

# Standardmäßig unsicher

Der Umgang mit Messdaten im Praktikum erfordert auch eine Messunsicherheitsanalyse.

Philipp Möhrke und Bernd-Uwe Runge



Die Messunsicherheitsanalyse ist ein zu Unrecht unbeliebter Teil der Physikausbildung, den die Studierenden meist nicht ausreichend beherrschen. Der international anerkannte „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen“ sowie moderne Lehrformate bieten jedoch einen guten Zugang zu diesem Thema.

**M**üssen wir wirklich noch eine Fehlerrechnung machen? Dies fragen die Studierenden in nahezu jedem physikalischen Praktikum. Die Fehlerrechnung oder nach aktueller Sprechweise die Messunsicherheitsanalyse ist nicht nur sprachlich sperrig, sondern auch unbeliebt. Die Messung gilt als interessant und verspricht neue Erkenntnisse. Die Messunsicherheitsanalyse hingegen scheint langweilig, wenig spektakulär und letztendlich überflüssig. Die entscheidende Information, um die es ging, ist scheinbar bereits durch die Auswertung der Daten herausgekommen. Die angehängte Betrachtung der Genauigkeit des Ergebnisses empfinden die Studierenden eher als Entwertung der eigenen Arbeit.

Dass bei der Berechnung eines Ergebnisses auch Überlegungen zu dessen Unsicherheit dazugehören, ist sicher allen Studierenden klar. Den zentralen Informationsgehalt und Nutzen dieser Angabe sehen aber nur wenige. So lassen sich Ergebnisse erst quantitativ vergleichen, wenn die

Unsicherheit berücksichtigt wird. Denn ob zwei Ergebnisse gleich oder verschieden sind – oder wie wahrscheinlich es ist, dass zwei Ergebnisse übereinstimmen –, ist aus den Zahlenwerten allein nicht abzulesen. Aber gerade der Vergleich mit bekannten Ergebnissen oder den Vorhersagen von Modellen macht die Arbeit in der Physik aus. Hier entstehen neue Erkenntnisse.

Meist behandeln Lehrkräfte die Messunsicherheitsanalyse in der Schule nur in Form von Faustregeln. Im Studium taucht sie erstmals im Rahmen eines Grund- oder Anfängerpraktikums auf. Dem von Gauß und Laplace geprägten Vorgehen folgend werden die Fehlerquellen in die bekannten Klassen von statistischen und systematischen Fehlern eingeteilt, Ables- und Rundungsfehler besprochen, Schreibweisen geklärt und die Regeln der gaußschen Fehlerfortpflanzung eingeführt und angewendet. Als zentrale Größe taucht der „wahre Wert“ einer Messung auf.

In den Praktikumsberichten finden sich immer wieder Passagen wie diese: „Messfehler können nur durch Schäden auftreten oder falsches Einstellen der Geräte. Da jedes Gerät

1) Der ISO/IEC Guide 98-3:2008 ist eine Neuauflage der 1995er Version des Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM) mit kleinen Korrekturen, vgl. [www.iso.org/standard/50461.html](http://www.iso.org/standard/50461.html). Mehr Informationen zum GUM finden sich unter [www.iso.org/sites/JCGM/GUM-introduction.htm](http://www.iso.org/sites/JCGM/GUM-introduction.htm).

eine gewisse Unschärfe mit sich bringt, diese aber ausblendbar ist, gibt es keine Messunsicherheit. [...] Fehler können auftreten, wenn nicht nach dem Skript gearbeitet wird oder ein Gerät defekt ist“ [1]. Die Suche nach einem alternativen Zugang zu diesem Thema, der die aktuellen Standards der Metrologie berücksichtigt, ist daher angebracht.

Wir wollen hier einen Ansatz vorstellen, der sich am Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen (ISO/IEC 98-3:2008) orientiert. Die Erstveröffentlichung dieses Leitfadens (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement) durch sieben internationale Organisationen im Jahre 1993 hat den Umgang mit Messdaten und ihren Unsicherheiten international standardisiert.<sup>1)</sup> In der Industrie ist eine Arbeit abseits dieses Standards nicht mehr möglich. In der Physik hingegen hat er sich noch nicht durchgesetzt. Der Leitfaden geht an einigen Punkten signifikant andere Wege als die klassische „Fehlerrechnung“.

Zentrale Elemente sind die Verteilung einer Messgröße, genauer ihre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, und das „Modell der Messung“, das die Messgrößen und ggf. Korrekturen mit dem Ergebnis verbindet. Jeder Eingangsgröße ist eine Verteilung zugeordnet, deren Form statistisch durch Wiederholungsmessung unter gleichen Bedingungen ermittelt (Typ A) oder mit Hilfe anderer Quellen geschätzt wurde (Typ B). In diese zwei Kategorien fallen alle an der Messung oder Auswertung beteiligten Größen. So ist zum Beispiel der Ablesung eines Digitalinstruments eine Rechteckverteilung zugeordnet, deren Breite der Schrittweite der letzten angezeigten Ziffern entspricht. Jede Verteilung lässt sich verkürzt durch einen stellvertretenden Wert (in der

Regel den arithmetischen Mittelwert) und die Standardunsicherheit repräsentieren. In die Standardunsicherheit fließen die Breite der Verteilung sowie ihre Form ein.

Das Modell erlaubt es, aus den Verteilungen der einzelnen Größen die Verteilung des Ergebnisses zu gewinnen. Das ist theoretisch durch analytische Rechnung möglich, wird allerdings in der Praxis meist mittels Monte-Carlo-Simulationen realisiert. Vereinfachend ist auch eine lineare Näherung möglich, die der herkömmlichen gaußschen Fehlerfortpflanzung ähnlich ist. Das Ergebnis lässt sich vereinfacht als Ergebnis und Standardunsicherheit angeben. Vor allem für technische Anwendungen sieht der Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen zusätzlich die Angabe einer erweiterten Unsicherheit vor. In deren Bereich um das Ergebnis herum liegt ein größerer Anteil der Messwerte als bei Angabe der Standardunsicherheit.

Vollständig wird das Ergebnis in Form eines „Unsicherheitsbudgets“ angegeben, in dem die Beiträge der Unsicherheiten aller Eingangsgrößen an der Unsicherheit des Gesamtergebnisses dargestellt sind. Daraus ergeben sich Handlungsempfehlungen, an welcher Stelle die Messung mit dem größten Effekt zu verbessern wäre. Ein Beispiel ist die Bestimmung der Erdbeschleunigung mit einem Fadenpendel (**Infokasten**).

Doch wo ist der „systematische Fehler“ geblieben? Typ A scheint mehr oder minder der statistische Fehler zu sein, Typ B ein neues Element in der Betrachtung. An dieser Stelle kommt das Modell der Messung ins Spiel. Liegen Informationen über einen systematischen Fehler vor, fließen sie als weitere Eingangsgröße in das Modell ein. Auch diese

## Bestimmung der Erdbeschleunigung

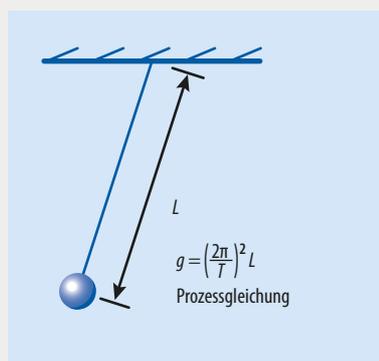
Um die Erdbeschleunigung  $g$  mit Hilfe eines Fadenpendels zu bestimmen, wird dessen Länge  $L$  mit einem Maßstab sowie die Schwingungsdauer  $T$  mit einer Lichtschranke gemessen. Wir nehmen an, dass  $T$  durch eine Mehrfachmessung bestimmt wurde (Typ A). Andere Unsicherheiten wie mögliche Gangfehler der Uhr vernachlässigen wir der Einfachheit halber.  $L$  wird mit einem Maßstab ermittelt (Typ B, Dreieckverteilung geschätzt). Für diese Messung betrachten wir als weitere Unsicherheitsquellen eine Verschiebung  $o_L$  der gesamten Skala beim An-

legen (Typ B, Rechteckverteilung geschätzt) sowie eine herstellungsbedingte Streckung oder Stauchung  $s_L$  der Skala des Maßstabs (Typ B, Rechteckverteilung geschätzt).

Die Modellgleichung beschreibt den Einfluss dieser Größen:

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (L \cdot s_L + o_L)$$

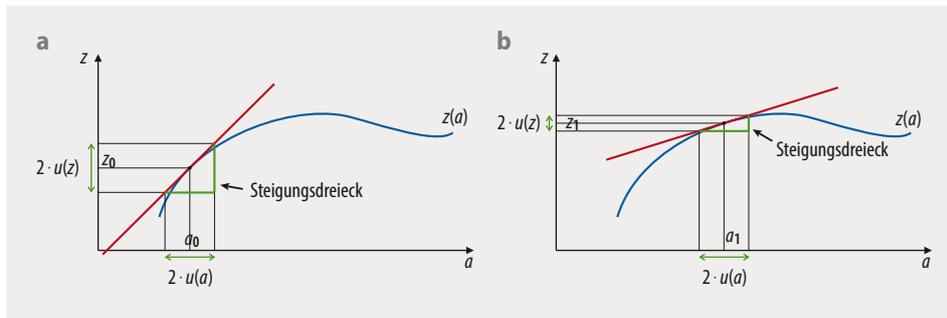
Die größte Auswirkung auf die Messunsicherheit der Erdbeschleunigung hat die Unsicherheit der möglichen Streckung oder Stauchung der Skala.



### Tabelle

Größe	Beschreibung	Wert	Verteilung	Breite	Unsicherheitsbetrag absolut	relativ <sup>*)</sup>
$T$	Schwingungsdauer	1,93374 s	empirisch	$2 \cdot 10^{-5}$ s	$1,0 \cdot 10^{-4}$ m/s <sup>2</sup>	0,0 %
$L$	Pendellänge	0,929 m	Dreieck	$2 \cdot 10^{-3}$ m	$4,3 \cdot 10^{-3}$ m/s <sup>2</sup>	10,1 %
$s_L$	Streckungsfaktor	1,000	Rechteck	$4 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$ m/s <sup>2</sup>	69,7 %
$o_L$	Nullpunktverschiebung	0,000 m	Rechteck	$2 \cdot 10^{-3}$ m	$6,1 \cdot 10^{-3}$ m/s <sup>2</sup>	20,2 %
$g$		9,808 m/s <sup>2</sup>			$1,4 \cdot 10^{-2}$ m/s <sup>2</sup>	

\*) prozentualer Anteil an der Gesamtvarianz



**Abb. 1** Empfindlichkeitskoeffizienten: Eingezeichnet sind die Tangente mit Steigung  $dz/da$  (rot) an der Stelle  $a_0$  (a) bzw.  $a_1$  (b) sowie das Steigungsdreieck (grün).

Korrektur ist nur bis zu einem bestimmten Grad bekannt und mit einer Unsicherheit behaftet, sodass sie wie die anderen Eingangsgrößen zu behandeln ist. Ist der systematische Fehler völlig unbekannt, bleibt er unberücksichtigt.

### Die Konstanzer Methode

Der vereinheitlichte Ansatz der Behandlung von Unsicherheiten auf Basis von Verteilungen bietet die ideale Basis für den Einsatz in der Lehre [2]. Die Motivation, sich mit Unsicherheiten zu beschäftigen, entsteht daraus, dass Messwert und Unsicherheit als zusammenfassende Eigenschaften von Verteilungen zu erkennen sind und im Vergleich von Ergebnissen ihre Anwendung finden.

Ausgehend von der Wiederholungsmessung, der dabei auftretenden Streuung der Einzelergebnisse und deren Darstellung in einem Histogramm wird die Verteilung als Ergebnis einer Messreihe eingeführt. Diese Verteilung enthält die vollständige Information über ein Messergebnis und erlaubt es, die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten verschiedener Ergebnisse zu berechnen. Anhand des Überlapps der Verteilungen zweier Messreihen lässt sich sofort der Vergleich von Messungen thematisieren.

Auf den Verteilungen verschiedener Eingangsgrößen aufbauend wird die Verteilung von Größen erklärt, die sich

aus diesen Eingangsgrößen ableiten. Einfache Verteilungen erlauben es, die Verteilung von z. B. der Summe solcher Größen händisch zu berechnen. Dabei ist schnell ersichtlich, dass sich auch deren Form und Breite verändern. Unter Zuhilfenahme von Monte-Carlo-Simulationen sind komplexere Beispiele zugänglich, bei denen das Ergebnis asymmetrisch verteilt sein kann, auch wenn alle Verteilungen der Eingangsgrößen symmetrisch sind.

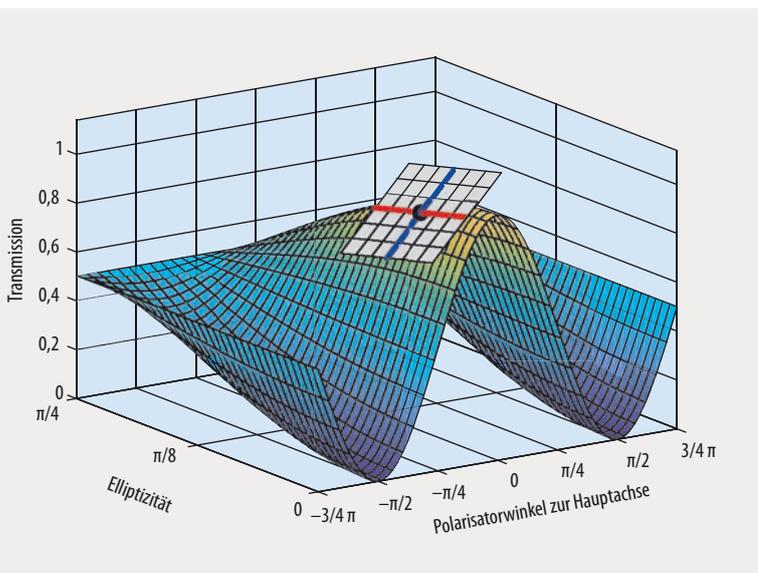
Als vereinfachte Möglichkeit der Messunsicherheitsanalyse wird die Linearisierung des Modells über die partiellen Ableitungen der Modellfunktion nach den Eingangsgrößen – als Empfindlichkeitskoeffizienten bezeichnet – eingeführt. Ist die Größe  $z(a, b, c, \dots)$  eine beliebige Funktion mehrerer unabhängiger Größen  $a, b, c, \dots$  mit den zugehörigen Standardunsicherheiten  $u(a), u(b), u(c), \dots$ , so ist die kombinierte Standardunsicherheit von  $z$ :

$$u_c(z) = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial a} \cdot u(a)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b} \cdot u(b)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial c} \cdot u(c)\right)^2 + \dots}$$

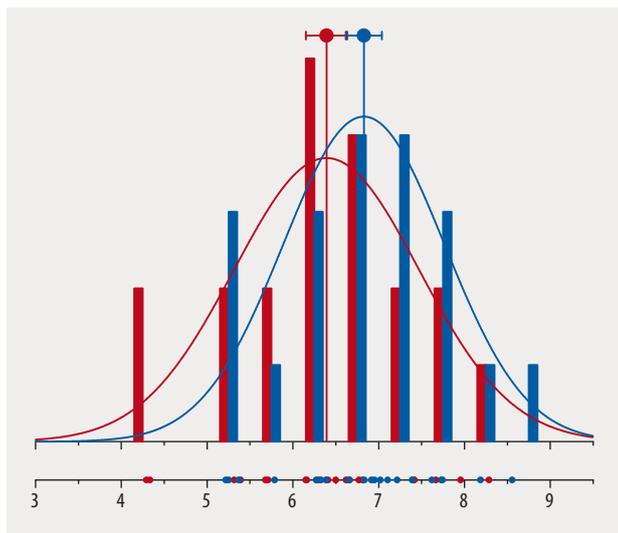
Die partiellen Ableitungen werden jeweils an der Stelle  $(a_0, b_0, c_0, \dots)$  ausgewertet, wobei  $a_0, b_0, c_0, \dots$  die für die Größen  $a, b, c, \dots$  bestimmten „besten“ Werte sind. Der Ableitungswert  $\frac{\partial z}{\partial a}(a_0, b_0, c_0, \dots)$  ist der Empfindlichkeitskoeffizient von  $z$  bezüglich  $a$ , weil er angibt, wie „empfindlich“  $z$  auf Änderungen von  $a$  reagiert, während die anderen Variablen konstant bleiben (**Abb. 1**).

Die Empfindlichkeitskoeffizienten bieten einen anschaulichen Weg, um den Einfluss der Unsicherheiten der Eingangsgrößen zu quantifizieren. So erkennen die Studierenden z. B. an der Formel  $E = mv^2/2$  für die kinetische Energie, dass die Ableitung nach der Masse  $\partial E/\partial m = v^2/2$  quadratisch mit  $v$  ansteigt, die Empfindlichkeit bezüglich  $m$  also mit  $v^2$  wächst. Um die Unsicherheit für die Energie möglichst klein zu halten, gilt es daher, die Masse umso genauer zu bestimmen, je höher die Geschwindigkeit ist. In diesem Zusammenhang wird die Repräsentation eines Ergebnisses als symmetrisches Intervall mit der Schreibweise als Mittelwert und Standardunsicherheit eingeführt. Ein komplexeres Beispiel für eine Größe, die von zwei Eingangsgrößen abhängt, ist die Transmission von Licht einer bestimmten Elliptizität durch ein drehbares Polfilter (**Abb. 2**).

Zum Abschluss geht es nochmals um den Vergleich und damit die Bewertung von Ergebnissen. Anfangs wird ein Vergleich von Ergebnissen zwar über die Verteilungen erklärt, aber vereinfacht nur über den Überlapp der Intervalle durchgeführt. Hierbei kommen verschiedene Darstellungsformen zum Einsatz (**Abb. 3**). Als fortgeschrittene Aufgabe



**Abb. 2** Für eine Kombination von Elliptizität und Polarisatorwinkel sind die Steigungen (Empfindlichkeitskoeffizienten) dargestellt. Klar zu erkennen ist, dass diese von der Stelle abhängen und sich z. B. eine Änderung des Polarisatorwinkels bei einer Elliptizität von  $\pi/4$  (zirkulare Polarisation) nicht auf die Transmission auswirkt.



**Abb. 3** Zwei Messungen (rot / blau) lassen sich mit verschiedenen Darstellungen vergleichen: Punkte auf der Zahlengeraden, Histogramm und Mittelwert mit Standardabweichung. Eingezeichnet ist jeweils die an die Histogrammdata angepasste Gauß-Verteilung.

der Messdatenanalyse gilt es, die nichtlineare Kurvenanpassung zu bearbeiten, insbesondere mit Gewichtung der einzelnen Messwerte nach ihrer jeweiligen Unsicherheit. Dabei liegt der Schwerpunkt nicht auf den Kurven als solchen, sondern auf der Bestimmung relevanter physikalischer Größen aus den Anpassungsparametern.

## Umgedrehtes Klassenzimmer

Um den reflektierten Umgang mit Messunsicherheiten an konkreten Fällen einzuüben, haben wir uns an der Universität Konstanz für das Format eines „Flipped Classroom“ entschieden. Dabei eignen sich die Studierenden zuhause mit Hilfe bereitgestellter Texte das Wissen vor der eigentlichen Veranstaltung an. Dort geht es dann in Kleingruppen von vier bis fünf Studierenden darum, anhand von Aufgaben das Gelernte anzuwenden, einzuüben und zu diskutieren. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass sie bekannte Lernprobleme oder Fehlvorstellungen thematisieren. Dies soll den Graben zwischen Theorie und Anwendung verringern. Zwei Dozenten betreuen die Studierenden dabei.

Diese Vorlesung findet vor dem eigentlichen Praktikum statt, das erst im zweiten Teil des Semesters beginnt. Dort gilt es, die erlernten Themen in komplexeren Situationen und mit selbst aufgenommenen Messdaten anzuwenden. Auch hier liegt ein Fokus darauf, die eigenen Ergebnisse immer zu anderen Ergebnissen in Bezug zu setzen. Bewährt hat sich dabei, nicht mit Literaturwerten zu vergleichen. Die Studierenden ziehen stattdessen selbst ermittelte Werte einer Größe heran, die sie durch unterschiedliche Verfahren gemessen haben. Andernfalls verkommt der Vergleich leicht zu einem „Prüfen“, ob der Versuch denn richtig durchgeführt und das angestrebte Ergebnis erreicht wurde. Durch dieses Vorgehen erhält die Bestimmung der Unsicherheit eine Bedeutung, was die Motivation merklich erhöht.

Das Thema Messunsicherheiten erfährt im Laufe des Praktikums eine Progression: Arbeiten die Studierenden

im ersten Semester rein über das linearisierte Modell und vergleichen die Werte anhand des Überlapps der Intervalle, so rückt zu Beginn des zweiten Semesters die Verteilung ins Zentrum. Eine Gruppe von etwa 30 Studierenden bearbeitet die Frage, ob zwei Beutel getrockneter Erbsen vermutlich aus der gleichen Lieferung stammen oder nicht. Zu diesem Zweck vergleichen sie die Verteilung der Durchmesser. Die Dozenten und die Studierenden erarbeiten gemeinsam, wie groß die Unsicherheit höchstens sein darf, um diese Frage zu beantworten, und durch welches Vorgehen sich das Ziel erreichen lässt. Die Studierenden geben ihre Messwerte auf einer Webseite ein und können die Entwicklung der Diagramme ihrer eigenen Daten und diejenigen der ganzen Gruppe in Echtzeit verfolgen. Dadurch verstehen sie leichter die Bedeutung großer Messreihen.

Zusätzlich wird weiterer Input gegeben, ein Softwaretool zur Verwendung von Verteilungen vorgestellt und der Vergleich von Messergebnissen mittels eines Signifikanztests verfeinert. In den folgenden Praktikumsversuchen helfen Anwendungen, diese Verfahren zu vertiefen. Um Vergleiche zwischen selbst ermittelten Werten zu ermöglichen, sind die Versuche so angelegt, dass möglichst oft verschiedene Wege infrage kommen, um die gleiche physikalische Größe zu bestimmen.

Die aktive Beschäftigung mit den verschiedenen Aspekten und das wiederholte Aufgreifen des Stoffs bei zunehmender Vertiefung über die Praktikumsdauer verbessern die Akzeptanz bei den Studierenden und die Nachhaltigkeit des Lernens.

## Literatur

- [1] S. Heinicke, Aus Fehlern wird man klug, Logos Verlag, Berlin (2012)
- [2] S. Pillay, A. Buer, F. Lubben und S. Allie, Eur. J. Phys **29**, 647 (2008)

## Die Autoren



**Philipp Möhrke** studierte Physik in Berlin und Manchester, UK, und promovierte 2010 in Konstanz. Seitdem ist er dort als Dozent für Fachdidaktik. Er ist Mitglied der Binational School of Education der Universität Konstanz und der PH Thurgau, Schweiz.

**Bernd-Uwe Runge** studierte Physik in Konstanz und promovierte dort 1996. Nach Postdoc-Phasen am IBM Almaden Research Center in den USA und in Konstanz übernahm er 2001 die Leitung des Physikalischen Anfängerpraktikums an der Universität Konstanz.



Für ihre herausragenden, innovativen und beispielgebenden Leistungen in der Lehre, insbesondere die vollständig neue Aufbereitung des Themas „Messunsicherheitsanalyse“, wurden Runge und Möhrke mit dem Ars legendi-Fakultätenpreis Mathematik und Naturwissenschaften 2018 ausgezeichnet.

**Dr. Philipp Möhrke** und **Dr. Bernd-Uwe Runge**, Fachbereich Physik, Universität Konstanz, Universitätsstr. 10, 78464 Konstanz