Ch. Hohmann, Nanosystems Initiative Munich (NIM)

QUANTENPHYSIK

Schrödingers Katzenfutter

Wie sich quantenmechanische Eigenschaften als Ressource beschreiben lassen

Alexander Streltsov, Hermann Kampermann und Dagmar Bruß

Quantenmechanische Effekte, die lange rätselhaft oder paradox erschienen, finden mittlerweile Anwendung in Quanteninformationsprotokollen und Quantentechnologien. Fundamentale Eigenschaften wie Kohärenz oder Verschränkung lassen sich als Ressource verstehen. So genannte Ressourcentheorien sollen mit einer einheitlichen Sichtweise helfen, die quantenmechanischen Ressourcen zu quantifizieren und ihre Erzeugung oder Umwandlung zu beschreiben.

Seit der Entstehung der Quantenmechanik bieten ihre Eigenschaften Anlass für kontroverse Diskussionen, insbesondere im Zusammenhang mit der Verschränkung (EPR-Paradoxon, „spukhafte Fernwirkung). Die Sicht auf solche Phänomene hat sich spätestens mit der Entwicklung von Quanteninformationsprotokollen in den 1990er-Jahren geändert: Verschränkung gilt nun als Ressource, mit der sich beispielsweise Quantenteleportation durchführen und Kommunikation sicher verschlüsseln lässt bzw. die Algorithmen ermöglicht, die schneller als jeder bekannte klassische Algorithmus sind. Auch die Reinheit oder Kohärenz von Quantenzuständen spielt hier eine wichtige Rolle.

Welches Protokoll welche Ressource benötigt, ist individuell zu klären. In diesem Zusammenhang stellen sich übergreifende Fragen: Wie beschreibt man eine Ressource quantitativ? Wie verändert sie sich unter relevanten Transformationen des Quantensystems? Welche Relationen gibt es zwischen verschiedenen Ressourcen, die im selben Quantenzustand vorliegen? Diese abstrakt klingenden Fragen wirken sich direkt auf die experimentelle Umsetzung aus: Quantentechnologien bringen nur dann einen Vorteil gegenüber klassischen Technologien, wenn gewisse Schwellenwerte der Ressourcen erreicht werden, die sich wiederum in konkrete Performance-Anforderungen an Bauelemente von Quantenschaltkreisen und -netzwerken übersetzen lassen.

In den letzten Jahren sind Ressourcentheorien entstanden, die quantenphysikalische Ressourcen und deren Umwandlung ineinander quantitativ beschreiben. Diese Theorien beruhen auf wenigen Grundlagen, die stets die gleiche allgemeine Struktur haben, sich aber je nach Ressource in wesentlichen Elementen unterscheiden. Dies führt zu spezifischen Theorien für verschiedene Ressourcen. Hier betrachten wir zunächst den Fall der Verschränkung.

Verschränkung ist eine quantenmechanische Korrelation zweier Untersysteme eines Gesamtsystems, die in der klassischen Welt nicht möglich ist. Die ersten Formulierungen dieses Phänomens gehen auf Schrödinger, Einstein,

© 2019 Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

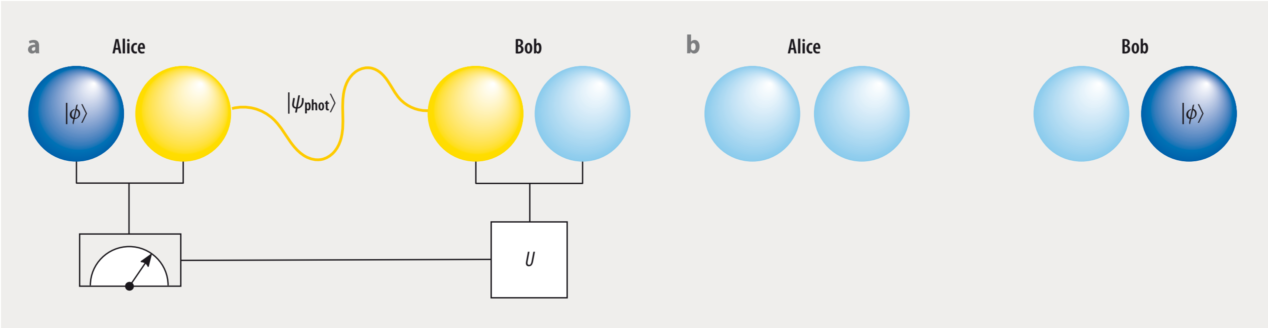

Abb. 1 Ziel der Quantenteleportation ist es, den Zustand eines Atoms $|\phi\rangle$ bei Alice (a, blau) auf ein Atom bei Bob (a, hellblau) zu übertragen. Dazu benutzen Alice und Bob Photonen in einem Singulett-Zustand $|\psi_{phot}\rangle$ (gelb). Wenn Alice eine bestimmte quantenmechanische Messung auf ihrem Atom und Photon durchführt und den Ausgang dieser Messung an Bob schickt, kann Bob durch eine zusätzliche Rotation sein Atom in den gewünschten Zustand $|\phi\rangle$ bringen (b). Die Verschränkung wird hierbei irreversibel zerstört.

Podolsky und Rosen sowie Bohr zurück. Zentrale Figur in Schrödingers Gedankenexperiment zur Verschränkung ist eine Katze in einer Kiste. Idealerweise sei die Kiste vollkommen von der Außenwelt isoliert. Unter der Annahme, dass die Quantentheorie allgemein gültig ist, muss sie auch für makroskopische Objekte wie Katzen gelten. Der Katze lässt sich also ein quantenmechanischer Zustand $|\psi_{\text{Katze}}\rangle$ zuordnen, der im Prinzip alle Eigenschaften der Katze beschreibt. Neben einem Zählrohr befinden sich in der Kiste ein Behälter mit Blausäure und eine kleine Menge radioaktiver Substanz, sodass statistisch weniger als ein Atom pro Stunde zerfällt. Registriert das Zählrohr einen Zerfall, so zertrümmert ein automatischer Mechanismus den Behälter mit Blausäure, sodass die Katze stirbt.

Wir werden dieses Gedankenexperiment nun etwas abstrakter formulieren und dabei den heutigen Formalismus der Quantentheorie einführen. Dabei müssen wir zuerst die relevanten Freiheitsgrade der beteiligten Systeme extrahieren. Insbesondere ist bei der Katze nur relevant, ob sie tot oder lebendig ist. In der Formulierung der Quantentheorie würde man ihrem physikalischen Zustand einen Zustandsvektor $|\text{tot}\rangle$ bzw. $|\text{lebendig}\rangle$ zuschreiben und verlangen, dass die Vektoren orthogonal aufeinander stehen, also $\langle\text{tot}|\text{lebendig}\rangle = 0$. Entsprechend ist für das Atom der radioaktiven Substanz nur interessant, ob es angeregt ist oder sich im Grundzustand befindet. Die Zustandsvektoren seien $|g\rangle$ und $|a\rangle$, und es gilt ebenfalls $\langle g|a\rangle = 0$.

Dass die Kiste von der Außenwelt isoliert ist, bedeutet, dass sich das gesamte System zu jedem Zeitpunkt t in einem reinen Zustand $|\psi_t\rangle$ befindet. Wäre der exakte Mechanismus der Wechselwirkung zwischen Katze und Atom bekannt, so würde sich der Zustand $|\psi_t\rangle$ aus der Schrödinger-Gleichung und dem Anfangszustand $|\psi_0\rangle$ ergeben. Für unsere Betrachtung ist der exakte Mechanismus der Wechselwirkung jedoch nicht relevant. Es geht lediglich darum, dass in dem Gedankenexperiment offensichtlich Korrelationen zwischen Katze und Atom bestehen, da sich das Zerfallen des Atoms darauf auswirkt, ob die Katze tot oder lebendig ist. Solche Korrelationen in reinen Quantensystemen nennt man Verschränkung. Ein Beispiel eines verschränkten Zustands zwischen Atom und Katze ist:

$$|\psi_{\text{gesamt}}\rangle = \sqrt{1-p}\,|a\rangle\,|\text{lebendig}\rangle - \sqrt{p}\,|g\rangle\,|\text{tot}\rangle\,. \qquad (1)$$

Dieser Zustand ist so interpretierbar, dass das Atom mit Wahrscheinlichkeit p zerfällt und die Katze mit der Wahrscheinlichkeit p tot anzutreffen ist.

Eine wichtige Anwendung für Verschränkung ist die Quantenteleportation [1], deren Ziel es ist, einen Quantenzustand $|\phi\rangle$ auf ein – möglicherweise sehr weit entferntes – System zu übertragen (**Abb. 1**). Üblicherweise nennt man die beiden Parteien, also Sender und Empfänger, Alice und Bob. Alice besitzt ein System, zum Beispiel ein Atom, in einem Zustand $|\phi\rangle$. Das kann der Grundzustand $|g\rangle$ sein, ein angeregter Zustand $|a\rangle$ oder eine beliebige Superposition. Hier wollen wir uns auf zweidimensionale Systeme beschränken. Alice weiß nicht, welchen Zustand $|\phi\rangle$ ihr Atom hat. Bob besitzt ebenfalls ein Atom und möchte den unbekannten Zustand $|\phi\rangle$ auf sein lokales Atom übertragen. Eine solche Übertragung ist möglich, wenn Alice und Bob zusätzlich zwei Photonen im Singulett-Zustand miteinander teilen:

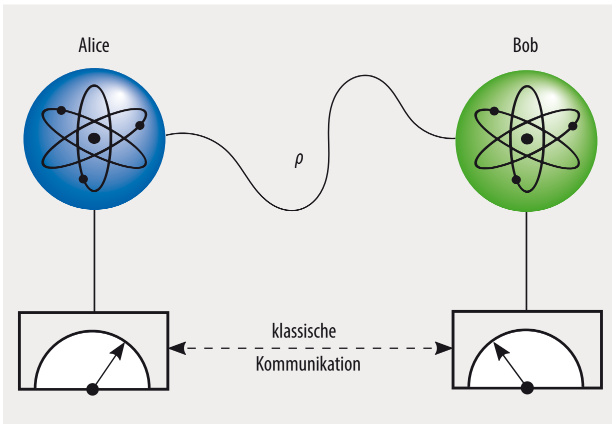

Abb. 2 Lokale Operationen und klassische Kommunikation bilden die freien Operationen der Ressourcentheorie der Verschränkung. Bei diesem Prozess führt eine der Parteien, z. B. Alice, eine allgemeine quantenmechanische Messung durch (**Infokasten** „Zustände...“). Im nächsten Schritt schickt Alice deren Ergebnis an Bob. Abhängig vom Ausgang der Messung führt Bob auf seinem Teilsystem eine quantenmechanische Messung durch und schickt das Messergebnis zurück an Alice. Dieser Prozess lässt sich beliebig oft iterieren. Jeder separable Zustand ist durch lokale Operationen und klassische Kommunikation zu erzeugen.

 © 2019 Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

$$|\psi_{\text{phot}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle^{\text{A}}|V\rangle^{\text{B}} - |V\rangle^{\text{A}}|H\rangle^{\text{B}}\right), \tag{2}$$

wobei $|V\rangle$ und $|H\rangle$ die vertikale bzw. horizontale Polarisation der Photonen kennzeichnen. Die Teleportation geschieht dadurch, dass Alice eine bestimmte gleichzeitige quantenmechanische Messung an ihrem Atom und Photon durchführt und das Ergebnis an Bob schickt. Bob wendet eine Rotation auf seinem Gesamtsystem an, die vom Ausgang von Alices Messung abhängt. Am Ende befindet sich Bobs Atom im gewünschten Zustand $|\phi\rangle$. Bei diesem Vorgang wird das verschränkte Photonenpaar irreversibel zerstört (**Abb. 1**). Dieses Beispiel zeigt deutlich die Rolle der Verschränkung als Ressource für die Quantenteleportation.

Während in diesem Beispiel von Atomen und Photonen die Rede war, funktioniert Teleportation im Prinzip auch mit anderen physikalischen Systemen, solange ihre quantenmechanischen Freiheitsgrade robust genug sind und sich kontrollieren lassen. Für Teleportation über große Distanzen sind Photonen die idealen Kandidaten. Obwohl Verschränkung sehr empfindlich ist, gelang es in einem aktuellen Experiment, Quantenteleportation über eine Entfernung von 1400 Kilometer zu demonstrieren [2].

In den letzten Jahren hat es sich als sehr hilfreich erwiesen, Quantenverschränkung als abstraktes Konzept zu betrachten, unabhängig von ihrer jeweiligen physikalischen Realisierung. Die Idee dahinter ähnelt der klassischen Informationstheorie, wo das Bit – also ein klassisches Zwei-Niveau-System mit Zuständen 0 und 1 – die fundamentale Einheit für Information darstellt, unabhängig vom verwendeten physikalischen System. Die fundamentale Einheit der Quanteninformation ist ein Quantenbit (Qubit), also ein quantenmechanisches Zwei-Niveau-System mit zwei Basiszuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$. Wie oben diskutiert, erlaubt Quantenmechanik auch Superpositionen von Zuständen, sodass ein allgemeiner Qubit-Zustand folgende Form annimmt:

$$|\psi_{\text{Qubit}}\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle. \tag{3}$$

Die Amplituden a und b sind komplexe Zahlen, ihre Betragsquadrate $|a|^2$ und $|b|^2$ lassen sich als Wahrscheinlichkeiten interpretieren, das System im Zustand $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ vorzufinden. Zwei Qubits können in einem Singulett-Zustand vorliegen:

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle\,|1\rangle - |1\rangle\,|0\rangle\right). \tag{4}$$

Dieser Zustand ist mathematisch identisch zum Zustand in Gleichung (2), jedoch beschreibt er Verschränkung als Phänomen an sich, ohne sich auf eine bestimmte physikalische Realisierung festzulegen. Diese Beschreibung ist sehr nützlich, um Verschränkung als Ressource zu verstehen.

Auch in der Quantenkryptographie spielt Verschränkung eine wichtige Rolle [3]. Diese beruht darauf, dass für zwei Spin-1/2-Teilchen im Singulett-Zustand die Messergebnisse der lokalen Spins immer maximal antikorreliert sind, und zwar unabhängig davon, in welche Richtung der Spin gemessen wird. Da dieses Phänomen auch auftritt, wenn die beiden Spin-1/2-Teilchen weit voneinander entfernt sind, zweifelten Einstein, Podolsky und Rosen daran, dass Quantentheorie die physikalische Realität vollständig beschreibt. Inzwischen steht die Existenz der Verschränkung jedoch außer Frage, und immer mehr Forscher versuchen, dieses nichtklassische Phänomen technologisch zu nutzen.

Allgemeine Ressourcentheorien

Eine Ressourcentheorie ist ein abstraktes Konzept, das eine sehr allgemeine Analyse von Quantenressourcen ermöglicht [4]. Das Fundament wird durch zwei wesentliche Elemente gebildet (**Infokasten** „Zustände, Messungen...“):

- **Freie Quantenzustände:** Das sind Quantenzustände, die innerhalb der Ressourcentheorie frei verfügbar sind, also nichts „kosten“. Sie sind aber auch nicht „nützlich“, da die in ihnen enthaltene Ressource gleich null ist.

Zustände, Messungen und Operationen

Ein (im Allgemeinen gemischter) **Quantenzustand** wird repräsentiert durch eine **Dichtematrix** ρ mit folgenden Eigenschaften:

- ρ ist hermitesch und hat nicht-negative Eigenwerte,
- ρ erfüllt die Normierungsbedingung $\mathrm{Sp}(\rho) = 1$,

wobei die Spur einer Dichtematrix $\mathrm{Sp}(\rho)$ definiert ist als die Summe der Diagonalelemente.

Diese Bedingungen leiten sich aus dem quantenmechanischen Messpostulat ab: Eine **allgemeine quantenmechanische Messung** wird beschrieben durch eine Menge von **Kraus-Operatoren** $\{K_i\}$, wobei i unterschiedliche Ergebnisse der Messung bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit p_i, bei einer solchen Messung das Messergebnis i zu erhalten, ergibt sich aus:

$$p_i = \mathrm{Sp}(K_i \rho K_i^\dagger)\,.$$

Nach der Messung befindet sich der Quantenzustand des gemessenen Systems in dem neuen Zustand

$$\rho_i = \frac{K_i \rho K_i^\dagger}{p_i}\,.$$

Da sich die Wahrscheinlichkeiten p_i für jeden Zustand ρ zu eins addieren sollen, müssen die Kraus-Operatoren die Bedingung

$$\sum_i K_i^\dagger K_i = \mathbb{1}$$

erfüllen. Insbesondere führt jeder Satz von Kraus-Operatoren, der diese Bedingung erfüllt, zu einer gültigen quantenmechanischen Messung, die im Prinzip auch experimentell realisierbar ist. Der Spezialfall, bei dem die Kraus-Operatoren orthogonale Projektoren sind, ist unter dem Namen **von Neumann-Messung** bekannt und wird z. B. beim Stern-Gerlach-Versuch realisiert.

Eine **Quantenoperation** beschreibt die allgemeinste Änderung eines Quantenzustands ρ, die nach den Gesetzen der Quantenmechanik möglich ist. Eine solche allgemeine Transformation $\Lambda(\rho)$ lässt sich ebenfalls mithilfe von Kraus-Operatoren $\{K_i\}$ beschreiben:

$$\Lambda(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger\,.$$

Hier wird der enge Zusammenhang zwischen Quantenoperationen und quantenmechanischen Messungen deutlich.

© 2019 Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

- **Freie Quantenoperationen:** Das sind physikalische Transformationen, die sich innerhalb der Ressourcentheorie frei implementieren lassen. Sie sind ebenfalls „kostenlos" und können aus „nutzlosen" freien Quantenzuständen keine nützlichen Zustände erzeugen.

Die konkrete Definition der freien Zustände und Operationen hängt von der jeweiligen Fragestellung ab. Üblicherweise sind freie Quantenzustände mit vergleichsweise wenig Aufwand experimentell zu erzeugen, verglichen mit dem Aufwand für die Erzeugung eines allgemeinen Quantenzustands. Genauso sind freie Quantenoperationen solche Manipulationen des Systems, die mit wenig Aufwand experimentell zu implementieren sind. Gilt Verschränkung als Ressource, sind Zustände ohne Verschränkung als frei anzusehen (**Infokasten** „Korrelationen..."). Solche Zustände lassen sich allein durch lokale Operationen und klassische Kommunikation erzeugen, was den freien Operationen dieser Theorie entspricht (**Abb. 2**). Durch lokale Operationen und klassische Kommunikation ist keine Verschränkung herzustellen, insbesondere kein Singulett-Zustand (Gl. 4).

Eine wichtige Frage in jeder Ressourcentheorie ist die mögliche Konvertierung von Quantenzuständen ineinander – also die Frage, ob ein Anfangszustand ρ durch freie Operationen in einen Endzustand σ überführbar ist. Eine fundamentale Größe dabei ist die Konvertierungsrate, also die maximale Anzahl der Zustände σ, die sich pro Anfangszustand ρ ergeben kann (**Abb. 3**).

Die meisten Ressourcentheorien haben einen besonderen Zustand ρ_r, aus dem jeder andere Zustand allein durch die Anwendung freier Operationen herzustellen ist. Dieser Zustand bildet die fundamentale Einheit der Ressourcentheorie – er ist gewissermaßen die kostbarste oder maximale Ressource. In der Theorie der Verschränkung hat das Singulett diese Rolle, da man aus ihm jeden anderen Zustand durch lokale Operationen und klassische Kommunikation erzeugen kann.

Ist der Ressourcenzustand identifiziert, reduzieren sich die wichtigsten Eigenschaften der Ressourcentheorie auf fünf Punkte:

- Die **Destillierung der Ressource** bedeutet die Überführung eines Quantenzustands ρ in den Ressourcenzustand ρ_r. Die interessante Größe dabei ist die optimale Rate der Destillierung, also die maximale Anzahl von ρ_r, die aus einer gegebenen Zahl von Anfangszuständen ρ durch Anwendung freier Operationen entstehen. **Abb. 3** ist als Destillierung zu interpretieren, wenn $\sigma = \rho_r$ gilt. Auch hier ist streng genommen der asymptotische Grenzfall unendlich vieler Anfangszustände gemeint.
- Der umgekehrte Prozess zur Destillierung ist die asymptotische Überführung des Ressourcenzustands ρ_r in irgendeinen Quantenzustand ρ, die immer möglich ist. Als **Kosten des Zustands** ρ gilt die minimale Zahl von Ressourcenzuständen ρ_r, die für die Herstellung einer gegebenen Zahl von Zuständen ρ nötig ist. In vielen Ressourcentheorien ist jede Quantenoperation mithilfe freier Operationen möglich, wenn zusätzlich Ressourcenzustände konsumiert werden (**Abb. 4**). Die entsprechende minimale Rate bezeichnet die **Kosten der Quantenoperation**.
- Eine Ressourcentheorie ist **asymptotisch reversibel**, wenn freie Operationen zwischen Quantenzuständen verlustfrei umzukehren sind. Viele Ressourcentheorien sind im Allgemeinen nicht reversibel, können jedoch durch sinnvolle Erweiterung der freien Operationen bzw. durch Einschränkung der Zustandsmenge reversibel werden. Die Ressourcentheorie der Verschränkung ist bei Beschränkung auf reine Zustände reversibel.
- Eine Ressourcentheorie hat eine **gebundene Ressource**, wenn es Quantenzustände gibt, die nicht frei herzustellen sind und aus denen keine Ressourcenzustände zu destillieren sind. Eine gebundene Ressource ist also eine extreme Form der Nichtreversibilität. Nicht jede Ressourcentheorie besitzt eine gebundene Ressource, in der Theorie der Verschränkung existiert sie als so genannte gebundene Verschränkung [5].
- Man kann die freien Operationen dadurch erweitern, dass eine katalytische Nutzung von Quantensystemen erlaubt ist. Das bedeutet den Einsatz eines zusätzlichen Katalysators, der am Ende des Prozesses unverändert zurückbleibt (**Abb. 4**). In manchen Ressourcentheorien – insbesondere der Theorie der Verschränkung [6] – bringen solche katalytische Prozesse einen Vorteil.

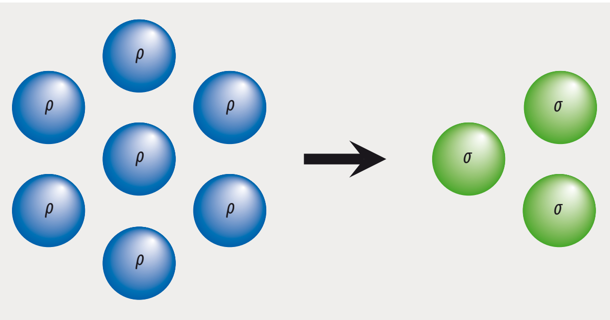

Abb. 3 Die Konvertierung von Zuständen ρ in Zustände σ, hier beispielhaft mit der Rate 3/7 gezeigt, wird streng genommen meist im asymptotischen Limes betrachtet, d. h. im Grenzfall unendlich vieler Anfangszustände.

Die Überprüfung dieser fünf Eigenschaften für eine gegebene Ressourcentheorie kann sehr komplex ausfallen. Das Verständnis dieser Eigenschaften ist jedoch sehr wichtig, um einen Überblick darüber zu erhalten, ob und wie eine Ressourcentheorie der Quantentechnologie nützen kann. So erlaubt diese systematische Herangehensweise Aussagen darüber, ob ein gegebener Quantenzustand für technologische Anwendungen nützlich ist, im Rahmen der Ressourcentheorie der Verschränkung beispielsweise für Anwendungen wie Quantenteleportation und Quantenkryptographie. Allgemein ist jeder destillierbare Zustand technologisch nutzbar. Dazu konvertiert man den Zustand zuerst in Singuletts – was für alle destillierbaren Zustände möglich ist – und benutzt dann die so gewonnenen Singuletts, um die gewünschte Anwendung zu realisieren.

Ressourcentheorien gibt es auch für die Quantenthermodynamik [7]. Hier betrachtet man thermische Zustände als frei, also Zustände der Form

$$\rho_{\mathrm{th}} = \frac{\exp(-H/k_B T)}{Z} \tag{5}$$

 © 2019 Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

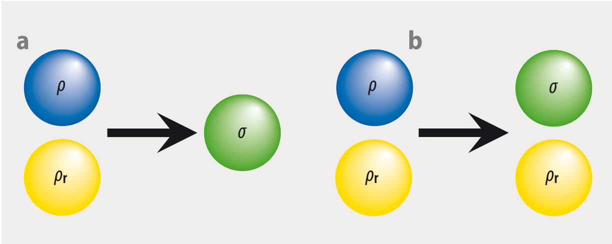

Abb. 4 Ein Zustand ρ lässt sich in den Zustand σ bei Verbrauch des Ressourcenzustands ρ_r konvertieren (a). Bei einer katalytischen Konvertierung bleibt ρ_r erhalten und fungiert als Katalysator (b).

mit dem Hamilton-Operator H, der Boltzmann-Konstante k_B und der Zustandssumme $Z = \mathrm{Sp}(e^{-H/k_BT})$. Koppelt man ein quantenmechanisches System an ein Bad der Temperatur T, so nimmt das System nach genügend langer Zeit von allein einen thermischen Zustand ein. Freie Quantenoperationen in dieser Theorie sind Transformationen, welche die Gesamtenergie von System und Bad nicht verändern. Heutige Forschung konzentriert sich vor allem darauf, mögliche Übergänge der Quantensysteme unter diesen Einschränkungen zu beschreiben – ein Ansatz, der unter anderem zur Formulierung des „Zweiten Hauptsatzes der Quantenthermodynamik" geführt hat [8].

Kohärenz als Ressource

Neben der Verschränkung ist die Kohärenz eine wichtige Eigenschaft von Quantensystemen. Sie charakterisiert quantenmechanische Superpositionen. Wenn diese nicht von der Umgebung isoliert und lange genug sich selbst überlassen sind, geht die Kohärenz verloren (Dekohärenz). Demnach liegt in vielen Situationen eine ausgezeichnete Basis vor, die durch äußere Einflüsse auf das Quantensystem bestimmt ist. Die Ressourcentheorie der Quantenkohärenz ermöglicht eine systematische Untersuchung dieser Phänomene [9]. Hier heißen die freien Zustände inkohärent und sind diagonal in einer ausgezeichneten Basis:

$$\rho_{\mathrm{ink}} = \sum_i p_i \, |i\rangle\langle i|, \tag{6}$$

wobei $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ und $\{p_i\}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, d. h. $p_i \geq 0$ und $\sum_i p_i = 1$. Die Zahl der Systeme, aus denen das Gesamtsystem zusammengesetzt ist, spielt bei dieser Definition keine Rolle: Auch der Zustand eines einzelnen Quantenteilchens kann kohärent oder inkohärent sein. Freie Quantenoperationen sind quantenmechanische Messungen, die keine Kohärenzen erzeugen können.

Wie der Singulett-Zustand die fundamentale Einheit der Ressourcentheorie von Verschränkung bildet, so ist der maximal kohärente Zustand

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \tag{7}$$

die Basiseinheit in der Ressourcentheorie von Quantenkohärenz. In dieser Theorie lässt sich aus jedem Quantenzustand Kohärenz destillieren, solange der Zustand nicht inkohärent ist. Somit gibt es keine gebundene Kohärenz. Im Allgemeinen ist die Kohärenztheorie nicht reversibel.

Die bisher behandelten Konzepte spielen z. B. eine wichtige Rolle in der Quantenmetrologie [10]. Hier ist das Ziel die hochsensitive Messung eines unbekannten Parameters, z. B. der Phase φ in einer unitären Entwicklung $U_\varphi = \exp(-i\varphi H)$, wobei der Hamilton-Operator H die Wechselwirkung des Systems beschreibt. In einer Implementierung im Mach-Zehnder-Interferometer entspricht der Parameter φ der Phasenverschiebung. Für die allgemeine Betrachtung kann die unitäre Entwicklung U_φ als „Blackbox" gelten, die auf beliebige Quantenzustände anzuwenden ist. Misst man den Endzustand nach Anwendung der unitären Operation, sind aus der Statistik der Messergebnisse Rückschlüsse auf den unbekannten Parameter φ möglich. Den Parameter φ gilt es, mit möglichst wenig Ressourcen gemessen in der Anwendungsanzahl N der unitären Operation U_φ möglichst genau abzuschätzen. Dabei ist zwischen der Schrotrauschgrenze, bei welcher der Fehler $\Delta\varphi$ wie $1/\sqrt{N}$ skaliert, und der Heisenberg-Grenze, welche die in der Quantenmechanik bestenfalls erreichbare Skalierung von $1/N$ aufweist, zu unterscheiden.

Ein einfaches Beispiel ist ein Zwei-Niveau-System mit dem Hamilton-Operator $H = E_0|0\rangle\langle 0| + E_1|1\rangle\langle 1|$, wobei keine Entartung vorliegen soll, also $E_0 \neq E_1$. Ein sehr einfaches Verfahren zur Abschätzung des Parameters φ besteht darin, die unitäre Operation N-mal auf den Zustand $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ anzuwenden, wobei die Parameter a und b die Normierungsbedingung $|a|^2 + |b|^2 = 1$ erfüllen sollen.

Korrelationen in Quantensystemen

Ist ein Quantensystem aus zwei Teilsystemen zusammengesetzt, können verschiedene Typen von Korrelationen auftreten (**Abb.**).

Zustände ohne Verschränkung (auch **separabel** genannt) lassen sich als Mischung von beliebigen **lokalen** Zuständen $|\phi_i\rangle$ und $|\psi_i\rangle$ repräsentieren:

$$\rho_{\mathrm{sep}} = \sum_{ij} p_{ij} \, |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \otimes |\psi_j\rangle\langle\psi_j|,$$

mit $p_{ij} \geq 0$ und $\sum_{ij} p_{ij} = 1$ und $\langle\phi_i|\phi_j\rangle \neq \delta_{ij}$ sowie $\langle\psi_i|\psi_j\rangle \neq \delta_{ij}$.

Alle Zustände, die **nicht separabel** sind, sind **verschränkt**. Dazu gehört insbesondere der Singulett-Zustand (Gl. 4).

Klassisch korrelierte Zustände ρ_{kl} setzen sich aus Mischungen von lokalen orthogonalen Zuständen in einer beliebigen lokalen Basis $|a_i\rangle$ und $|b_j\rangle$ zusammen:

$$\rho_{\mathrm{kl}} = \sum_{ij} p_{ij} \, |a_i\rangle\langle a_i| \otimes |b_j\rangle\langle b_j|,$$

wobei $p_{ij} \geq 0$ und $\sum_{ij} p_{ij} = 1$ sowie $\langle a_i|a_j\rangle = \langle b_i|b_j\rangle = \delta_{ij}$.

Zustände, die **nicht klassisch korreliert** sind, besitzen **allgemeine Quantenkorrelationen**. Ferner haben Produktzustände $\rho = \mu \otimes \nu$ keine Korrelationen, weder klassisch noch quantenmechanisch.

Die Menge der separablen Zustände (grün) ist eine konvexe Teilmenge aller Quantenzustände (blau). Die klassisch korrelierten Zustände (durchgezogene Linien) bilden eine nicht-konvexe Teilmenge der separablen Zustände.

© 2019 Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

Der Endzustand ist also

$$U_\varphi^N|\psi\rangle = a\exp(-iN\varphi\, E_0)|0\rangle + b\exp(-iN\varphi\, E_1)|1\rangle. \quad (8)$$

Hier wird bereits die Rolle von Quantenkohärenz klar: Nur falls beide Parameter a und b von Null verschieden sind, lässt sich durch Messung am Endzustand $U_\varphi^N|\psi\rangle$ auf den unbekannten Parameter φ schließen.

Im obigen Beispiel handelt es sich um ein einziges Zwei-Niveau-System, es liegt also weder Verschränkung noch eine Art von Korrelation vor. Interessanterweise ist dieses einfache Verfahren bereits die optimale Methode zur Bestimmung von φ, solange keine weiteren Störeinflüsse berücksichtigt werden. So skaliert der Fehler $\Delta\varphi$ wie $1/N$ und erreicht damit die Heisenberg-Grenze. Um Störeinflüsse zu berücksichtigen, sind verschränkte Zustände zu verwenden. Diese haben den Vorteil, dass die unitäre Operation U_φ auf mehreren Teilsystemen parallel auszuführen ist und die Methode deutlich schneller ist als die sequenzielle Methode.

Wird die unitäre Operation U_φ auf ein Teilsystem eines zusammengesetzten Zustands angewendet, so kann jeder Zustand zur Bestimmung von φ dienen, solange er allgemeine Quantenkorrelationen hat (**Infokasten** „Korrelationen…") Das gilt selbst, wenn die Eigenbasis des zugrundeliegenden Hamilton-Operators nicht bekannt ist. Die Präsenz allgemeiner Korrelationen garantiert, dass eine Bestimmung des unbekannten Parameters φ möglich ist [11]. Allgemeine Quantenkorrelationen spielen in vielen Prozessen eine wichtige Rolle, auch bei der Verteilung von Verschränkung. So lässt sich Verschränkung durch Austausch von unverschränkten Photonen verteilen, die ausgetauschten Photonen müssen jedoch allgemeine Quantenkorrelationen besitzen. Dieses Phänomen wurde theoretisch untersucht [12] und experimentell bestätigt [13].

Die Frage, ob allgemeine Quantenkorrelationen eine Ressource sind, wurde in letzten Jahren intensiv erforscht [14]. Grundsätzlich problematisch ist dabei, dass die Menge der klassisch korrelierten Zustände nicht konvex ist (**Infokasten** „Korrelationen…"), was die Formulierung einer „Ressourcentheorie allgemeiner Quantenkorrelationen" erschwert. Andererseits haben sich allgemeine Quantenkorrelationen als ein wichtiges Werkzeug der Quanteninformationstheorie bewährt: Sie ermöglichen es, Quantensysteme und quantenmechanische Prozesse zu untersuchen, in denen keine Verschränkung vorkommt.

Ausblick

Mithilfe von Ressourcentheorien lassen sich Zusammenhänge zwischen verschiedenen Ressourcen aufzeigen: So begrenzt etwa der Grad der Reinheit eines Zustands seine mögliche Kohärenz und Verschränkung [15]. Strukturelle Verbindungen zwischen verschiedenen Theorien sind in diesem Rahmen zu verstehen. Die Struktur einer Ressourcentheorie ist wohldefiniert, einfach und elegant. Jedoch macht sie keine Aussage darüber, in welchen Protokollen und Anwendungen welche Ressource nützlich und zentral ist. Zur Beantwortung dieser zukunftsweisenden Frage sind in den kommenden Jahren noch etliche menschliche Ressourcen nötig.

Literatur

[1] *C. H. Bennett* et al., Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993)
[2] *J.-G. Ren* et al., Nature **549**, 70 (2017)
[3] *A. K. Ekert*, Phys. Rev. Lett. **67**, 661 (1991)
[4] *M. Horodecki* et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 240403 (2002); *F. G. S. L. Brandão* und *M. B. Plenio*, Nature Physics **4**, 873 (2008); *F. G. S. L. Brandão* und *G. Gour*, Phys. Rev. Lett. **115**, 070503 (2015); Phys. Rev. Lett. **115**, 199901 (2015); *B. Coecke* et al., arXiv:1409.5531
[5] *M. Horodecki* et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 5239 (1998)
[6] *D. Jonathan* und *M. B. Plenio*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3566 (1999)
[7] *D. Janzing* et al., Int. J. Theor. Phys. **39**, 2717 (2000)
[8] *F. G. S. L. Brandão* et al., PNAS **112**, 3275 (2015)
[9] *T. Baumgratz* et al., Phys. Rev. Lett. **113**, 140401 (2014); *A. Winter* und *D. Yang*, Phys. Rev. Lett. **116**, 120404 (2016); *A. Streltsov* et al., Rev. Mod. Phys. **89**, 041003 (2017), *J. Aberg*, arXiv:quant-ph/0612146 (2006)
[10] *V. Giovannetti* et al., Science **306**, 1330 (2004); Phys. Rev. Lett. **96**, 010401 (2006); Nature Photonics **5**, 222 (2011)
[11] *D. Girolami* et al., Phys. Rev. Lett. **112**, 210401 (2014)
[12] *T. S. Cubitt* et al., Phys. Rev. Lett. **91**, 037902 (2003); *A. Streltsov, H. Kampermann* und *D. Bruß*, Phys. Rev. Lett. **108**, 250501 (2012); *T. K. Chuan* et al., Phys. Rev. Lett. **109**, 070501 (2012)
[13] *A. Fedrizzi* et al., Phys. Rev. Lett. **111**, 230504 (2013); *C. E. Vollmer* et al., Phys. Rev. Lett. **111**, 230505 (2013); *C. Peuntinger* et al., Phys. Rev. Lett. **111**, 230506 (2013)
[14] *K. Modi* et al., Rev. Mod. Phys. **84**, 1655 (2012); *A. Streltsov*, Quantum Correlations Beyond Entanglement and Their Role in Quantum Information Theory, Springer, Cham u. a. (2015), arXiv:1411.3208
[15] *A. Streltsov* et al., New J. Phys. **20**, 053058 (2018)

Die Autoren

Alexander Streltsov (FV Quantenoptik und Photonik) promovierte 2013 über allgemeine Quantenkorrelationen. Für seine Dissertation erhielt er den Dissertationspreis der Uni Düsseldorf und den SAMOP-Dissertationspreis. Anschließend forschte er am Institut de Ciències Fotòniques in Castelldefels, Spanien, an der FU Berlin und an der TU Danzig. Seit 2018 leitet er eine Forschergruppe an der Universität Warschau.

Hermann Kampermann (FV Quantenoptik und Photonik) ist Privatdozent an der Universität Düsseldorf. Er promovierte 2004 an der Uni Duisburg-Essen und ist seit Ende 2004 Mitglied in der Arbeitsgruppe von Dagmar Bruß.

Dagmar Bruß (FV Quantenoptik und Photonik) promovierte 1994 an der Universität Heidelberg. Ihre Postdoc-Jahre führten sie nach Oxford, Turin und Hannover. Sie habilitierte sich 2002 und leitet seit 2004 den Lehrstuhl für Theoretische Physik III an der Universität Düsseldorf.

Prof. Dr. Dagmar Bruß, Dr. Hermann Kampermann, Universität Düsseldorf, Universitätsstr. 1,40225 Düsseldorf, **Dr. Alexander Streltsov,** Centre of New Technologies, S. Banacha 2c, 02-097 Warschau, Polen

© 2019 Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim