

## TOPOLOGIE

# Topologisches Quantenrechnen

**Nach der experimentellen Realisierung topologischer Phasen gilt es, topologische Qubits zu konstruieren und gezielt auszulesen.**

Torsten Karzig und Bela Bauer

Quantencomputer könnten bisher hoffnungslos schwierige Probleme lösen. Realisiert werden sie als ein System von Qubits. Hierbei ist aber ein Kompromiss nötig: Als Speicher sollte ein Qubit möglichst wenig wechselwirken, zum Ausführen von Operationen dagegen stark. Einen Ausweg aus diesem Dilemma verspricht das topologische Quantenrechnen, das auf dem gezielten Austausch nicht-abelscher Anyonen basiert.

**B**eispiele für Probleme, die sich mittels Quantencomputer lösen lassen könnten, finden sich in der Simulation komplexer quantenmechanischer Systeme aus Chemie oder Materialwissenschaften, im Entschlüsseln kryptographischer Verfahren oder in drastischen

Verbesserungen der künstlichen Intelligenz. Ein Quantencomputer benötigt eine Ansammlung von Quantenbits (Qubits), die einen quantenmechanischen Zustand speichern und mit sehr hoher Genauigkeit manipulieren können. Was sich leicht anhören mag, stellt sich in der experimentellen Realität als monumentale Herausforderung dar. Nach mehr als 20 Jahren aktiver Forschung in akademischen und industriellen Laboren auf der ganzen Welt sind bisher nur kleine Testsysteme verfügbar.

In der Alltagserfahrung treten die Eigenschaften individueller Quantensysteme – Superposition verschiedener Zustände, Kollaps der Wellenfunktion und Verschränkung – nicht in Erscheinung. Grund dafür ist Dekohärenz: Kopelt ein quantenmechanisches System auch nur schwach an seine Umgebung, werden die Superposition und Verschrän-

kung quantenmechanischer Zustände zerstört. Das System verhält sich effektiv klassisch.

Die erste Herausforderung im Bau eines Qubits besteht also darin, Dekohärenz zu vermeiden. Dazu ist ein quantenmechanisches System erforderlich, das sich weitgehend von seiner Umgebung entkoppeln kann. Die Liste der bereits getesteten Systeme reicht von Photonen über Spins einzelner Elektronen oder Zustände einzelner Atome bis zu Vielteilchenzuständen in mesoskopischen Supraleitern. Die Kohärenzzeit, also die Zeit, für die ein quantenmechanischer Zustand erhalten bleibt, variiert von System zu System drastisch, kann aber mehrere Sekunden betragen.

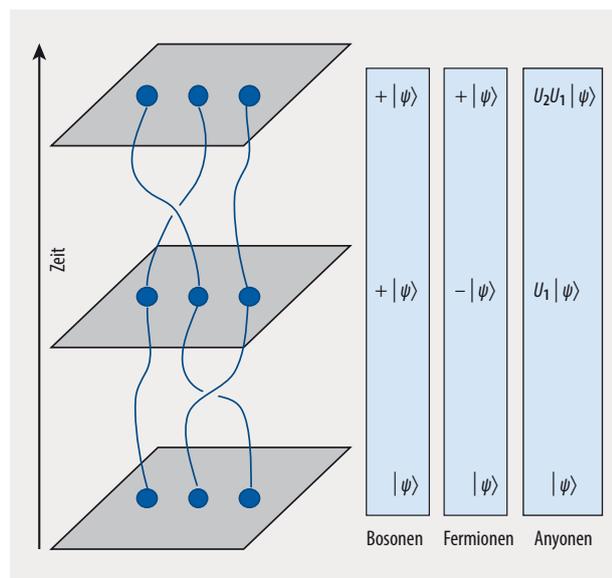
Ein Computer muss aber auch in der Lage sein, die gespeicherten Daten zu verarbeiten. Die zweite Herausforderung besteht also darin, den Zustand eines oder mehrerer Qubits gezielt und präzise zu manipulieren – beispielsweise mithilfe von Quantengattern. Das ist eine Gruppe unitärer quantenmechanischer Operationen ähnlich den logischen Gattern, auf denen klassische Computer beruhen. Nach der Anzahl der involvierten Qubits unterscheidet man in Ein- und Zwei-Qubit-Gatter. Letztere erlauben es, zwei Qubits miteinander zu verschränken, was die Grundlage für die Rechenleistung des Quantencomputers bildet.

Zur experimentellen Umsetzung solcher Gatter ist es erforderlich, die Wechselwirkung zwischen verschiedenen Qubits zu kontrollieren: Je stärker die Wechselwirkung, desto schneller das Gatter und desto mehr Gatter lassen sich ausführen, bevor Dekohärenz den Zustand zerstört. Die größte Herausforderung beim Bau eines Quantencomputers folgt aus dem Widerspruch zwischen diesen beiden Anforderungen: Als Speicher sollte das Qubit so wenig wie möglich wechselwirken, während es zum Ausführen von Gattern stark wechselwirken sollte. Daher können die experimentellen Plattformen mit den längsten Kohärenzzeiten Gatter häufig nur langsam oder ungenau ausführen, während solche, die schnelle Gatter erlauben, kurze Kohärenzzeiten haben.

### Topologische Qubits

Seit den späten 1990er-Jahren ist ein anderer Zugang theoretisch bekannt, der diese Abwägung vermeidet: topologisches Quantenrechnen [1]. Ursprünglich auf bahnbrechenden Arbeiten von Alexey Kitaev und anderen beruhend, hat dieses Konzept eine bemerkenswerte Entwicklung von abstrakten mathematischen Ideen aus Quantenfeldtheorie und Knotentheorie hin zu konkreten Experimenten durchlaufen.

Bosonen und Fermionen unterscheiden sich bekanntermaßen im Verhalten der quantenmechanischen Vielteilchen-Wellenfunktion unter Austausch zweier Teilchen (Austauschstatistik). Für Bosonen kehrt die Wellenfunktion mit Vorzeichen +1 zu sich selbst zurück, während für Fermionen das Vorzeichen -1 auftritt (**Abb. 1**). In drei Raumdimensionen können Punktteilchen nur als Bosonen oder Fermionen auftreten. Ist die Bewegung von Teilchen auf zwei Raumdimensionen beschränkt, gibt es allerdings weitere Möglichkeiten. Bei abelschen Anyonen führt der Austausch zu einer Phase, die weder +1 noch -1 ist. Noch



**Abb. 1** Beim Austausch von Teilchen (hier im ersten Schritt der Austausch der beiden rechten Teilchen, im zweiten Schritt der beiden linken) verflechten sich deren Weltlinien, welche die zeitabhängige Position der Teilchen markieren. Die Wellenfunktion von Bosonen bleibt unbeeinflusst. Bei Fermionen tritt mit jedem Austausch ein Minuszeichen auf. Für Anyonen führt jeder Austausch zu einer unitären Transformation, wobei die Transformationen für verschiedene Austauschprozesse meist nicht kommutieren.

exotischer sind nicht-abelsche Anyonen, bei denen eine allgemeinere Transformation des quantenmechanischen Zustands auftreten kann – mehr dazu weiter unten. Nach einer Reihe solcher Vertauschungen in einer Sammlung nicht-abelscher Anyonen hängt der Zustand am Ende von der Reihenfolge der Vertauschungen ab; daher der Name nicht-abelsch. Ein topologischer Quantenrechner nutzt das gezielte Vertauschen nicht-abelscher Anyonen aus, um damit Quantengatter durchzuführen.

Auftreten können solche exotischen Teilchen in topologischen Phasen. Topologische Phasen sind nicht durch spontane Symmetriebrechung charakterisiert, sondern durch bestimmte nicht-lokale, topologische Eigenschaften, die nicht von den Details des Systems abhängen. Ein Beispiel ist der Hall-Leitwert im Quanten-Hall-Effekt. Unabhängig von den Details des Materials ist dieser nahezu exakt auf ein ganzzahliges Vielfaches von  $\sigma_H = e^2/h$  quantisiert, wobei  $e$  die Elektronenladung und  $h$  die Planck-Konstante sind. Beim fraktionalen Quanten-Hall-Effekt können darüber hinaus anyonische Anregungen auftreten, deren Austauschstatistik eine topologische Eigenschaft und daher ähnlich wie der Hall-Leitwert nahezu exakt quantisiert ist.

Während als gesichert gilt, dass abelsche Anyonen im fraktionalen Quanten-Hall-Effekt auftreten, ist der Nachweis nicht-abelscher Anyonen noch umstritten. Doch bahnbrechende Arbeiten haben Anfang der 2000er-Jahre gezeigt, dass in manchen Systemen Defekte zu gebundenen Zuständen führen, die sich in vielerlei Hinsicht wie nicht-abelsche Anyonen verhalten. Ein Beispiel dafür sind topologische  $p_x+ip_y$ -Supraleiter, in denen die Cooper-Paare nicht wie sonst üblich Spin-Singulets mit Drehimpuls 0 sind, sondern als Spin-Triplets mit Drehimpuls 1 auftreten. Vor-

tizes in diesen unkonventionellen Supraleitern, wie sie z. B. durch ein externes Magnetfeld entstehen können, führen zu einem gebundenen Zustand mit verschwindender Energie: der Majorana-Nullenergiemode [2].

Die zwei wesentlichen Eigenschaften nicht-abelscher Anyonen, die sie als Qubits interessant machen und auch bei Majorana-Nullpunktsmoden auftreten, sind die topologische Grundzustandsentartung und die nicht-abelsche Austauschstatistik. Die Grundzustandsentartung ist für Majorana-Nullpunktsmoden einfach zu verstehen. Sie treten immer paarweise auf, wobei ein Paar gemeinsam einen nicht-lokalen fermionischen Zustand bildet, der besetzt oder unbesetzt sein kann. Da es sich um Nullenergiemoden handelt, hängt die Energie des Systems nicht von der Besetzung dieses Zustands ab, d. h. der Grundzustand für  $N$  Majorana-Nullpunktsmoden ist  $2^{N/2}$ -fach entartet und durch eine Bandlücke von den angeregten Zuständen getrennt. Diese topologische Grundzustandsentartung bildet die Grundlage für das topologische Qubit, wobei die Qubit-Zustände durch die Besetzungszahlen der Majorana-Paare gegeben sind (**Infokasten** „Topologische Qubits“). Da die gespeicherte Information über die Majorana-Moden verteilt ist, lassen sich die Zustände durch keine lokale Messung unterscheiden. Daher können unabsichtliche lokale Störungen die Information nicht zerstören. Dies bildet die Grundlage für den topologischen Schutz von Quanteninformation.

Nun stellt sich die Frage, wie sich in einem solchen System Quantengatter ausführen lassen, ohne den topologischen Schutz zu zerstören. Im Gegensatz zu konventionellen Qubits geschieht dies nicht durch gezielte Steuerung der Wechselwirkungen des Qubits, sondern mittels der nicht-abelschen Austauschstatistik von Anyonen: Vertauscht man die Position zweier nicht-abelscher Anyonen oder zweier Majorana-Nullpunktsmoden, ohne dass sie sich nahe kommen und miteinander wechselwirken können, so führt dies eine Transformation zwischen den verschiedenen Grundzuständen des Systems aus. Da dieser Prozess effektiv die Weltlinien der Teilchen verknotet, wird er im Englischen als Braiding („Flechten“) bezeichnet. Die hierbei ausgeführte Transformation hängt nur von den topologischen Eigenschaften des Weltlinien-Knotens und nicht

von den Details des Austauschs ab, d. h. ein Gatter lässt sich präzise ausführen, ohne die Bewegung der Quasiteilchen präzise kontrollieren zu müssen.

Damit ist es gelungen, sowohl das Speichern als auch das Manipulieren von Quanteninformation in topologisch geschützte Eigenschaften des Systems – nämlich die topologische Grundzustandsentartung und die Austauschstatistik von Anyonen – abzubilden.

### Topologische Phasen in supraleitenden Nanodrähten

Bis zur Entdeckung topologischer Isolatoren vermutete man topologische Supraleiter nur in wenigen effektiv zweidimensionalen supraleitenden Materialien. In einer wegweisenden Arbeit zeigten Liang Fu und Charlie Kane, dass ein konventioneller Supraleiter, der mit einem topologischen Isolator in Kontakt ist, auf dessen Oberfläche eine topologische Phase induzieren kann [3]. Damit lassen sich topologische Phasen wie in einem Baukasten zusammensetzen. Von dieser Grundidee ausgehend finden sich viele verschiedene Materialkombinationen, die im Prinzip zu der gewünschten topologischen Phase führen können. Dies hat zu einem wahren Goldrausch an Vorschlägen geführt, von denen einige experimentell umgesetzt wurden.

Derzeit am weitesten fortgeschritten sind eindimensionale  $p$ -Wellen-Supraleiter, die Alexei Kitaev 2001 bei Microsoft Research theoretisch beschrieben hat [4]. Hier entstehen die Majorana-Moden am Ende eines eindimensionalen Systems (**Abb. 2**). Im Jahr 2010 schlugen die Gruppen um Felix von Oppen und Sankar Das Sarma [5, 6] unabhängig voneinander eine experimentelle Realisierung dieser Phase vor. Hierzu wird ein halbleitender Nanodraht in einem externen Magnetfeld mit einem konventionellen Supraleiter kombiniert, um eine eindimensionale topologische Phase zu realisieren (**Infokasten** „Rashba-Modell“ und **Abb. 2**). Das Halbleiter-Material sollte hierfür starke Spin-Bahn-Kopplung und einen großen  $g$ -Faktor aufweisen. Zudem sollte die Grenzfläche zwischen Halbleiter und Supraleiter möglichst homogen und frei von Störstellen sein. Häufig kommt für den Halbleiter Indium-Arsenid oder Indium-Antimonid zum Einsatz, für den Supraleiter meist Alumi-

## Topologische Qubits aus Majorana-Moden

In topologischen Supraleitern entstehen an bestimmten Defekten **Majorana-Nullenergiemoden**. Diese sind beschrieben durch selbstadjungierte Operatoren  $\gamma_i = \gamma_i^\dagger$ , welche die Kommutationsregeln für fermionische Operatoren erfüllen, d. h.  $\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}$ . Zwei solche Moden lassen sich zu einer regulären spinlosen Fermion-Mode kombinieren,  $f_{12} = (\gamma_1 + i\gamma_2)/2$ ,  $f_{12}^\dagger = (\gamma_1 - i\gamma_2)/2$ . Die Energie des Systems hängt von der Besetzung dieser Mode ab, d. h. die exakte Grundzustandsentartung wird durch einen Term  $\epsilon f_{12}^\dagger f_{12} = (\epsilon/2)(\gamma_1 \gamma_2 + 1)$  aufgespalten. Die Energie  $\epsilon$  hängt vom Überlapp der Wellenfunktionen der beiden Majorana-Nullpunktsmoden ab und verschwindet bei hinreichend großer Distanz  $L$  exponentiell,  $\epsilon = \mathcal{O}(e^{-L/\xi})$ , wobei  $\xi$  eine von den mikroskopischen Parametern des Systems abhängige Längenskala ist.

Die **Besetzungszahlen** solcher delokalisierten fermionischen Moden können nun dazu dienen, ein Qubit zu definieren, dessen

Zustände nahezu entartet und nicht durch lokale Operatoren auszulesen sind. Ein einfaches Qubit lässt sich aus einem System von vier Majorana-Nullpunktsmoden  $\gamma_1, \dots, \gamma_4$  bilden. Dieses hat vier Grundzustände  $|n_{12}, n_{34}\rangle$ , abhängig von den Eigenwerten  $n_{ij} = 0, 1$  der Besetzungszahloperatoren  $f_{ij}^\dagger f_{ij}$ . Häufig ist die Gesamtzahl von Fermionen des Qubits fixiert, sodass man sich auf die Zustände innerhalb eines Paritätssektors beschränkt. Die Qubit-Zustände sind dann zum Beispiel  $|00\rangle$  und  $|11\rangle$ .

Die **Pauli-Matrizen**, die das Qubit beschreiben, lassen sich aus den Majorana-Operatoren konstruieren:

$$Z = i\gamma_1\gamma_2, \quad X = i\gamma_2\gamma_3, \quad Y = i\gamma_1\gamma_3$$

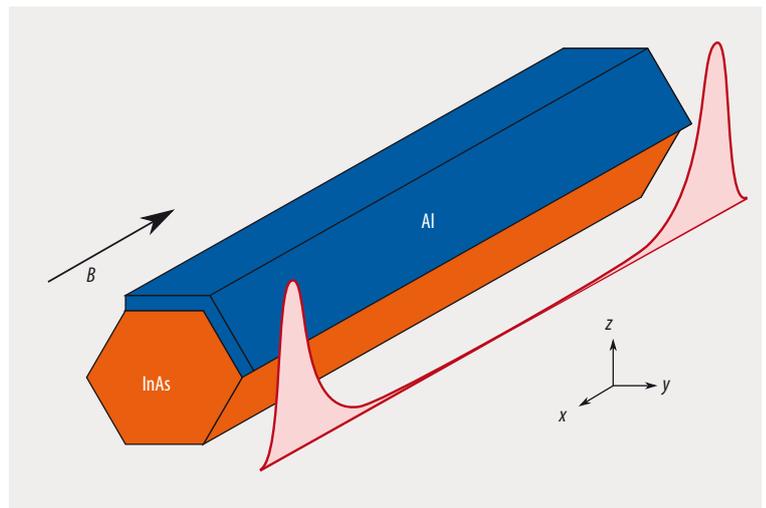
Diese Operatoren erfüllen die üblichen Kommutationsregeln für Pauli-Operatoren.

nium. Diese Komponenten lassen sich relativ leicht kombinieren. So fanden bereits 2012 verschiedene Gruppen experimentelle Hinweise für diese topologische Phase.

Der experimentelle Nachweis von Majorana-Moden beruht häufig auf Messungen des differentiellen Leitwerts als Funktion der angelegten Spannung. Hierzu koppelt man einen gewöhnlichen Leiter schwach an das Ende des Supraleiters. Während bei einem konventionellen Supraleiter der differentielle Leitwert für angelegte Spannungen kleiner als die supraleitende Energielücke verschwindet, führt die Majorana-Mode am Ende eines topologischen Supraleiters zu einer quantisierten Leitwertspitze der Höhe  $2e^2/h$  bei verschwindender angelegter Spannung. 2012 gelang es, diese Leitwertspitze zu beobachten und 2018 die Quantisierung der Höhe nachzuweisen [7].

Trotz dieser theoretischen Vorhersage und experimenteller Erfolge bleibt der zweifelsfreie Nachweis von Majorana-Moden schwierig. Denn auch nicht-topologische Phänomene können Leitwertspitzen bei verschwindender Spannung auslösen. So können z. B. für eine bestimmte Wahl externer Parameter gebundene Zustände mit verschwindender Energie entstehen, die keine Majorana-Moden sind. Im Gegensatz zu topologischen Anregungen sollten solche Effekte unter leichter Variation der externen Parameter nicht stabil sein. In der Praxis gelingt eine quantitative Abgrenzung nur durch sorgfältige Untersuchungen und den Vergleich mit numerischen Simulationen [8].

Vielversprechend sind auch Transportmessungen, bei denen der topologische Supraleiter nicht geerdet wird und somit ähnlich einem klassischen Kondensator eine Ladungsenergie besitzt. Aus der Kenntnis, wie viel Energie nötig ist, um dem Supraleiter ein weiteres Elektron hinzuzufügen, sind Rückschlüsse auf die Abweichungen der Energie vom Nullwert perfekt isolierter Majorana-Moden



**Abb. 2** Im Halbleiter-Nanodraht (hier InAs), der sich in einem externen Magnetfeld befindet, wird durch den Kontakt mit einem Supraleiter (hier Al) eine topologische supraleitende Phase induziert. Die Verteilung der Wellenfunktion der Majorana-Moden in x-Richtung ist neben dem Draht skizziert.

möglich. Laut theoretischer Vorhersage nähert sich in endlichen Nanodrähten die Energie der Majorana-Moden exponentiell Null an. Hinweise darauf fanden sich für eine Reihe von Nanodrähten unterschiedlicher Länge [7].

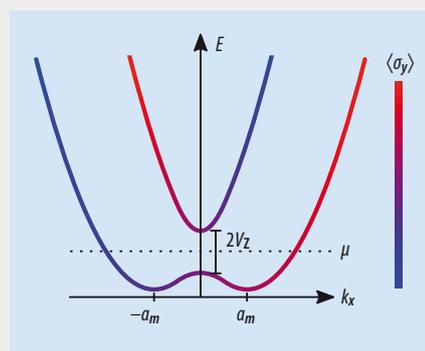
Darüber hinaus gibt es weitere vielversprechende experimentelle Realisierungen von Majorana-Nullenergiemoden. Ein Beispiel sind Ketten magnetischer Atome, die sich auf einem supraleitenden Material mit starker Spin-Bahn-Kopplung befinden. Während die Grundzustaten ähnlich sind wie im Rashba-Modell, ist die konkrete Zusammensetzung anders und erlaubt es, per Rastertunnelmikroskopie die lokale Zustandsdichte direkt zu messen und die Majorana-Nullpunktsmoden örtlich aufzulösen.

## Das Rashba-Modell

In einem herkömmlichen s-Wellen-Supraleiter verbinden sich Elektronen mit entgegengesetztem Spin und Impuls zu Cooper-Paaren. Die Grundlage für p-Wellen-supraleitende topologische Phasen ist die Kombination aus spinlosen Fermionen und Supraleitung. Üblicherweise ist diese Situation nicht zu erreichen, da entweder Elektronen beider Spins mit nahezu gleicher Dichte auftreten oder Supraleitung unterdrückt ist. Das Zusammenspiel aus Spin-Bahn-Kopplung und Zeeman-Effekt ermöglicht aber eine Bandstruktur, die effektiv ein spinloses System beschreibt, das mit Supraleitung kompatibel ist. Der Ausgangspunkt ist folgender Hamiltonian für ein eindimensionales System:

$$H_{\text{Rashba}} = \frac{k_x^2}{2m} + ak_x \sigma_y + V_z \sigma_x - \mu.$$

Hierbei sind  $k_x$  der Impuls entlang des Drahtes und  $m$  die effektive Masse;  $a$  ist die Stärke der Rashba-Spin-Bahn-Kopplung,  $V_z$  die durch ein externes Magnetfeld verursachte Zeeman-Energie, und  $\mu$  ist das chemische Potential, das effektiv die Ladungsdichte kontrolliert.



Der erste Term führt zu einem gewöhnlichen parabolischen Band, das für die beiden Spinkomponenten entartet ist. Durch den Spin-Bahn-Term verschieben sich die Parabeln der Spinpolarisation  $\sigma_y = \pm 1$  gegeneinander. Die Spinentartung am Impuls  $k_x=0$  bleibt jedoch vorerst erhalten. Der Zeeman-Term wirkt entlang der  $\sigma_x$ -Achse und mischt somit die  $\sigma_y$ -Zustände, sodass eine Bandlücke bei  $k_x=0$  entsteht (**Abb.**).

Stellt man das chemische Potential  $\mu$  durch elektrostatische Manipulation so ein, dass es in die Bandlücke bei  $k_x=0$  fällt, schneidet nur ein Band das chemische Potential, d. h. das System ist effektiv spinlos. Zusätzlich führt die Spin-Bahn-Kopplung dazu, dass Niedrigenergiezustände mit entgegengesetztem Impuls einen weitgehend entgegengesetzten Spin besitzen. Das erlaubt eine p-Wellen-supraleitende Phase, wenn das System in Kontakt mit einem konventionellen Supraleiter kommt. Dafür muss das chemische Potential im richtigen Bereich gewählt sein. Liegt es außerhalb der Bandlücke bei  $k_x=0$ , geht der spinlose Charakter verloren und das gesamte System verhält sich wie ein konventioneller s-Wellen-Supraleiter.

## Der Weg zum skalierbaren Quantencomputer

Nun stellt sich die Frage, wie aus einer Gruppe von Nano-drähten ein topologisches Qubit oder gar ein Quantencomputer zu bauen ist. Wie bereits diskutiert, werden Quantengatter durch Braiding, also effektiv durch das Verschieben von Majorana-Moden, ausgeführt. Dafür könnte nützlich sein, dass sich in Nanodrähten die Enden von topologischen Phasen, und somit auch die Majorana-Moden, beispielsweise durch elektrostatische Manipulation verschieben lassen. In der Praxis ist es jedoch schwierig, solche Operationen schnell, zuverlässig und skalierbar auszuführen.

Eine Alternative, die das Verschieben von Majorana-Moden vermeidet, ist das messungsbasierte topologische Quantenrechnen. Hierbei bleiben die Majorana-Moden am gleichen Ort, während projektive Messungen an Gruppen von Majorana-Moden den Zustand manipulieren (**Infokasten** „Messungsbasiertes Quantenrechnen“). Dafür wird das Qubit um ein weiteres Paar an Majorana-Moden erweitert: Das System hat damit insgesamt einen vierfach entarteten Grundzustand. Eine quantenmechanische Messung mit zwei möglichen Messergebnissen legt den Zustand nur zum Teil durch die Messergebnisse fest. Die Wellenfunktion kollabiert also nicht vollständig zu einem klassischen Zustand, sondern wird in einen zweidimensionalen Unterraum des vierdimensionalen Hilbert-Raums projiziert. In diesem Fall entspricht dies genau der Messung der Besetzung eines Paares aus Majorana-Moden. Geeignete Ladungsmessungen erlauben es, die Besetzungszahlen zu bestimmen. Für den Quantencomputer ist entscheidend, dass eine geeignete Abfolge solcher Messungen äquivalent zum Vertauschen zweier Majorana-Nullenergiemoden ist und sich durch Messungen topologisch geschützte Quantengatter auf den Zustand des Qubits anwenden lassen. Diese messungsba-

sierte Herangehensweise erlaubt es, skalierbare Netzwerke an Nanodrähten zu entwickeln, wie sie für einen Quantencomputer nötig wären [9].

Durch Messungen an vier Majorana-Moden verteilt auf zwei Qubits ist es möglich, Quantengatter auf zwei Qubits anzuwenden und diese miteinander zu verschränken. Hierbei entstehen Clifford-Gatter – gewissermaßen der Befehlsatz des Quantencomputers. Leider reichen diese nicht aus, um einen beliebigen Quantenalgorithmus auszuführen. Zusätzlich sind Operationen nötig, die nicht topologisch geschützt und daher anfälliger für Fehler sind. Allerdings kann man die dabei auftretenden Fehler mithilfe von Clifford-Operationen und Messungen korrigieren und somit einen vollständigen Satz topologisch geschützter Quantenoperationen destillieren.

### Fehlerquellen vermeiden

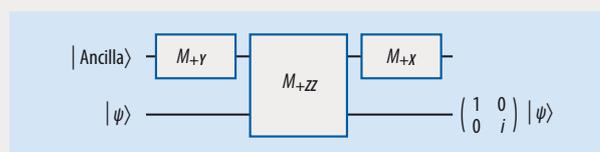
Die topologischen Eigenschaften der Majorana-Nullpunktsmoden schützen einen darauf basierenden topologischen Quantenrechner gegen viele Fehlerquellen, beispielsweise entwickeln die zwei Zustände eines Qubits keine unkontrollierte relative Phase zueinander. Allerdings kann z. B. ein thermisch angeregtes Elektron die Besetzung einer Gruppe von Majorana-Moden und damit den gespeicherten Quantenzustand ändern. Solche Prozesse sind zwar exponentiell in der inversen Temperatur, aber nicht in der Größe des Systems unterdrückt. In der messungsbasierten Methode ist eine weitere Fehlerquelle der Messfehler. Zwar garantieren die topologischen Eigenschaften des Systems, dass man bis auf exponentiell kleine Korrekturen entlang der gewünschten Achse misst. Damit statistische Fluktuationen kein falsches Messergebnis verursachen, gilt es aber, ausreichend lange zu messen.

## Messungsbasiertes Quantenrechnen – ein Beispiel

Ein grundlegendes Gesetz der Quantenmechanik besagt, dass Messungen den Zustand eines Systems verändern. Misst man zum Beispiel in einem Qubit, das sich im Überlagerungszustand  $|\psi\rangle = |0\rangle + |1\rangle$  befindet, den Z-Pauli-Operator, so kollabiert der Zustand je nach Messergebnis auf  $|0\rangle$  oder  $|1\rangle$ . Der Effekt einer Messung (bei bekanntem Ergebnis) ist somit als Projektion des Zustands zu verstehen.

Messungsbasiertes Quantenrechnen nutzt solche Projektionen aus, um einen Qubit-Zustand gezielt zu verändern. Damit die Information im Qubit dabei nicht verloren geht, sind zusätzliche Hilfs-Qubits (Ancilla-Qubits, **Abb.**) nötig. Dabei sind die Anfangszustände des Daten-Qubits und des Ancilla-Qubits auf der linken Seite gegeben. Mittels einer Reihe von Messungen wird der Anfangszustand zum Endzustand auf der rechten Seite entwickelt. Hierbei bezeichnet  $M_{+a}$  die Messung des entsprechenden Pauli-Operators auf einem Qubit und  $M_{+zz}$  die Messung eines Pauli-Operators auf zwei Qubits.

Die Messsequenz erfüllt drei verschiedene Rollen: Zuerst wird das Ancilla-Qubit in den Zustand  $|+Y\rangle = (|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}$  initialisiert. Anschließend verschränkt die gemeinsame Messung das Ancilla- und das Daten-Qubit, das sich in einem unbekanntem Zustand  $|\psi\rangle$  befindet. Nachdem das Ancilla-Qubit mit der letzten Messung wieder entkoppelt wird, lässt sich überprüfen, dass der Phasenunterschied



des  $|+Y\rangle$ -Zustands zu dem des Daten-Qubits hinzugefügt wurde. Man spricht auch von der Injektion des  $|+Y\rangle$ -Zustands. Diese Operation wird auch als Phasengatter bezeichnet.

Dieses Beispiel geht der Einfachheit halber davon aus, dass ein bestimmter Satz von Messergebnissen erzielt wurde. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, mit deren Zufälligkeit umzugehen. Eine einfache Lösung ist, die richtigen Messergebnisse zu erzwingen, indem man die Ancilla-Qubits zurücksetzt und die Messung wiederholt, bis die erwünschten Ergebnisse auftreten.

In Majorana-basierten topologischen Qubits lässt sich die Basis der Messung exponentiell kontrollieren, solange man sich auf die Messung von (Kombinationen von) Pauli-Operatoren beschränkt. Das messungsbasierte Vorbereiten und Injizieren von Zuständen erlaubt es somit, einen bestimmten Satz wichtiger Quantenoperationen – **Clifford-Gatter** – mit exponentieller Genauigkeit zu erzeugen.

Bei typischen Anwendungen wie der Lösung quantenchemischer Probleme sind Fehlerraten von bis zu  $10^{-15}$  gefordert. Daher ist auch bei topologischen Qubits eine Quantenfehlerkorrektur notwendig, bei der ein fehlerkorrigiertes „logisches“ Qubit auf den Zustand vieler physikalischer Qubits verteilt wird. Die Fehlerrate der logischen Qubits ist deutlich niedriger als die physikalischer Qubits. Somit lassen sich aus vielen fehlerbehafteten physikalischen Qubits einige wenige zuverlässige logische Qubits erzeugen. In der Praxis ist es relevant, wie viele physikalische Qubits für ein logisches Qubit nötig sind. Dieses Verhältnis hängt eng mit der Fehlerrate der physikalischen Qubits zusammen. Realistische Abschätzungen gehen davon aus, dass für konventionelle Qubits hunderte oder gar tausende von physikalischen Qubits für ein logisches Qubit nötig sind. Bei niedrigerer Fehlerrate lässt sich ein logisches Qubit mit weniger physikalischen Qubits realisieren und die Schwelle zu wissenschaftlich und kommerziell relevanten Quantencomputern schneller überschreiten.

## Ausblick

Mit den hier diskutierten Durchbrüchen in der experimentellen Realisierung topologischer Phasen hat sich das topologische Quantenrechnen von einer abstrakten Idee zu einer vielversprechenden Quantencomputerplattform weiterentwickelt. Der nächste Schritt besteht darin, ein topologisches Qubit zu konstruieren und gezielt auszulesen. Das würde nicht nur die Existenz nicht-abelscher Zustände nachweisen, sondern auch den Weg zu einem skalierbaren topologischen Quantencomputer ebnen.

## Literatur

- [1] Ch. Nayak et al., Rev. Mod. Phys. **80**, 1083 (2008)
- [2] N. Read und D. Green, Phys. Rev. B **61**, 10267 (2000)
- [3] L. Fu und C. L. Kane, Phys. Rev. Lett. **100**, 096407 (2008)
- [4] A. Kitaev, Phys. Usp. **44**, 131 (2001)
- [5] R. M. Lutchyn, J. D. Sau und S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **105**, 077001 (2010)
- [6] Y. Oreg, G. Refael und F. von Oppen, Phys. Rev. Lett. **105**, 177002 (2010)
- [7] R. M. Lutchyn et al., Nat. Rev. Mater. **3**, 52 (2018)
- [8] H. Zhang et al., Nature **556**, 74 (2018)
- [9] T. Karzig et al., Phys. Rev. B **95**, 235305 (2017)

## Die Autoren

**Torsten Karzig** forscht an der Microsoft Station Q in Santa Barbara. Zuvor promovierte er 2012 an der FU Berlin und war Postdoc am California Institute of Technology.

**Bela Bauer** hat 2011 an der ETH Zürich promoviert und forscht seitdem bei Microsoft Station Q an topologischem Quantenrechnen und verwandten Themen.

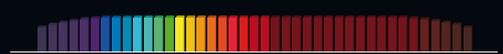
**Dr. Torsten Karzig** und **Dr. Bela Bauer**, Station Q, Microsoft Corporation, Santa Barbara, California 93106, USA



Dr. Wilhelm Kaenders, Founder

## Control your quantum states

- ▶ Tunable Diode Lasers
- ▶ Frequency Combs
- ▶ Rack Integration

**All Wavelengths.**  
190 nm - 0.1 THz