubits verschränkt sind.

aber keines deckt alle möglichen Szenarien ab. Die Quanteninformationstheorie kann hier durch ihre unterschiedliche Perspektive auf das Vielteilchenproblem einen ergänzenden Zugang eröffnen.

Eine natürliche Frage über ein Vielteilchensystem vom Standpunkt der Quanteninformation ist: Wie verschränkt ist es? Verschränkung ist die treibende Kraft hinter Anwendungen wie Quantencomputing, und somit sagt uns die Antwort insbesondere, wie nützlich ein Zustand für solche Anwendungen ist. So ist ein Quantencomputer, der seine Qubits niemals verschränkt, nicht nützlich, da wir seinen Zustand sehr effizient klassisch simulieren können: In einem solchen Fall können wir jedem Qubit einen eigenen Zustand zuweisen, sodass wir lediglich  $N$  individuelle Zustände kennen müssen:

$$|\Psi\rangle = |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle, \text{ wobei } |\phi_n\rangle = c_{n,0}|0\rangle + c_{n,1}|1\rangle \quad (3)$$

den Zustand des  $n$ -ten Qubits beschreibt. In diesem Fall ist der Zustand vollständig durch Angabe der  $2N$  Koeffizienten  $c_{n,i}$  beschrieben, und der Aufwand wächst lediglich linear mit der Größe des Quantencomputers. Aus dem gleichen Grund sind Vielteilchenprobleme, in denen keine Verschränkung auftritt, einfach zu lösen. Man würde folglich erwarten, dass die Beschreibung von Systemen mit sehr wenig Verschränkung weiterhin relativ einfach ist. Dies ist in der Tat der Fall, wenn man erst einmal das zutreffende Maß für die Menge an Verschränkung identifiziert hat.

Eine Möglichkeit zur Beantwortung dieser Frage ist, das System in eine Region  $R$  und ihr Komplement  $\bar{R}$  aufzuteilen, da die Definition von Verschränkung in diesem Szenario eindeutig ist. Weist ein System für alle solche Aufteilungen keinerlei Verschränkung

auf, so muss sein Zustand ein Produkt der Form (3) sein. Was also wäre nun ein Zustand mit wenig Verschränkung? Der Einfachheit halber werden wir uns im Folgenden auf Probleme beschränken, in denen Qubits auf den Gitterplätzen eines ein-, zwei- oder dreidimensionalen Gitters angeordnet sind und nur zusammenhängende Regionen  $R$  ohne Löcher betrachten (**Abb. 3**). Verschränkung ist im Allgemeinen eine extensive Eigenschaft – für einen zufälligen Zustand der Form (2) erwarten wir, dass die Verschränkung zwischen  $R$  und  $\bar{R}$  linear mit der Anzahl  $|R|$  der Qubits in der Region  $R$  anwächst. Falls die Verschränkung einer Region  $R$  also gar nicht oder nur sehr langsam mit  $|R|$  wächst, lässt sich somit sagen, dass nur wenig Verschränkung im Zustand vorliegt. Im besonderen Fall, dass die Verschränkung einer beliebigen Region  $R$  höchstens linear mit der Anzahl der Teilchen am Rand dieser Region,  $|\partial R|$ , wächst, sagen wir, dass der Zustand das „Area Law“ erfüllt [11]. Der Name bezieht sich hier auf die Oberfläche der Region im Gegensatz zu ihrem Volumen und stammt ursprünglich aus der Gravitationsphysik, wo die Entropie Schwarzer Löcher mit der Oberfläche des Ereignishorizonts skaliert.

## Tensornetzwerke

Wir werden nun sehen, dass Vielteilchenzustände, die das Area Law erfüllen, effizient zu beschreiben sind. Die intuitive Idee kommt von der Betrachtung einer bestimmten Klasse von Zuständen, den „Projected Entangled Pair States“, kurz PEPS (**Abb. 4**) [12]. Dazu nehmen wir zunächst ein eindimensionales Gitter und platzieren an jedem Gitterpunkt zwei Qubits. Betrachten wir nun den Zustand, in dem das rechte Qubit an jedem Gitterpunkt mit dem linken Qubit seines rechten Nachbarn verschränkt ist, und zwar im Zustand (1) (**Abb. 4a**). Dieser Zustand erfüllt das Area Law, da jede Region mit ihrem Komplement lediglich durch die beiden äußersten Qubits verschränkt ist: Die Verschränkung beträgt somit 2, unabhängig von der Größe der Region, und ist damit gleich der Anzahl der Gitterplätze am Rand. Wir können diese Art Zustand ebenso in zwei Dimensionen bauen, indem wir vier Qubits an jedem Gitterpunkt platzieren und sie dann mit ihren nächsten Nachbarn verschränken (**Abb. 4c**). Wieder wird die Verschränkung zwischen  $R$  und  $\bar{R}$  nur durch die Gitterplätze am Rand hergestellt und ist somit genau gleich der Länge des Randes. Noch sind diese Zustände sehr speziell, da ausschließlich direkt benachbarte Gitterplätze korreliert sind. Dies lässt sich überwinden, indem wir an jedem Gitterplatz eine Transformation anwenden, welche die vier Qubits an diesem Platz vermischt (**Abb. 4c, d**). Mathematisch entspricht dies einer Abbildung, die den Zustand der vier Qubits auf eine bestimmte Art transformiert. Danach lässt sich der Zustand nicht länger als ein Produkt von Paaren beschreiben und kann tatsächlich – abhängig von der Abbildung, die wir anwenden – über große Entfernungen hinweg korreliert sein. Dies ist eng

mit einem Quanteninformations-Protokoll namens „entanglement swapping“ (Verschränkungsaustausch) verknüpft, das die Basis für so genannte Quantenrepeater bildet: Ist A mit B verschränkt und C mit D, so können wir durch Anwendung einer Transformation auf B und C auch A mit D verschränken. Die Konstruktion lässt sich nun verallgemeinern: Erstens können wir  $z$   $D$ -Niveau-Systeme anstelle von Qubits verwenden, wobei  $z$  die Koordinationszahl des Gitters ist (d. h. die Anzahl der nächsten Nachbarn). Die Abbildung, die wir auf jedem Gitterplatz anwenden, kann zudem die Art der Teilchen ändern und somit  $z$  solcher  $D$ -Niveau-Systeme in ein  $d$ -Niveau-System transformieren, d. h. es kann den Zustand der verschränkten Teilchen auf einen kleineren Raum projizieren. Der finale Zustand nach Anwendung dieser Abbildung wird PEPS genannt. Dabei werden die  $D$ -Niveau-Systeme als virtuelle Teilchen bezeichnet, während die  $d$ -Niveau-Systeme die physikalischen Teilchen beschreiben. Da die Transformationen die Verschränkung beliebiger Regionen nicht erhöhen können, erfüllt der PEPS, ebenso wie der Ausgangszustand, das Area Law.

Die Idee, Zustände einer Art von Teilchen zu projizieren, um eine effektive Theorie für den Zustand anderer Teilchen zu erhalten, tritt ähnlich in vielen Bereichen der Physik auf: So werden beispielsweise Atome oft durch einige wenige Niveaus modelliert, welche die gewünschten Übergänge beschreiben, indem man die Elektronen auf die relevanten Zustände projiziert. Das gleiche geschieht bei Kernen, wo wir anstelle von Quarks mit Protonen und Neutronen arbeiten oder gar den Kern lediglich mittels seines Spins und seiner Schwerpunktkoordinaten beschreiben. Im Unterschied dazu sind die virtuellen Teilchen in PEPS allerdings artifiziiell in dem Sinne, dass sie lediglich ein Hilfsmittel sind, um den Zustand der tatsächlichen Teilchen zu beschreiben.

Im PEPS steckt die Information über den Zustand nicht mehr in exponentiell vielen Koeffizienten wie in (2). Stattdessen ist sie in der Transformation enthalten, die wir auf jeden Gitterplatz anwenden, denn unterschiedliche Transformationen führen zu unterschiedlichen Zuständen. Jede Transformation ist durch  $dD^z$  Parameter gegeben, bei  $N$  Gitterplätzen ergibt dies insgesamt  $NdD^z$  Parameter, die den PEPS charakterisieren. Tatsächlich lässt sich die Abbildung als ein Tensor  $A_{\alpha_1, \dots, \alpha_z}^{\mu}$  vom Rang  $z + 1$  schreiben, wobei der obere Index dem physikalischen Teilchen und die unteren den virtuellen Teilchen entsprechen. Der Gesamtzustand  $|\Psi\rangle$  kann dann in der Form (2) geschrieben werden, wobei die Koeffizienten  $c$  durch Kontraktion (d. h. Summation) der virtuellen Indizes  $\alpha$  gemäß der Gittergeometrie gegeben sind. Zustände, die durch Kontraktion von Tensoren beschrieben werden können, werden Tensornetzwerk-Zustände genannt – die PEPS sind eine Unterklasse davon. Sie haben den Vorteil, dass sie sich kompakt ausdrücken lassen, da lediglich die Parameter der Tensoren anzugeben sind. Da ihre Konstruktion aber der Verschränkungsstruktur physikalischer Zu-

stände mit Area Law folgt, sind sie dennoch in der Lage, diese gut zu beschreiben.

Welche Probleme sind nun einer effizienten PEPS-Beschreibung zugänglich? Grob gesprochen trifft dies auf alle Probleme zu, bei denen wir uns mit Grundzuständen von Hamiltonians befassen, die (i) lokal sind, d. h. bei denen die Wechselwirkungen zwischen Gitterplätzen hinreichend schnell abfallen, und (ii) eine Energielücke aufweisen, d. h. wo die Energie des ersten angeregten Zustands von der des Grundzustands separiert bleibt. Die zweite Bedingung kann jedoch relaxiert werden, um z. B. Systeme am Phasenübergang einzuschließen. Darüber hinaus können wir PEPS konstruieren, die Zustände im thermischen Gleichgewicht effizient beschreiben. Einige relevante Szenarien sind jedoch nicht von dieser Form, etwa Systeme mit langsam abfallenden Wechselwirkungen (z. B. Coulomb-Wechselwirkungen) oder die Dynamik von Quantensystemen. In letzterem Fall wird in der Tat nach einer gewissen Zeit das Area Law verletzt, und eine Beschreibung mittels PEPS und anderer Tensornetzwerke ist dann nicht mehr möglich.

Mit einer solchen effizienten Beschreibung von Quantenzuständen lassen sich zum einen numerische Algorithmen konstruieren, um bestimmte Fragestellungen insbesondere zu Grund- und thermischen Zuständen zu beantworten. Für Grundzustände lässt sich die Lösung variationell finden, indem man die Tensoren bestimmt, die den Erwartungswert der Energie  $\langle \Psi | H | \Psi \rangle$  im PEPS  $|\Psi\rangle$  minimieren [13]. In einer Dimension sind diese Methoden eng mit der Dichtematrixrenormierungsgruppe (DMRG) verwandt, wobei die tensorbasierte Beschreibung flexibler ist und man beispielsweise unmittelbar mit unendlichen Systemen arbeiten kann, indem man die gleiche Abbildung für

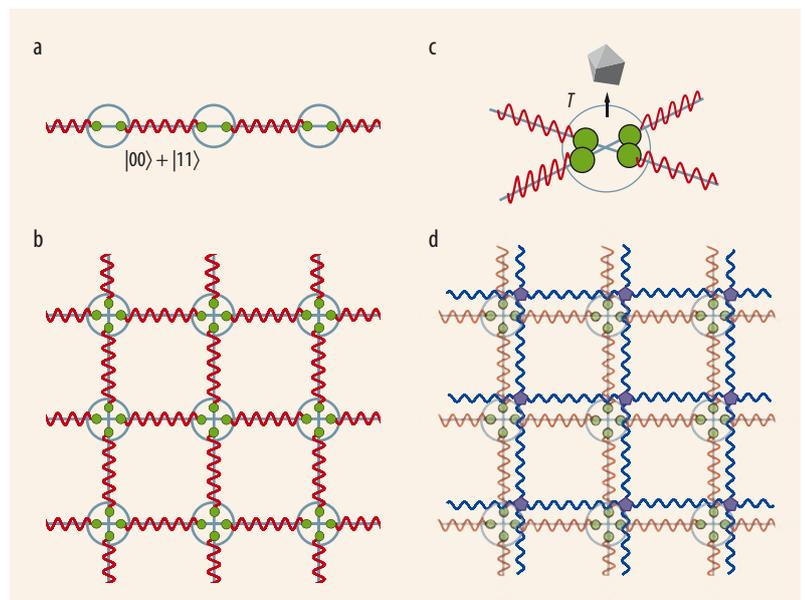


Abb. 4 „Valence-bond states“ formen eine Vorstufe zu PEPS-Zuständen (a). An jedem Gitterplatz befinden sich zwei Qubits (grün), die mit ihren Nachbarn verschränkt sind (rot). Die gleiche Konstruktion ist auch in zwei Dimensionen

mit vier Qubits an jedem Gitterplatz möglich (b). Mit Hilfe einer Transformation  $T$  lassen sich die vier Qubits zu einem neuen Quantensystem kombinieren (c). Das Anwenden von  $T$  auf jeden Gitterplatz ergibt den PEPS-Zustand (d).

alle Gitterpunkte wählt. In höheren Dimensionen sind die Methoden bisher noch nicht genauso effizient, da die benötigte Rechenzeit mit einer hohen Potenz von  $D$  skaliert. Nichtsdestotrotz wurden mit solchen Methoden bereits einige neue Phasen entdeckt, und Phasendiagramme von gängigen Modellen, wie dem  $t$ - $J$ -Modell, berechnet. Diese Methoden lassen sich zudem auf einfache Modelle der Hochenergiephysik anwenden und haben in niedriger Raumdimension außerordentlich genaue Ergebnisse erbracht. Darüber hinaus gelang es, Methoden für die Simulation bei endlichen Temperaturen zu entwickeln ebenso wie Verfahren zur Berechnung niedrigliegender Anregungen, Spektralfunktionen und anderer dynamischer Eigenschaften. Zudem gibt es Methoden, um die Dynamik eines Systems zu bestimmen, jedenfalls für hinreichend kurze Zeiten, während derer die Verschränkung klein bleibt. Schließlich kann auch die Kombination von Tensornetzwerkmethoden mit anderen etablierten Methoden, z. B. DMFT oder Monte-Carlo-Methoden, die Klasse der Modelle erweitern, die wir simulieren können.

Neben ihrem Nutzen als Werkzeuge in numerischen Berechnungen können Tensornetzwerke auch zur Charakterisierung und Klassifikation von physikalischen Eigenschaften von Gittersystemen dienen [14]. Im Fall eines translationsinvarianten Hamiltonians hat der PEPS, der den Grundzustand charakterisiert, den gleichen Tensor an jedem Gitterplatz. Somit charakterisiert ein einziger Tensor sämtliche Eigenschaften des Vielteilchen-Quantenzustands. Insbesondere muss der Tensor für Systeme mit bestimmten exotischen Eigenschaften (z. B. topologischer Ordnung) oder mit bestimmten Symmetrien sehr speziell sein. Die Klassifikation der entsprechenden speziellen Tensoren führt somit zu einer Klassifikation von Quantensystemen mit den entsprechenden Eigenschaften. Darüber hinaus können PEPS dazu dienen, eine Palette einfacher Modelle mit einer Vielzahl nichttrivialer Eigenschaften zu konstruieren. So wurden Tensornetzwerkmethoden verwendet, um vereinfachte Modelle für die AdS/CFT-Korrespondenz in der Stringtheorie zu entwickeln [15], wobei die Wahl der Eigenschaften des Tensors bestimmte gewünschte Eigenschaften der Korrespondenz sicherstellt.

## Quanteninformation und Vielteilchensysteme

Quanteninformation könnte die Art revolutionieren, wie wir Information verarbeiten und übertragen. Die Entwicklung von Quantencomputern und Quantenkommunikationssystemen, die Supercomputer bei der Lösung von schwierigsten Problemen ergänzen oder zertifizierbare Sicherheit bei der Kommunikation ermöglichen könnten, ist in vollem Gang. Die Quanteninformation kann uns jedoch auch mächtige Werkzeuge zur Verfügung stellen, um Probleme in Physik und Chemie zu lösen, die anderenfalls aufgrund der exponentiellen Skalierung der Schwierigkeit mit der Teilchenzahl bzw. Systemgröße unlösbar wären.

Quantencomputer und -simulatoren umgehen diese Schwierigkeit, indem sie diese Vielteilchenzustände mittels anderer Quantensysteme speichern.

Während Quantencomputer derzeit noch nicht so zu skalieren sind, um solche Aufgaben zu lösen, sind Quantensimulatoren deutlich einfacher zu konstruieren und beginnen gerade, uns bei der Lösung solcher Probleme zu helfen. Die Theorie hinter dem Gebiet der Quanteninformation bietet uns zudem neue Ansätze, einige der Herausforderungen in Quantenvielteilchensystemen anzugehen, indem sie uns erlaubt zu verstehen, wie stark Zustände verschränkt sind, und uns effiziente Beschreibungen zur Verfügung stellt, falls die Verschränkung gering ist. Und, was noch wichtiger ist, Quanteninformation stellt uns das Rüstzeug zur Verfügung, um Verschränkung zu beschreiben, die nicht nur die treibende Kraft hinter einer Reihe von Anwendungen ist, sondern uns auch neue Perspektiven auf die Beschreibung etablierter Fragestellungen in verschiedenen Bereichen der Forschung eröffnet.

## Literatur

- [1] R. P. Feynman, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467 (1982)
- [2] S. Lloyd, *Science* **273**, 1073 (1996)
- [3] J. I. Cirac und P. Zoller, *Nat. Phys.* **8**, 264 (2012)
- [4] I. Buluta und F. Nori, *Science* **326**, 108 (2009)
- [5] D. Jaksch et al., *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3108 (1998)
- [6] I. Bloch, J. Dalibard und S. Nascimbene, *Nat. Phys.* **8**, 267 (2012)
- [7] D. Porras und J. I. Cirac, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 207901 (2004)
- [8] P. Barthelémy und L. Vandersypen, *Ann. Physik* **525**, 808 (2013)
- [9] A. Aspuru-Guzik und P. Walther, *Nat. Phys.* **8**, 285 (2012)
- [10] M. Baranov et al., *Chemical Reviews* **112**, 5012 (2012)
- [11] J. Eisert, M. Cramer und M. Plenio, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 277 (2010)
- [12] F. Verstraete und J. I. Cirac, arXiv:cond-mat/0407066 (2004)
- [13] J. I. Cirac und F. Verstraete, *J. Phys. A* **42**, 504004 (2009)
- [14] J. Bridgeman und C. Chubb, *J. Phys. A* **50**, 223001 (2017)
- [15] F. Pastawski, B. Yoshida, D. Harlow und J. Preskill, *JHEP* **06**, 149 (2015)

## DIE AUTOREN

**Mari Carmen Bañuls** promovierte 2000 in Valencia (Spanien) in Physik und 2006 in Informatik. Seit 2005 arbeitet sie als Wissenschaftlerin in der Abteilung Theorie am MPI für Quantenoptik.



Kurt Fuchs Fotodesign

**Ignacio Cirac** promovierte 1991 an der Universidad Complutense in Madrid. Nach einem Postdoc-Aufenthalt am JILA in Boulder war er Professor an der Universidad de Castilla La Mancha und anschließend Professor an der Universität Innsbruck. Seit 2001 arbeitet er als Direktor der Abteilung Theorie am MPI für Quantenoptik und ist seit 2002 außerdem Honorarprofessor an der TU München.

**Norbert Schuch** promovierte 2007 am MPI für Quantenoptik. Nach Stationen als Postdoc am California Institute of Technology und als Juniorprofessor an der RWTH Aachen ist er seit 2015 Leiter der Forschungsgruppe „Verschränktheit komplexer Quantensysteme“ am MPI für Quantenoptik.

