



ANGEWANDTE PHYSIK

# Physik am Meer

Steine am Strand werden von den Wellen mitgerissen und bei ihrer Bewegung abgeschliffen, bis eine elliptische Form erreicht ist.

Klaus Winzer



Steine aus Kalzit und Basalt werden über die Jahre nahezu perfekt elliptisch abgeschliffen.

An den Stränden der Meere findet sich neben vielen Steinen mit irregulärer Gestalt eine große Anzahl von Steinen in Form nahezu perfekter Ellipsoide. Ihre Symmetrie und der ästhetische Reiz dieser Steine waren Anlass, über die Entstehung der elliptischen Form sowie die Ursache für die große Zahl dieser Steine nachzudenken. Die klassische Newtonsche Mechanik und elementare Mathematik genügen, um die Prozesse quantitativ zu beschreiben, welche die Steine an den Stränden der Ozeane seit Millionen von Jahren in ewig gleicher Weise formen.

Eine erste Erklärung für die glatten, gerundeten Flächen der Kiesel gab bereits Aristoteles [1]. Im letzten Jahrhundert sind etliche Feld-, Labor- und theoretische Studien zur Form der Steine hinzugekommen [2–6]. Allerdings entsprachen die Experimente in den Laboren nicht den Bedingungen, unter denen die Kiesel am Meeresstrand geformt werden: Die Kraft der einlaufenden Brandungswelle ist sehr viel größer als die Gewichtskraft der Steine, die eine Masse von einigen Gramm bis einigen hundert Gramm haben, daher reißt die Welle die Steine mit strandaufwärts. In Ufernähe fallen zunächst die großen Kiesel und weiter strandaufwärts die kleineren aus und bleiben nach kurzer Rotation liegen. Das Wasser der Welle läuft weiter strandaufwärts, kommt kurz zur Ruhe und strömt dann der Neigung des Strandes folgend meerwärts.

Bei schwacher Strömung am Ort des auf seiner flachen Seite liegenden Steins wird dieser ohne Rotation eine gewisse Strecke mit dem ablaufenden Wasser mitgerissen. Hierbei erfolgt ein Abrieb an der Auflagefläche, im Fall eines Ellipsoids senkrecht zur kürzesten Achse ( $c$ -Achse, **Abb. 1**), also parallel zur  $ab$ -Ebene. Bei stärkerer Strömung richtet sich der Ellipsoid auf und rotiert stabil um die  $c$ -Achse, angetrieben vom ablaufenden Wasser-Sand-Gemisch und der Neigung des Strandes. Die Rotation erfolgt mit nahezu konstanter Drehfrequenz und endet in der nächsten Brandungswelle. Dabei wird ein schmaler Bereich der Oberfläche senkrecht zur  $ab$ -Ebene abgetragen.

Um eine ausreichende empirische Basis für die Verteilung der Achsenverhältnisse zu erhalten, habe ich im Laufe der Jahre mehr als 1250 elliptische Steine gesammelt und vermessen. Die meisten Steine stammen von den Kanarischen und den Kapverdischen Inseln sowie von der Südküste der Türkei zwischen Alanya und Side. Die Kanarischen und die Kapverdischen Inseln sind vulkanischen Ursprungs mit teilweise noch aktivem Vulkanismus. Daher bestehen diese Steine aus dunkelgrauem bis schwarzem Basalt und enthalten oft kleine Einschlüsse des Minerals Olivin  $(\text{Mg,Fe})_2[\text{SiO}_4]$ . Die mittlere Dichte der Basaltsteine beträgt  $\rho = 3,6 \text{ g/cm}^3$ . Der Abtrag des Materials erfolgt durch Abschleifen der Steine am Strand. Daher bietet es sich an, die Schleifhärte  $H_R$  (nach Rosiwal) der unterschiedlichen Gesteinsarten miteinander zu vergleichen. Für Basalt beträgt sie  $H_{R,\text{Bas}} \cong 70$ . Die Steine aus der Türkei bestehen aus hellgrauem bis gelbbraunem Marmor (Kalzit,  $\text{Ca}[\text{CO}_3]$ ). Durch den schwankenden Anteil anderer Mineralien variiert die Dichte von 2,6 bis  $2,9 \text{ g/cm}^3$ . Die Schleifhärte von reinem Kalzit beträgt  $H_{R,\text{Kal}} \cong 4,5$  und ist damit deutlich geringer als die des Basalts. Die Auswahl der Kiesel erfolgte aufgrund einer möglichst perfekten elliptischen Form.

### Gleiten auf dem Sandstrand

Beim Gleiten eines Körpers auf einer ebenen, aber rauhen Fläche sollte der Abrieb proportional zum Druck  $p = F_G/A$  auf die Auflagefläche  $A$  sein. Leider ist es bei einem Kiesel mit gerundeter Oberfläche nicht möglich, eine Auflagefläche anzugeben. Sicher ist aber, dass beim Gleiten eines elliptischen Steins auf dem Sandstrand der Abtrag der  $c$ -Achse proportional zur Gewichtskraft

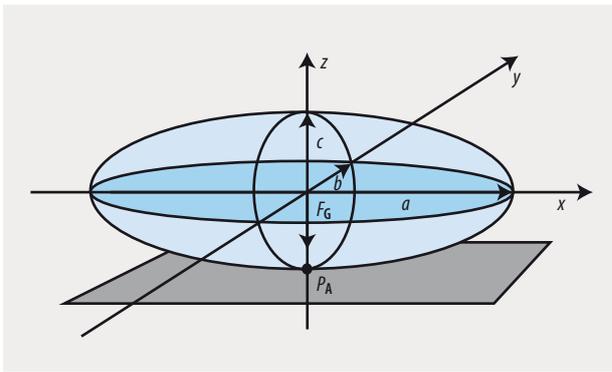


Abb. 1 Ein elliptischer Stein mit den drei Hauptachsen  $a$ ,  $b$  und  $c$

$F_G = (4\pi/3) \cdot abc \cdot \rho \cdot g$  des Ellipsoids und zur Schleifzeit  $\Delta t$  ist (Abb. 1). Zudem ist der Abtrag umso stärker, je größer die mittlere Krümmung  $H_c$  des Steins bei  $P_A$  ist, da bei starker Krümmung die Kontaktfläche klein ist. Somit beträgt der Abtrag der  $c$ -Achse  $\Delta c = -\alpha_A F_G H_c \Delta t$ , wobei der Abtragskoeffizient  $\alpha_A$  von der Schleifhärte des Gesteins abhängt. Insgesamt ergibt sich eine einfache Differentialgleichung mit der Lösung [7]:

$$c(t) = \frac{c_0}{1 + k c_0 [(b/a) + (a/b)] \cdot t}$$

Die Konstante  $k$  hängt von den Materialeigenschaften  $\alpha_A$  und  $\rho$  ab,  $c_0$  ist die Länge der  $c$ -Achse zur Zeit  $t_0 \equiv 0$ . Entscheidend für die Effektivität des Abtrags der  $c$ -Achse ist offenbar das  $b/a$ -Verhältnis. Vergleicht man zwei elliptische Steine mit unterschiedlichem  $b/a$ -Verhältnis, aber gleicher Querschnittsfläche der  $ab$ -Ebene  $A_{ab} = \pi ab$  und gleicher Länge der  $c$ -Achse, so hängt die mittlere Krümmung

$$H_c = \frac{\pi c}{2A_{ab}} \left( \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)$$

nur vom Verhältnis  $b/a$  ab. Die Krümmung ist mit  $H_{c,\min} = c/ab$  für  $b = a$  am geringsten und wächst mit abnehmendem  $b/a$ -Verhältnis. Daher sollten längliche Steine mit kleinem  $b/a$ -Verhältnis im Mittel ein kleineres  $c/a$ -Verhältnis haben. Die Untersuchung von 750 elliptischen Kalzitsteinen bestätigte diese Erwartung.

### Um die Achse rotiert

Grundsätzlich sind bei der Rotation eines Körpers um freie Achsen die Rotationen um die Achse des größten ( $c$ -Achse) sowie des kleinsten ( $a$ -Achse) Trägheitsmoments stabil, während die Rotation um die Achse des mittleren Trägheitsmoments ( $b$ -Achse) dynamisch instabil ist. Bei gegebenem Drehimpuls  $L_\omega$  ist die Rotation um die Achse des größten Trägheitsmoments  $I_c$  energetisch bevorzugt, weil die Rotationsenergie dafür am geringsten ist. In einem reibungsbehafteten Medium wie dem Wasser-Sand-Gemisch der ablaufenden Welle ist nur die Rotation um die Achse des größten Trägheitsmoments stabil (Abb. 2) [8].

Ein analoger Ansatz für den Abtrag der  $a$ - und  $b$ -Achse zeigt unmittelbar, dass die  $a$ -Achse wegen der größeren Krümmung des Steins schneller abgetragen wird als die  $b$ -Achse. Eine elementare Rechnung [7] ergibt für die Differenz des relativen Abtrags an  $a$ - und  $b$ -Achse

$$\left| \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right| - \left| \frac{1}{b} \frac{db}{dt} \right| = k \frac{c}{ab} \cdot (a^2 - b^2). \quad (1)$$

Diese Differenz ist stets positiv, sodass der Schleifprozess bei der Rotation um die  $c$ -Achse die Längen der  $a$ - und  $b$ -Achse angleichen sollte, sodass diskusförmige Steine entstehen. Diese finden sich an den Stränden aber nicht, wie die Häufigkeitsverteilung von Kalzitsteinen als Funktion der Achsenverhältnisse zeigt (Abb. 3). Demnach gilt:

- Es gibt keine kugelförmigen Kiesel; für die wenigen Steine mit  $a \approx b$  haben die Verteilungsfunktionen  $g(c/a)$  und  $h(c/b)$  den Wert Null.
- Kiesel mit diskusförmiger Gestalt sind extrem selten; unter den 750 Steinen fanden sich nur zwei mit  $0,96 < b/a < 0,98$  und kein einziger Stein mit  $0,98 < b/a < 1$ .
- Es gibt keine Kiesel in Form von Rotationsellipsoiden ( $a > b = c$ ), denn die Funktion  $h(c/b)$  erreicht bereits bei  $c/b \approx 0,9$  den Wert Null.

Diese Tatsachen passen nicht zum Ergebnis von Gl. (1), die daher zu modifizieren ist: Erstens ist es unrealistisch anzunehmen, dass die Längen der  $a$ - und  $b$ -Achsen zeitlich abnehmen, die Länge der  $c$ -Achse jedoch nicht. Zweitens spielt auch die Dynamik des Steins bei seiner Rotation um die  $c$ -Achse eine Rolle. Beim Abrollen führt der Schwerpunkt  $S$  des Steins eine beschleunigte Bewegung aus (Abb. 4). Im unteren Umkehrpunkt wird er nach oben beschleunigt, im oberen Umkehrpunkt nach unten. An der  $a$ -Achse ist die Beschleunigung negativ, sehr groß und hängt stark von  $b/a$  ab, an der  $b$ -Achse ist die Beschleunigung positiv, klein und fast unabhängig von  $b/a$  [7].

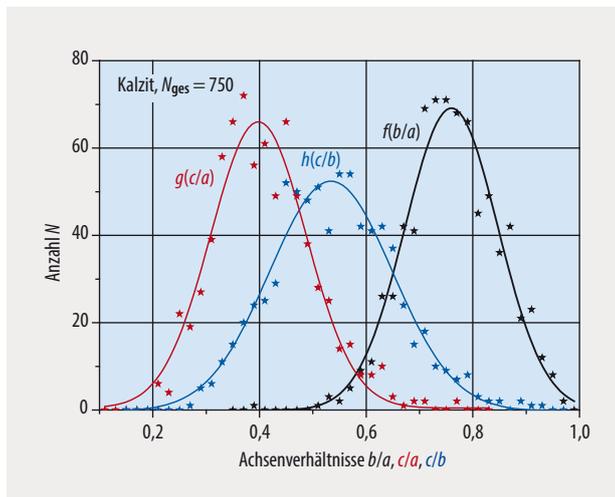
Die für die Auflagekraft  $F_G$  wirksame Beschleunigung ( $g + a_s$ ) und damit der Abrieb ist also an der  $a$ -Achse stark reduziert und an der  $b$ -Achse leicht vergrößert. Dies verkleinert zwar das  $b/a$ -Verhältnis, erhöht aber die Krümmung an der  $a$ -Achse. So wird sich ein neues Gleichgewicht des relativen Abtrags an den Achsen einstellen, wenn man Gl. (1) geeignet modifiziert: Dazu reicht es, die Konstante  $k$  durch zwei neue Konstanten  $k_a$  und  $k_b$  zu ersetzen, um die unterschiedlichen Beschleunigungen an  $a$ - und  $b$ -Achse zu berücksichtigen. Dann folgt für die Differenz der Beträge des Materialabtrags [7]

$$\left| \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right| - \left| \frac{1}{b} \frac{db}{dt} \right| = k \cdot \left[ g \cdot \frac{a}{b} - a\omega^2 \cdot u \left( \frac{b}{a}, \lambda \right) \right]. \quad (2)$$

Bei langsamer Rotation (kleinem  $\omega$ ) wird also die  $a$ -Achse



Abb. 2 Ein elliptischer Basaltstein rotiert im ablaufenden Wasser-Sand-Gemisch stabil um seine  $c$ -Achse. Vor dem Stein treten Wasserwirbel auf.



**Abb. 3** Häufigkeitsverteilungen  $b/a$ ,  $c/a$  und  $c/b$  für 750 elliptische Steine aus Kalzit. Aufgetragen ist die Anzahl  $N$  der Steine in der Intervallbreite  $\Delta = 0,02$ . Eine Anpassung mit drei Gauß-Verteilungen ergibt für die Maxima der Verteilungsfunktion das Tripel  $(b/a; c/a; c/b) = (0,760; 0,398; 0,534)$ . Auffällig sind die relativ schmalen Häufigkeitsverteilungen  $f(b/a)$  und  $g(c/a)$ , die auf jeweils einen dominierenden Schleifprozess hindeuten.

stärker abgetragen, weil der Einfluss der unterschiedlichen Beschleunigungen schwächer ist als der Einfluss der Krümmungen. Dagegen wird für großes  $\omega$  die  $b$ -Achse stärker abgetragen. Die Differenz des Materialabtrags verschwindet, wenn die eckige Klammer Null ist. Demnach bildet sich eine stabile Form des Ellipsoids aus. Daher sollte das Maximum der Häufigkeitsverteilung  $f(b/a)$  in **Abb. 3** bei  $b/a = 0,76$  mit dem Maximum der Gleichgewichtskurve des Materialabtrags übereinstimmen. Das ist jedoch nicht der Fall, denn nahezu unabhängig von  $\lambda = c/\sqrt{ab}$  liegt das Maximum bei  $b/a \cong 0,95$ ; favorisiert also eher diskusförmige Steine, die am Strand jedoch nicht zu finden sind.

### Ohne Schlupf geht es nicht

Für den Materialabtrag beim Schleifen ist das Produkt aus Auflagedruck und Relativgeschwindigkeit zwischen dem Körper und der Unterlage entscheidend. Die Relativgeschwindigkeit ist als Schlupfgeschwindigkeit bzw. Schlupf bekannt. Bei der Rotation des Ellipsoids um die  $c$ -Achse ist die Umfangsgeschwindigkeit  $v(\varphi) = r(\varphi)\omega$  an der  $a$ -Achse bei  $r(0) = a$  größer als die mittlere Umfangsgeschwindigkeit  $\langle v \rangle$ . Die  $a$ -Achse rutscht also gegen die Translationsrichtung über den Sandboden (**Abb. 4**). An der  $b$ -Achse bei  $r(\pi/2) = b$  ist dagegen die Umfangsgeschwindigkeit kleiner als  $\langle v \rangle$ , die  $b$ -Achse rutscht also in Translationsrichtung über den Sandboden.

Die Differenz zwischen  $v(\varphi)$  und  $\langle v \rangle$  ist die Schlupfgeschwindigkeit  $v_s = v(\varphi) - \langle v \rangle$ , die hier formgebend wirkt. Sie ist an der  $a$ -Achse positiv und an der  $b$ -Achse negativ, aber betragsmäßig etwas größer [9]. Das macht tendenziell aus diskusförmigen Steinen wieder elliptische. Damit verschiebt sich das Maximum der Kurve des Materialabtrags von  $b/a \cong 0,95$  zu  $b/a \cong 0,67$ , liegt also etwas unterhalb des experimentellen Werts. Der größte Teil des Abriebs erfolgt um die  $a$ - und  $b$ -Achse, weil dort der Schlupf am größten

ist. Da es aber auch bei völlig runden Körpern immer einen formunabhängigen Schlupf gibt, ist dieser zu berücksichtigen: Mit einem Anteil von nur 20 Prozent des maximalen Schlupfs resultiert eine Gleichgewichtskurve, deren Maximum bei  $b/a \cong 0,75$  recht gut mit dem experimentellen Wert  $b/a = 0,76$  in **Abb. 3** übereinstimmt. Schwerpunktsbeschleunigung und Schlupf liefern somit die beobachtete Form.

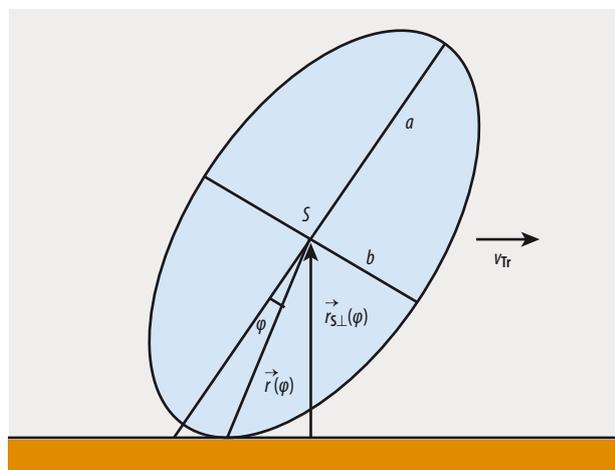
Der Prozentsatz elliptischer Steine bezogen auf die Gesamtzahl an Steinen liegt sicher nur im einstelligen Bereich. Der Grund dafür sind die unterschiedlichen Ausgangsformen der kantigen Felsfragmente: Steine, die einem länglichen Quader ähneln, haben immer eine Achse größten Trägheitsmoments, die aus energetischen Gründen die bevorzugte Rotationsachse ist. Damit kann sich nach einem hinreichend langen Schleifprozess durch Rotation die elliptische Form ausbilden. Steine, die eher einem Würfel oder einem Tetraeder ähneln, haben drei bzw. vier Trägheitsachsen, die sich hinsichtlich der Trägheitsmomente aber kaum unterscheiden. Diese Steine werden durch das Abrollen auf dem Strand auch kleiner und abgeschliffen, allerdings nicht elliptisch, da es keine bevorzugte Rotationsachse gibt. Da das Abbrechen eines länglichen quaderförmigen Fragments von einem Felsen deutlich unwahrscheinlicher ist als das Abbrechen eines kompakteren Fragments, nimmt nur ein kleiner Bruchteil aller Steine eine elliptische Form an.

Dennoch lassen sich problemlos Steine mit nahezu perfekter Form finden. Das lässt vermuten, dass es einen Schleifmechanismus gibt, der zu dieser Form führt. In folgendem Modell wird ein deformiertes Ellipsoid (Ovoid) mit unterschiedlichen Krümmungen an den  $a$ -Achsen betrachtet und die Zeitabhängigkeit der Form beim Materialabtrag berechnet. Die einfachste Darstellung eines Ovals in der  $ab$ -Ebene erhält man durch einen Korrekturterm an der Ellipsengleichung in der Form

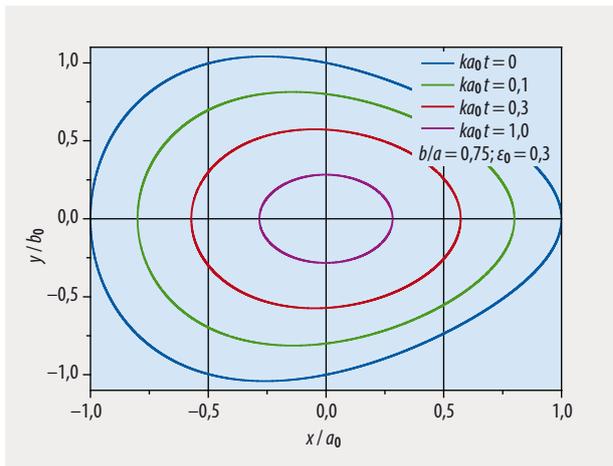
$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot (1 - \epsilon \frac{x}{a}).$$

Ein solches Oval mit  $b/a = 0,75$  und  $\epsilon_0 = 0,3$  ist in **Abb. 5** als blaue Kurve dargestellt.

Die Krümmung  $H_{a+}$  bei  $x/a_0 = 1$  ist größer als die Krümmung  $H_{a-}$  bei  $x/a_0 = -1$ . Bei Rotation um die  $c$ -Achse werden



**Abb. 4** Beim Abrollen führt der Schwerpunkt des elliptischen Steins eine beschleunigte Bewegung aus.



**Abb. 5** Entwicklung der elliptischen Form nach verschiedenen langen Schleifzeiten

sich die Krümmungen an der  $a_+$ - und  $a_-$ -Achse angleichen, da die stärker gekrümmte Seite des Ovoids stärker abgeschliffen wird. Für die Berechnung der zeitlichen Entwicklung der Form ist aus der relativen Krümmungsdifferenz die zeitliche Abnahme von  $\varepsilon(ka_0t)$  zu berechnen [9]. Bei der Rotation gleichen sich die Krümmungen an den Achsen an, auch die  $a$ -Achse wird abgeschliffen und kürzer. Doch welcher Prozess verläuft schneller: die Abnahme der Krümmungsdifferenz oder die Abnahme der Länge der mittleren  $a$ -Achse? Eine relativ einfache Rechnung zeigt, dass die Abnahme der Krümmung etwa dreimal schneller erfolgt [9]. So entsteht die elliptische Form des Kieselns viel schneller als die Abnahme des Volumens durch den Abtrag der  $a$ -Achse. Das ist der Grund für die große Anzahl von Steinen mit nahezu perfekter elliptischer Form.

### Über die Jahre abgeschliffen

Bereits für  $ka_0t \cong 1$  ist aus einem anfänglich ovalen Stein durch den Schleifprozess ein Stein mit nahezu perfekter elliptischer Form entstanden (**Abb. 5**). Die Bildungszeit  $\tau$  ist proportional zur Schleifhärte  $H_R$  und umgekehrt proportional zur Dichte des Steins. Vergleicht man Steine gleicher Größe aus Basalt und aus Kalzit, so hängt das Verhältnis der Bildungszeiten nur von den Dichten und Schleifhärten ab:

$$\frac{\tau_{\text{Bas}}}{\tau_{\text{Kal}}} = \frac{\rho_{\text{Kal}} \cdot H_{R, \text{Bas}}}{\rho_{\text{Bas}} \cdot H_{R, \text{Kal}}} = 11,9.$$

Bei vergleichbarer Stärke der Brandungswellen und der Strandneigung erfordert die Bildung eines elliptischen Steins aus Basalt etwa die 12-fache Zeit.

Am Südstrand der Insel Helgoland finden sich neben Steinen aus Buntsandstein auch solche aus Ziegelstein (**Abb. 6**). Sie bildeten sich aus Ziegelsteinfragmenten, die bei Sprengungen von Militäranlagen durch die britische Armee im Jahr 1947 entstanden. Die vergangenen 70 Jahre haben offenbar ausgereicht, um die Steine elliptisch zu formen.

Damit lässt sich eine obere Grenze für die Gesamtzeit angeben, die für die Bildung eines elliptischen Steins vergleichbarer Größe aus dem viel härteren Material Basalt nötig ist. Mit der Dichte  $\rho_{\text{Zst}} = 1,85 \text{ g/cm}^3$  und der Schleif-



**Abb. 6** Elliptische Ziegelsteine (links), elliptische Buntsandsteine (rechts) und das Gehäuse eines Seeigels (*Paracentrotus lividus*)

härte  $H_{R, \text{Zst}} \cong 2,3$  erhält man

$$\tau_{\text{Bas}} \leq 70 \text{ a} \cdot \frac{\rho_{\text{Zst}} \cdot H_{R, \text{Bas}}}{\rho_{\text{Bas}} \cdot H_{R, \text{Zst}}} \cong 1100 \text{ a}.$$

Die Gesamtzeit für die Bildung eines elliptischen Steins für ein Material mit der Härte des Basalts liegt also in der Größenordnung von 500 bis 1000 Jahren.

Sowohl für das Gleiten als auch für das Rollen des Steins auf dem Sandstrand lassen sich mittels einfacher Ansätze quantitative Aussagen über die Form der Steine gewinnen: Die Rotation um die Achse des größten Trägheitsmoments sorgt für die vielen elliptischen Steine an den Stränden der Ozeane und beantwortet zudem eine Frage, an deren Beantwortung sich schon Aristoteles versucht hat.

### Literatur

- [1] Aristotle, in *Minor Works, Mechanical Problems*, Question 15, translated by W. S. Hett, Harvard University, Cambridge (2000)
- [2] C. K. Wentworth, *J. Geol.* **27**, 505 (1919)
- [3] Lord Rayleigh, *Nature* **154**, 169 (1944)
- [4] Q. R. Wald, *Nature* **345**, 211 (1990)
- [5] D. J. Durian et al., *Phys. Rev. E* **75**, 021301 (2007)
- [6] G. Domokos und G. W. Gibbons, *Proc. R. Soc. A* **468**, 3059 (2012)
- [7] K. Winzer, *Eur. Phys. J. B* **86**, 464 (2013)
- [8] A. Budó, in *Theoretische Mechanik*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1971)
- [9] K. Winzer, *Eur. Phys. J. Plus* **132**, 443 (2017)

### Der Autor



**Klaus Winzer** (FV Tiefe Temperaturen) promovierte und habilitierte sich an der Universität zu Köln. 1974 wechselte er als Dozent an die Universität Göttingen. Von 1978 bis zu seiner Pensionierung 2005 war er C3-Professor für Experimentalphysik. Zahlreiche Urlaubsaufenthalte auf den Inseln des Mittelmeers und des Nordatlantiks boten Gelegenheit, an den Stränden elliptische Steine zu sammeln, ihre Form zu analysieren und über ihre Entstehung nachzudenken.

**Prof. Dr. Klaus Winzer**, Universität Göttingen, Friedrich-Hund-Platz 1, 37077 Göttingen