

Phasensprünge in der Zeit

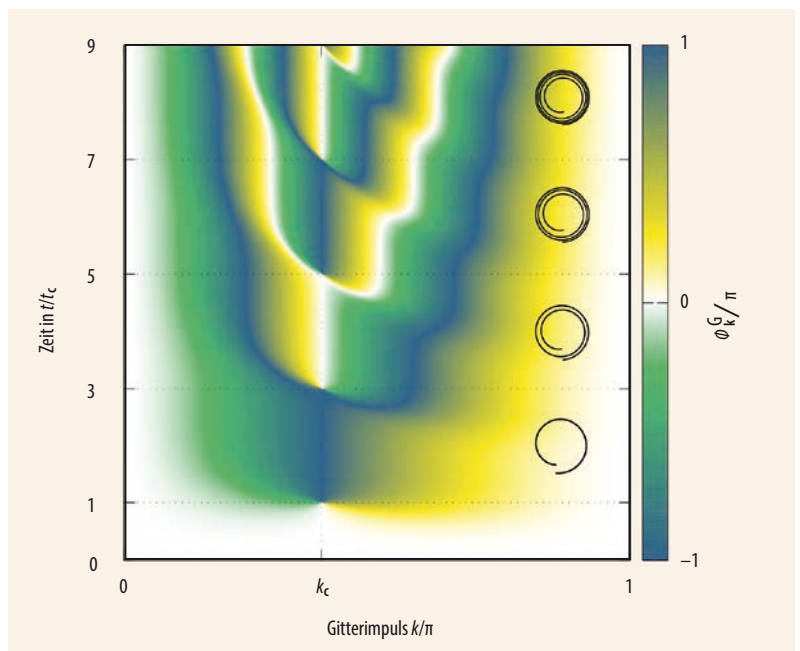
In Quantenvielteilchensystemen reicht allein die zeitliche Entwicklung aus, um ein dynamisches Analogon zu Phasenübergängen hervorzurufen.

Markus Heyl und Jan Carl Budich

Phasenübergänge sind uns aus dem Alltag wohlbekannt: Eis schmilzt in der Sonne, Teewasser kocht im Kessel. Doch diese Phasenumwandlungen dauern ihre Zeit. Anders in der Quantenwelt: Dort kann ein Vielteilchensystem allein durch zeitliche Entwicklung dynamisch ein Analogon zu einem Phasenübergang durchlaufen, wobei sich gewisse physikalische Größen schlagartig in der Zeit ändern.

Makroskopische physikalische Systeme zeigen ein bemerkenswert universelles Verhalten. Unabhängig davon, in welchem Zustand sie anfänglich vorliegen, finden sie sich nach ausreichend langer Wartezeit in einer bestimmten Klasse von Zuständen wieder – dem thermodynamischen Gleichgewicht. Entscheidend für das Erreichen eines Gleichgewichtszustandes ist die Ergodizität des Systems, also im Wesentlichen seine Fähigkeit, beliebige Zustände, die mit den Werten weniger Erhaltungsgrößen im Anfangszustand kompatibel sind, dynamisch zu erreichen. Die Theorie der Vielteilchensysteme ist bemerkenswert erfolgreich darin, solche Gleichgewichtszustände zu beschreiben und zu verstehen. Experimentelle Fortschritte haben jedoch in jüngerer Zeit neue Möglichkeiten eröffnet, bisher unerreichte Einblicke in die Dynamik von Zuständen jenseits des Gleichgewichts in quantenmechanischen Vielteilchensystemen zu gewinnen. Die dort untersuchten Systeme sind so hermetisch von ihrer Umgebung isoliert, dass sie über lange Zeit eine nahezu perfekt quantenmechanisch kohärente Dynamik fernab des Gleichgewichts zeigen, anstatt rasch zu thermalisieren, also dynamisch dem thermodynamischen Gleichgewicht entgegenzustreben. Das Fehlen bewährter theoretischer Zugänge für solche Szenarien macht es schwierig, sie systematisch und allgemein zu beschreiben.

Um die Komplexität des Problems zu verdeutlichen, hat John von Neumann schon vor langer Zeit das Bild geprägt, eine Theorie des Nichtgleichgewichts sei wie eine Theorie von Nichtelefanten. Auch wenn eine allgemeine Nichtgleichgewichtstheorie weiterhin noch nicht greifbar ist, gab es in den letzten Jahren bemerkenswerte Fortschritte im Verstehen grundlegender Prinzipien der Dynamik jenseits des Gleichgewichts. Insbesondere haben kürzlich Experimente mit Quantensimulatoren [1, 2] das theoretisch vorhergesagte Phänomen eines dynamischen Quantenphasenübergangs



Dynamische Quantenphasenübergänge treten auf, wenn sich ein Parameter des Systems abrupt während der Zeitent-

wicklung ändert, hier eine rechts im Bild angedeutete Windungszahl. Erklärungen dazu finden sich im Text auf S. 41.

[3, 4] nachgewiesen. Dieses dynamische Analogon zu Phasenübergängen ähnelt in vielerlei Hinsicht den bekannten Phasenübergängen im Gleichgewicht, wie etwa dem Schmelzen eines Eisblocks, auch wenn wesentliche Unterschiede bestehen bleiben.

Konventionelle Phasenübergänge zeichnen sich dadurch aus, dass sich die Eigenschaften eines thermodynamisch großen Systems schlagartig durch von außen regelbare Parameter verändern (Abb. 1a). So vari-

KOMPAKT

- Dynamische Quantenphasenübergänge treten in der quantenmechanisch kohärenten Zeitentwicklung fernab des Gleichgewichts auf.
- Dabei ändern sich gewisse Eigenschaften des Systems schlagartig als Funktion der Zeit.
- Die Theorie dynamischer Quantenphasenübergänge erlaubt es, allgemeine Prinzipien der Dynamik quantenmechanischer Vielteilchensysteme zu identifizieren.
- Experimente mit Quantensimulatoren haben dynamische Quantenphasenübergänge kürzlich nachgewiesen.

Dr. Markus Heyl, Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme, Nöthnitzer Str. 38, 01187 Dresden und Prof. Dr. Jan Carl Budich, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden, Helmholtzstr. 10, 01069 Dresden

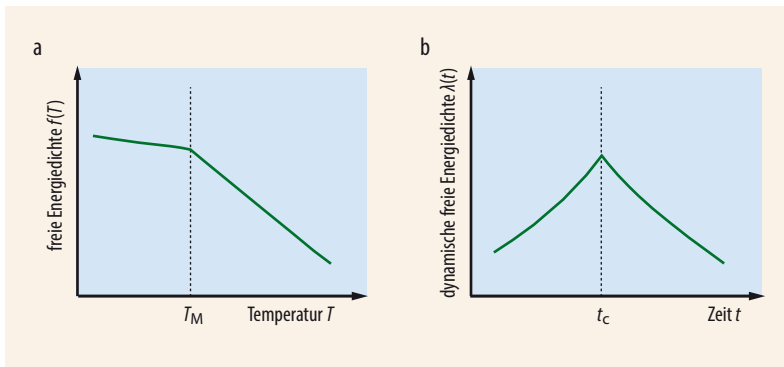


Abb. 1 Ein thermischer Phasenübergang erster Ordnung im Gleichgewicht zeichnet sich durch einen Knick der freien Energiedichte $f(T)$ bei der Temperatur T_M aus (a). Dagegen treten für das dynamische Analogon $\lambda(t)$ bei einem dynamischen Quantenphasenübergang nicht-analytische Strukturen als Funktion der Zeit auf, hier ein scharfer Knick zum Zeitpunkt t_c (b).

iert bei einem Eisblock die Dichte abrupt, wenn seine Temperatur oberhalb der Schmelztemperatur liegt und er flüssig wird. Für die freie Energiedichte als Funktion der Temperatur $f(T)$ tritt bei einem solchen Phasenübergang erster Ordnung ein Knick bei der Schmelztemperatur T_M auf. Im Gegensatz dazu verändern sich Systemgrößen bei dynamischen Quantenphasenübergängen allein dadurch, dass sich das System zeitlich entwickelt (**Abb. 1b**). Dann weist die dynamische freie Energiedichte als Funktion der Zeit $\lambda(t)$ zum Zeitpunkt t_c beispielsweise eine Spitze auf. Um bei der Analogie zum Eisblock zu verbleiben, würde sich dieser also während des Aufheizens auf einen Schlag verflüssigen, anstatt stetig mit der Zeit zu schmelzen. Die alltägliche Erfahrung und einfache physikalische Überlegungen zeigen, dass dies bei einem Eisblock nicht passieren kann. Dynamische Quantenphasenübergänge treten nicht für Größen wie die Dichte auf, sondern betreffen andere inhärent quantenmechanische Eigenschaften

ohne direktes Analogon in der klassischen Physik. Dieser rein quantenmechanische Aspekt verleiht den Übergängen viele interessante und unkonventionelle Eigenschaften, die wir im Folgenden genauer analysieren wollen.

Dafür ist es hilfreich, sich zuerst die quantenmechanische Zeitentwicklung bildlich vor Augen zu führen. Dazu konzentrieren wir uns auf ein konzeptionell einfaches und experimentell zugängliches Protokoll, um eine Dynamik fernab des Gleichgewichts zu erzeugen, bei dem abrupt ein Parameter des untersuchten Systems verändert wird, aber nach dem Umschalten zeitlich konstant ist.

Den quantenmechanischen Zustand schreiben wir als Vektor in der Form $|\psi\rangle$. Dieser Vektor ist ein Element eines hochdimensionalen Zustandsraums, des so genannten Hilbert-Raums. Dessen mathematische Struktur ist für das prinzipielle Verständnis der im Folgenden diskutierten Phänomene zunächst einmal nicht essenziell: Die Prinzipien lassen sich auch mit einem einfachen Beispiel erklären. Eine spezielle Darstellung des Zustandsraums eines Quantenspins der Länge $1/2$, also des kleinsten quantenmechanisch erlaubten Magneten, ist die so genannte Bloch-Kugel (**Abb. 2**). Ihr Nord- und Südpol entsprechen den beiden Zuständen $|+1/2\rangle$ und $|-1/2\rangle$ mit maximaler Ausrichtung des Quantenspins entlang der z -Achse. In der Quantenmechanik sind im Allgemeinen beliebige Überlagerungen von $|\pm 1/2\rangle$ erlaubt, die sich durch zwei Winkel charakterisieren lassen, sodass jeder Zustand des Quantenspins auf einer Kugeloberfläche darstellbar ist. Die quantenmechanische Zeitentwicklung eines Zustands entspricht einer Rotation des Zustandsvektors. Für den hier betrachteten Fall einer einmaligen plötzlichen Parameteränderung ist die Rotationsachse zeitunabhängig. Für den Quantenspin bedeutet dies, dass sich der Zustand entlang einer Kreisbahn auf der Kugeloberfläche bewegt. Im dreidimensionalen Fall ist das sehr einfach zu veranschaulichen, während in einem Vielteilchenproblem die Komplexität in der exponentiell großen Dimensionalität des Hilbert-Raums besteht.

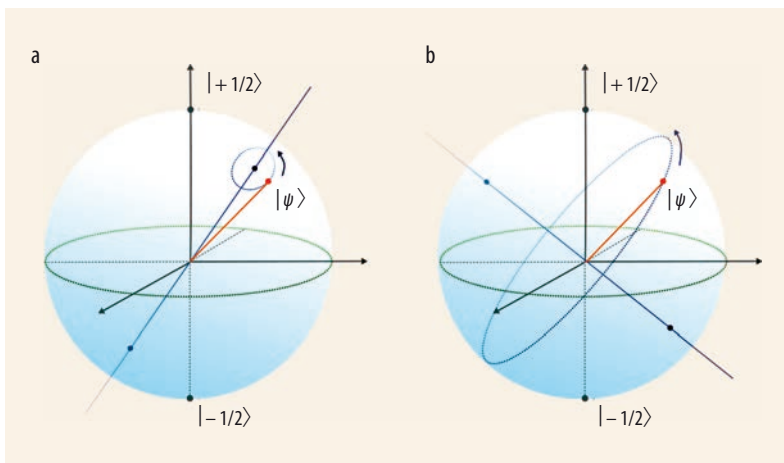


Abb. 2 Jeder quantenmechanische Zustand $|\psi\rangle$ eines Spins der Länge $1/2$ lässt sich als Punkt auf der Oberfläche einer Bloch-Kugel darstellen (rot). Während der zeitlichen Entwicklung bewegt sich der Punkt auf der Kugeloberfläche um eine Rotationsachse (blau). Schneidet

diese die Kugeloberfläche in der Nähe des Anfangszustands, verbleibt der Zustand in der Nähe der Anfangsbedingung (a). Steht die Rotationsachse senkrecht auf dem Anfangsvektor, entfernt er sich während der Zeitentwicklung weit weg von der Anfangsbedingung (b).

Dynamische Quantenphasenübergänge

Basierend auf diesem Bild quantenmechanischer Zustände und Zeitentwicklung können wir uns nun konkret den dynamischen Quantenphasenübergängen zuwenden. Ihr nichtanalytisches Verhalten taucht wie eingangs erwähnt in inhärent quantenmechanischen Objekten auf. Die zentrale Größe in diesem Zusammenhang ist die Loschmidt-Amplitude $\mathcal{G}(t)$, die den Abstand zwischen dem anfänglichen Zustand $|\psi\rangle$ und dem entwickelten Zustand $|\psi(t)\rangle$ bei einer Zeit t misst. Hierbei lässt sich die Rotation $U(t)$ aufgrund der Zeitentwicklung als eine unitäre Matrix $U = \exp(-iHt/\hbar)$ im Zustandsraum schreiben, wobei $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi\rangle$ gilt. Dabei steht H für den Hamilton-Operator, der die Energie des Systems misst, \hbar für das Plancksche

Wirkungsquantum und i für die komplexe Einheit. Im Formalismus der Quantenmechanik ergibt sich $\mathcal{G}(t)$ als Skalarprodukt der beiden Vektoren:

$$\mathcal{G}(t) = \langle \psi | \psi(t) \rangle = \langle \psi | \exp(-iHt/\hbar) | \psi \rangle. \quad (1)$$

Eine der wesentlichen Beobachtungen ist die starke Ähnlichkeit die Loschmidt-Amplitude $\mathcal{G}(t)$ mit einer Zustandssumme, einer zentralen Größe der statistischen Physik:

$$Z(\beta) = \sum_n \langle \psi_n | \exp(-\beta H) | \psi_n \rangle. \quad (2)$$

Hierbei bezeichnet $\beta = 1/(k_B T)$ die inverse Temperatur mit der Boltzmann-Konstante k_B . Die Menge aller Zustände $|\psi_n\rangle$ bildet eine vollständige Basis des Hilbert-Raums. Formal gesehen ist demnach die Zustandssumme eine Summe mehrerer Loschmidt-Amplituden mit der Ersetzung $it \rightarrow \beta$.

Die Zustandssumme bestimmt die freie Energiedichte $f(\beta)$ durch die Relation $f(\beta) = -(N\beta)^{-1} \log[Z(\beta)]$ mit der Anzahl der Freiheitsgrade N . Da die freie Energiedichte alle thermodynamischen Eigenschaften des Systems festlegt, enthält $Z(\beta)$ die gesamte Thermodynamik. Für die dynamischen Quantenphasenübergänge definieren wir daher $g(t) = -N^{-1} \log[\mathcal{G}(t)]$ als dynamisches Analogon zur freien Energiedichte bis auf eine Normierung. Diese Analogie ist formaler Natur: $g(t)$ stellt kein thermodynamisches Potential dar.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen Zustandssummen der Form $Z(\beta)$ und der Loschmidt-Amplitude $\mathcal{G}(t)$ ist das Auftreten komplexer Komponenten anstelle rein reellwertiger Größen. Entsprechend lässt sich $\mathcal{G}(t)$ als eine Zustandssumme mit komplexen Parametern interpretieren. Interessanterweise ist dieses Konzept, komplexe Parameter für Zustandssummen einzuführen, auch für die Theorie der Phasenübergänge im Gleichgewicht wichtig. Wie Polynome sind auch analytische Funktionen wie die Zustandssumme für ein endliches System durch deren Nullstellen bestimmt. Im Limes großer Systeme bildet die Menge an Nullstellen kontinuierliche Strukturen in der Form von Linien oder Flächen in der komplexen Ebene (Abb. 3). Ein Phasenübergang ist dadurch gekennzeichnet, dass eine solche Linie oder Fläche die reelle und damit physikalische Achse eines Kontrollparameters schneidet. Aus der formalen Ähnlichkeit der Loschmidt-Amplitude folgt daher, dass dynamische Phasenübergänge mit derartigen Nullstellen von $\mathcal{G}(t)$ verknüpft sind. Nach Gl. (1) verschwindet hier das Skalarprodukt zwischen dem entwickelten Zustand $|\psi(t)\rangle$ und dem Anfangszustand $|\psi\rangle$, die beiden Vektoren müssen also orthogonal zueinander werden.

Am Beispiel des einzelnen Quantenspins zeigt sich, wie diese Orthogonalität dynamisch ermöglicht werden kann. Auf der Bloch-Kugel sind zwei Zustände orthogonal, wenn sie auf antipodalen Punkten der Bloch-Kugel liegen, beispielsweise die Zustände $|+1/2\rangle$ und $|-1/2\rangle$, die den Nord- bzw. Südpol repräsentieren. Um eine Orthogonalität während der Zeitentwicklung zu erreichen, muss die Rotationsachse genau senkrecht auf dem Anfangsvektor $|\psi\rangle$ stehen (Abb. 2b).

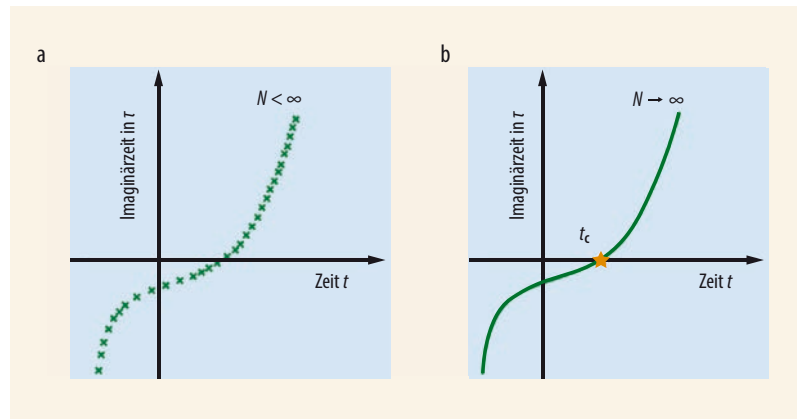


Abb. 3 In der komplexen Zeitebene bilden die komplexen Nullstellen von Zustandssummen eine abzählbare Menge für ein System mit endlich vielen Freiheitsgraden $N < \infty$ (a). Im thermodyna-

mischen Limes $N \rightarrow \infty$ bilden die Nullstellen kontinuierliche Strukturen. Schneiden diese am Punkt t_c die Zeitachse, findet ein dynamischer Quantenphasenübergang statt (b).

Hier offenbart sich ein Unterschied zwischen einem einzelnen Quantenspin und einem thermodynamisch großen System. Obwohl auch bei letzterem eine Rotation die Zeitentwicklung beschreibt, kann bei einer unendlichen Zahl an Freiheitsgraden die Situation auftreten, dass die entscheidende Orthogonalität unabhängig von der genauen Orientierung der Rotationsachse entsteht. Ähnlich wie bei Phasenübergängen im Gleichgewicht sind in diesem Fall auch die dynamischen Quantenphasenübergänge robust, wie sich in diversen Beispielen herausgestellt hat [4, 5]. Kleine Störungen in den mikroskopischen Parametern können Details wie die kritische Zeit eines dynamischen Quantenphasenübergangs verschieben, ändern aber nicht das prinzipielle Auftreten und die wesentlichen Eigenschaften. Dazu sei hier erwähnt, dass die Theorie der dynamischen Quantenphasenübergänge noch nicht die Reife der Theorie der Phasenübergänge im Gleichgewicht erreicht hat. Es ist demnach weiterhin mit Überraschungen auf diesem Gebiet zu rechnen, die Erfahrungen mit konventionellen Phasenübergängen widersprechen.

Experimente in Ionenfallen

Dynamische Quantenphasenübergänge konnten kürzlich bei einem Experiment in Ionenfallen beobachtet werden. Eine Ansammlung mehrerer Quantenspins koppelt dabei über eine spezielle langreichweitige Wechselwirkung, bei der jedes Paar von zwei Quantenspins gleich stark und unabhängig von deren Entfernung interagiert. Für diese spezielle Wechselwirkungsform lassen sich die wesentlichen Aspekte der Dynamik weiterhin durch eine Darstellung auf einer Kugeloberfläche verstehen (Abb. 4). Allerdings handelt es sich dabei um den kollektiven Spin aller mikroskopischen Quantenmagnete. Dieser kollektive Spin kann anfänglich fast perfekt am Nordpol der Kugel präpariert werden, was einem reinen Zustand mit ver-

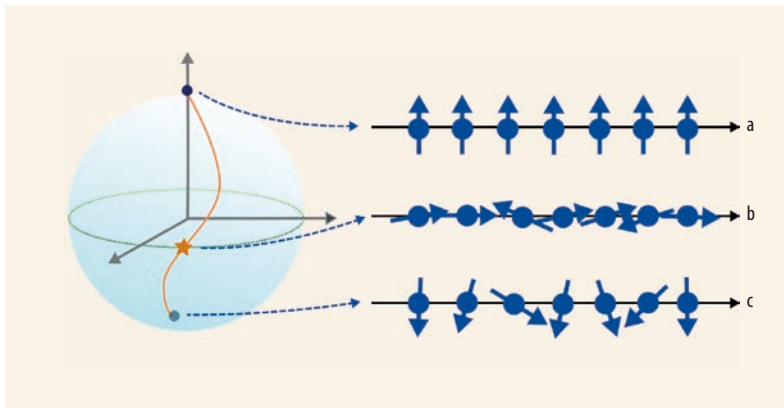


Abb. 4 Für einen kollektiven Spin entsprechen Nord- und Südpol der Bloch-Kugel vollständig polarisierten Zuständen mit entgegengesetztem Vorzeichen (a). Dagegen mitteln sich am Äquator die Beiträge der einzelnen Quantenspins zu Null (b). Andere Zustände zeichnen sich durch unvollständige Polarisation aus (c). Der dynamische Quantenphasenübergang findet hier statt, sobald in der Zeitentwicklung (orange) der Äquator geschnitten wird (Stern).

nachlässigbaren thermischen Fluktuationen entspricht. Für die nachfolgende Zeitentwicklung, die sich auch in diesem Fall als eine Trajektorie auf der Kugeloberfläche verstehen lässt, ist dies ein hochangeregter Zustand, der eine Dynamik fernab des Gleichgewichts induziert. Allerdings ergeben sich dynamische Quantenphasenübergänge des kollektiven Spins nicht dann, wenn der Zustand den antipodalen Punkt – hier den Südpol – erreicht, sondern sobald er den Äquator schneidet. Entscheidend ist hier, ob die Magnetisierung des kollektiven Spins entlang der z-Achse verschwindet – dies geschieht genau am Äquator. Denn auch der Südpol entspricht einem vollständig polarisierten Zustand, aber mit umgekehrtem Vorzeichen als der Nordpol. Entsprechend dient das Verschwinden der Magnetisierung als experimenteller Nachweis des dynamischen Quantenphasenübergangs in diesem System.

Aus den experimentellen Daten lässt sich die Funktion $\lambda(t) = 2\text{Re}[g(t)]$ bestimmen, die dem Realteil des zuvor eingeführten formalen Analogons zu einer freien

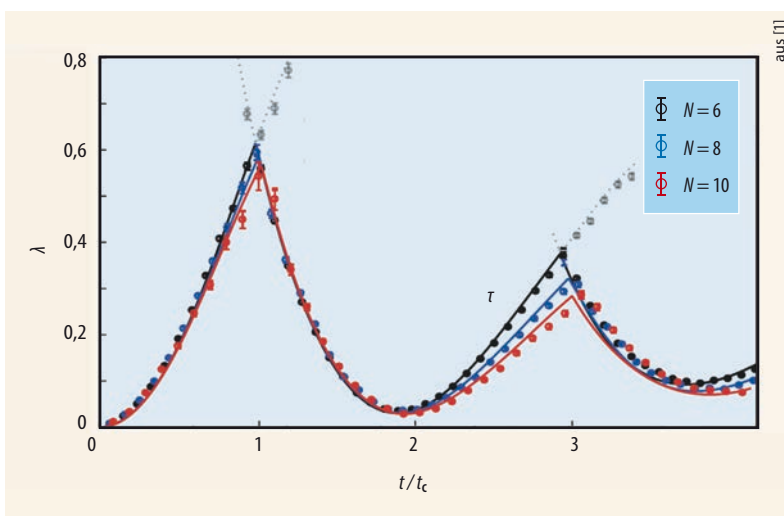


Abb. 5 Das dynamische Analogon $\lambda(t)$ zu einer freien Energiedichte weist für 6, 8 und 10 Freiheitsgrade als Funktion der Zeit knickartige Strukturen auf. Für $t/t_c = 1$ und $t/t_c = 3$ finden folglich dynamische Quantenphasenübergänge statt.

Energiedichte $g(t) = -N^{-1} \log[\mathcal{G}(t)]$ entspricht, wobei N die Gesamtzahl der simulierten Quantenspins repräsentiert. Die Nullstellen in der Loschmidt-Amplitude $\mathcal{G}(t)$ äußern sich in den klar erkennbaren knickartigen Strukturen im zeitlichen Verlauf von $\lambda(t)$ (Abb. 5). Die Dynamik zeichnet sich dabei durch eine Sequenz von Übergängen aus, von denen nur die ersten beiden im Experiment gemessen wurden. Durch den Zusammenhang zwischen den dynamischen Quantenphasenübergängen und den Nullstellen der Magnetisierung führt diese Sequenz zu einer oszillatorischen Dynamik der Magnetisierung mit periodisch wiederkehrenden Nullstellen. Dieser Zusammenhang tritt häufig auf [4].

Wie zuvor betont tritt das nichtanalytische Verhalten in der Zeit in quantenmechanischen Amplituden auf, sodass sich die Frage aufdrängt, welche weiteren rein quantenmechanischen Eigenschaften diese Übergänge enthalten. Eine Möglichkeit, dies zu quantifizieren, liegt in quantenmechanischer Verschränkung. Diese ist im Allgemeinen experimentell schwer zugänglich, aber in Ionenfallen messbar, beispielsweise anhand der so genannten quantenmechanischen Quetschung (Squeezing). Es ist eine inhärent quantenmechanische Eigenschaft, dass individuelle Messungen, beispielsweise der Ausrichtung des kollektiven Quantenspins, nicht deterministisch sind, sondern von Messung zu Messung fluktuierende Werte liefern. Die Stärke dieser Fluktuationen kann man sich als Unschärfe des kollektiven Spins auf der Oberfläche der Bloch-Kugel vorstellen, für die es in der Quantenmechanik fundamentale untere Schranken gibt. Deshalb lassen sich die gesamten Fluktuationen nicht beliebig verringern, aber entlang verschiedener Richtungen auf der Kugeloberfläche verzerren. Dadurch werden die Fluktuationen in manche Richtungen kleiner und in andere größer. Diese Verzerrung der Fluktuationen wird als Quetschung bezeichnet, hier durch den Parameter ξ_s^2 quantifiziert: Kleinere Werte bedeuten eine stärkere Quetschung. Insbesondere lassen sich Werte von $\xi_s^2 < 1$ nicht mit klassischen Zuständen erzeugen und sind direkt mit quantenmechanischer Verschränkung verbunden. Wie man aus den experimentellen Daten sehen kann, nimmt die Quetschung des Zustands gerade in der Umgebung der dynamischen Quantenphasenübergänge bei den Zeiten t_c und $3t_c$ stark zu (Abb. 6).

Topologische Quantenphasenübergänge...

Abschließend möchten wir noch einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen dynamischen und topologischen Quantenphasenübergängen [6] erläutern. Mit der Entdeckung topologischer Materiezustände, wie etwa topologischer Isolatoren, hat sich ein neues Paradigma zur Klassifikation von Quantenmaterie etabliert [7]: Topologisch verschiedene Zustände können in allen Merkmalen übereinstimmen, die bei der konventionellen, auf lokalen Ordnungsparametern basierenden Klassifikation von Materie berücksichtigt werden. Dennoch gehören sie verschiedenen Phasen

an, da sie sich in globalen topologischen Eigenschaften unterscheiden. Das gilt beispielsweise für die in Einheiten von 2π quantisierte Windungszahl einer Winkelvariable, die sich in einem eindimensionalen System nichtwechselwirkender Fermionen definieren lässt. Ein Beispiel hierfür wurde schon in der **Abbildung** auf Seite 37 gezeigt und wird weiter unten noch genauer diskutiert. Solche so genannten topologischen Invarianten spiegeln sich in Messgrößen wider, deren quantisierter Wert robust gegenüber Störungen des Systems ist. Als Paradebeispiel hierfür ist die experimentell mit beeindruckender Präzision nachgewiesene Quantisierung der transversalen Leitfähigkeit in Quanten-Hall-Systemen zu nennen. An topologischen Quantenphasenübergängen ändern solche topologisch quantisierten Größen ihren Wert.

... dynamisch nachweisen

Ein enger Zusammenhang zu dynamischen Quantenphasenübergängen wird in der Nichtgleichgewichtsdynamik topologischer Quantenmaterie sichtbar [8, 9]. Wir betrachten ein System, das im Grundzustand eines Hamilton-Operators präpariert wurde und das eine plötzliche Parameteränderung an eben diesem Hamilton-Operator aus dem thermischen Gleichgewicht bringt. Es stellt sich heraus, dass das Beobachten dynamischer Quantenphasenübergänge in der Zeitentwicklung eines solchen Systems in vielen Fällen direkt darüber Auskunft gibt, ob sich die topologische Phase des Grundzustands des Hamilton-Operators bei der Parameteränderung verändert hat. Die Kurzzeitdynamik des Systems fernab des Gleichgewichts erlaubt also nachzuweisen, ob es einen topologischen Quantenphasenübergang durchlaufen hätte, wenn es am absoluten Temperaturnullpunkt gehalten worden wäre. Bemerkenswerterweise ermöglicht dies die Detektion topologischer Quantenphänomene, ohne einen Tieftemperaturzustand in einer topologischen Phase präparieren zu müssen.

Ein einfaches Modell dafür stellt wieder der quantenmechanische Spin der Länge $1/2$, also ein Zwei-Niveau-System dar. Wir betrachten hierzu einen eindimensionalen Kristall derartiger Spins mit der Periodizität oder Gitterkonstante a . Um den Grundzustand eines solchen Systems zu charakterisieren, bietet es sich an, die Ausrichtung des Spins im reziproken Raum, also als Funktion des Gitterimpulses k darzustellen. Topologische Isolatoren zeichnen sich dann durch die Hochsymmetriepunkte $k = 0$ und $k = \pi/a$ aus, an denen der Spin vertikal zu antipodalen Punkten ausgerichtet ist. Für das Nichtgleichgewichts-Szenario einer plötzlichen Parameteränderung vergleicht man nun die Ausrichtung des Spins im Grundzustand nach der Änderung mit der Ausrichtung im Ausgangszustand. Da nur die relative Ausrichtung entscheidend ist, stellen wir uns die beiden zu vergleichenden Spins für festes k als Zweibein vor, welches wir zunächst als Ganzes so drehen, dass der Spin des Ausgangszustands für alle

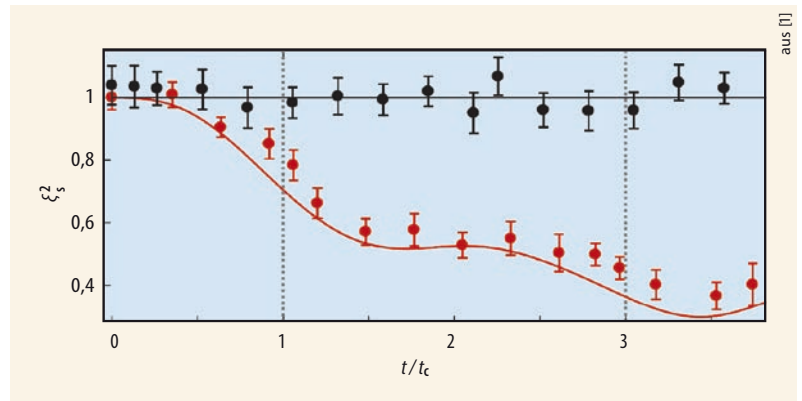


Abb. 6 Dynamische Quantenphasenübergänge zeigen sich auch in inhärent quantenmechanischen Eigenschaften. Die Stärke der Fluktuationen ξ^2 um den Mittelwert des kollektiven Spins (rot) belegt quantenmechanische Verschränkung, weil die Fluktuationen sonst um 1 schwanken würden (schwarz). Jedes Absinken ist mit einem dynamischen Quantenphasenübergang verknüpft.

Werte von k in positive z -Richtung deutet (**Abb. 7**). Zeigt in diesem relativen Bild nun der zweite Spin, welcher den Grundzustand nach der Änderung charakterisiert, an den beiden Hochsymmetriepunkten $k = 0$ und $k = \pi/a$ zu entgegengesetzten Polen, so hat sich die topologische Phase des Grundzustandes geändert. Als kontinuierliche Funktion von k muss dazu der zweite Spin den Äquator der Kugeloberfläche bei mindestens einem Gitterimpuls k_c zwischen $k = 0$ und $k = \pi/a$ überqueren. Da die für das Auftreten von dynamischen Quantenphasenübergängen entscheidende Orthogonalitätsbedingung aber genau mit dieser Überquerung des Äquators zusammenfällt, impliziert die Änderung der Topologie unmittelbar das Auftreten dynamischer Quantenphasenübergänge.

Eine klare Signatur der dynamischen Quantenphasenübergänge wird dabei in der zeit- und impuls-

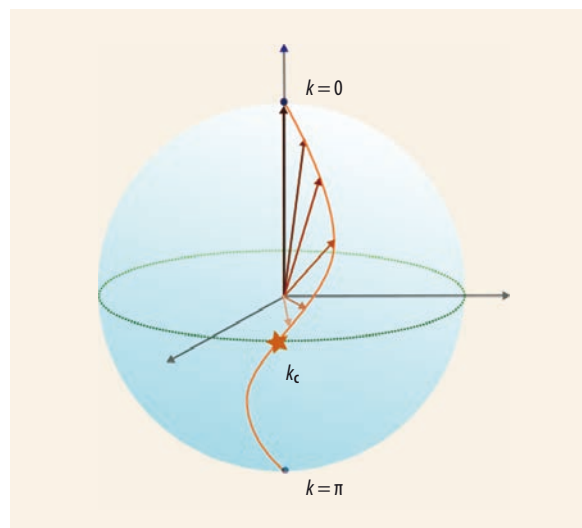


Abb. 7 Definiert der Spin des Ausgangszustands die positive z -Richtung, kann eine Parameteränderung dazu führen, dass der Äquator bei k_c geschnitten wird und die Loschmidt-Amplitude $\mathcal{G}(t)$ eine Nullstelle besitzt. Wenn sich aus der Parameteränderung eine neue Topologie des Hamilton-Operators ergibt, muss die relative Spinorientierung als Funktion von k entgegengesetzte Pole verbinden, sodass immer ein k_c existiert.

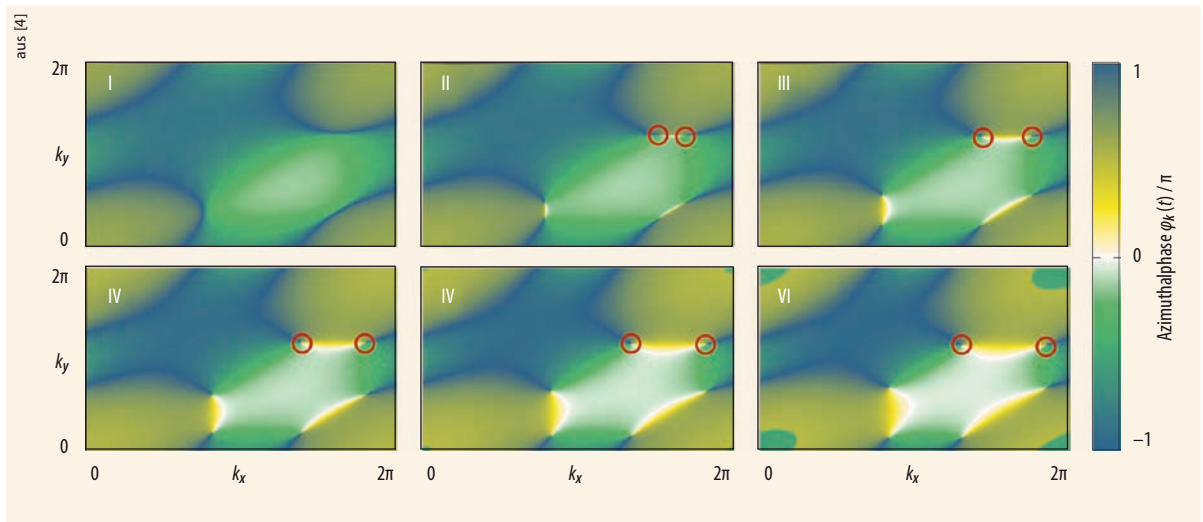


Abb. 8 Im Modell eines topologischen Isolators nach Haldane treten Paare von Wirbeln dynamisch auf [5]. Die zeitliche Entwicklung ist von links oben nach rechts unten dargestellt (I bis VI). Zwischen den Zeitpunkten I und II muss ein dynamischer Quantenphasenübergang stattfinden, weil sich drei Paare von Wirbeln gebildet haben. Ein Paar ist mit roten Kreisen markiert. Die beiden Wirbel der Paare entfernen sich im Laufe der Zeit voneinander, indem sie sich entlang von Geraden in der zweidimensionalen Gitterimpulsebene bewegen.

aufgelösten Phase der Loschmidt-Amplitude sichtbar (Abb. 1). Phasen lassen sich um Vielfache von 2π verschieben, ohne dass sich die physikalischen Eigenschaften ändern (Abbildung auf S. 37). Deshalb kann man die Werte $\Phi_k^C/\pi = \pm 1$ miteinander identifizieren und im Phasenporträt gleich darstellen. Die Windungszahl beschreibt zu jedem Zeitpunkt, wie viele vollständige Durchgänge von $k = 0$ bis $k = \pi$ die Phase Φ_k^C durchläuft. Im gezeigten Beispiel ändert sich die Windungszahl schlagartig bei ungeraden Vielfachen der kritischen Zeit t_c , zu der ein dynamischer Quantenphasenübergang stattfindet – die zugehörigen Phasen sind also topologisch verschieden.

Dieser Zusammenhang lässt sich weit über das hier beschriebene Beispiel hinaus verallgemeinern. Erste Signaturen des Zusammenspiels von Topologie und dynamischen Quantenphasenübergängen wurden in einem zweidimensionalen System kürzlich bereits experimentell beobachtet [2]. Konkret zeigte sich, dass topologische dynamische Quantenphasenübergänge durch ein dynamisches Analogon eines topologischen Ordnungsparameters charakterisiert sind [10], dessen höherdimensionale Verallgemeinerung experimentell nachgewiesen wurde [2]. Bildlich gesprochen lösen sich hierbei im zeitlichen Verlauf Knoten oder Wirbel (Vortices) in der impulsabhängigen Phase der Loschmidt-Amplitude und damit in der Wellenfunktion auf (Abb. 8). Aus der Dynamik dieser Wirbel lassen sich detaillierte Rückschlüsse über die oben genannte Änderung der topologischen Eigenschaften des Hamilton-Operators gewinnen. In Anbetracht der entscheidenden Rolle, die Ordnungsparameter bei der Beschreibung von Phasenübergängen im Gleichgewicht spielen, haben diese Erkenntnisse einen weiteren zentralen Baustein zum allgemeinen Verständnis dynamischer Quantenphasenübergänge geliefert.

Ausblick

Das Feld der dynamischen Quantenphasenübergänge hat in den letzten Jahren eine rasante Entwicklung genommen – bis hin zu ersten experimentellen Nachweisen. In Anlehnung an John von Neumanns Bild sind mit dieser Theorie zwar noch nicht alle Nichtelefanten verstanden. Aber sie gibt uns bereits ein hilfreiches Werkzeug an die Hand, um Prinzipien der Quantendynamik zu verstehen und damit nicht nur einzelne Probleme zu lösen, sondern ganze Klassen von Phänomenen zu betrachten, beispielsweise die topologischen dynamischen Quantenphasenübergänge.

Dennoch gibt es in diesem Zusammenhang noch grundlegende Fragen, die für die Zukunft interessante Entwicklungen versprechen. Dazu gehört insbesondere ein besseres Verständnis dynamischer Quantenphasenübergänge in stark wechselwirkenden Systemen, speziell in zwei und drei räumlichen Dimensionen. Ausgehend vom Wissen über konventionelle Phasenübergänge im Gleichgewicht kann man hier besonders interessante kritische Phänomene erwarten, die in den bisher untersuchten eindimensionalen Systemen nicht auftauchen können. Die Herausforderung ist dabei auch methodischer Natur, da die Berechnung der Nichtgleichgewichtsdynamik und speziell der Loschmidt-Amplitude für solche komplexen Systeme im Allgemeinen extrem schwierig ist, auch wenn es in hohen Dimensionen im Rahmen von dynamischer Molekularfeld-Theorie schon erste Fortschritte gibt [11]. Die oben genannten Quantensimulatoren sind daher besonders wichtig und vielversprechend, um systematische Einblicke in diese von theoretischer Seite schwer zugänglichen Probleme zu erlangen.

Die Loschmidt-Amplitude als zentrale Größe der dynamischen Quantenphasenübergänge besitzt zwar eine formale Ähnlichkeit mit der Zustandssumme

eines Systems im Gleichgewicht, allerdings sind die untersuchten Nichtgleichgewichtszustände auch gerade dadurch gekennzeichnet, dass sie nicht durch thermodynamische Größen allein beschreibbar sind. Diese formale Analogie kann also nicht beliebig weit tragen. Auf der einen Seite eröffnet dies die Möglichkeit, neuartige Phänomene der Quantenphysik zu beobachten, die kein unmittelbares Analogon im Gleichgewicht besitzen. Auf der anderen Seite ist daher bisher unklar, inwieweit eine makroskopische Beschreibung der dynamischen Quantenphasenübergänge möglich ist, zum Beispiel in Form einer Ginzburg-Landau-Theorie.

Literatur

- [1] *P. Jurcevic et al.*, Phys. Rev. Lett. **119**, 080501 (2017)
- [2] *N. Fläschner et al.*, Nat. Phys. **14**, 265 (2018)
- [3] *M. Heyl, A. Polkovnikov und S. Kehrein*, Phys. Rev. Lett. **110**, 135704 (2013)
- [4] *M. Heyl*, Rep. Prog. Phys. **81**, 054001 (2018)
- [5] *C. Karrasch und D. Schuricht*, Phys. Rev. B **87**, 195104 (2013)
- [6] *R. Thomale*, Physik Journal, Dezember 2016, S. 24
- [7] *M. Z. Hasan und C. L. Kane*, Rev. Mod. Phys. **82**, 3045 (2010)
- [8] *S. Vajna und B. Dóra*, Phys. Rev. B **91**, 155127 (2015)
- [9] *Z. Huang und A. V. Balatsky*, Phys. Rev. Lett. **117**, 086802 (2016)
- [10] *J. C. Budich und M. Heyl*, Phys. Rev. B **93**, 085416 (2016)
- [11] *E. Canovi, P. Werner und M. Eckstein*, Phys. Rev. Lett. **113**, 265702 (2014)

DIE AUTOREN

Markus Heyl (FV Tiefe Temperaturen, FV Dynamik und Statistische Physik) ist seit 2016 Gruppenleiter am Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme in Dresden. Nach der Promotion 2012 an der Ludwig-Maximilians-Universität München folgten Stationen als Postdoc in Dresden, Innsbruck und an der Technischen Universität München. Er beschäftigt sich mit Dynamik in quantenmechanischen Vielteilchensystemen und der Schnittstelle zwischen Vielteilchen- und Quanteninformationstheorie.



Jan Carl Budich (FV Tiefe Temperaturen, FV Dynamik und Statistische Physik) arbeitet seit Herbst 2016 auf dem Gebiet der Quantenvielteilchentheorie an der TU Dresden und interessiert sich dabei besonders für Nichtgleichgewichtsdynamik in korrelierten Systemen sowie die Rolle der Geometrie und der Topologie in der Quantenphysik. Nach Fertigstellung seiner Doktorarbeit im Herbst 2012 an der Universität Würzburg ist er über die Stationen Stockholm, Innsbruck und Göteborg nach Dresden gekommen.