

# Linear oder nichtlinear? Das ist hier die Frage!

Kürzlich ist es gelungen zu zeigen, dass sich Monsterwellen mittels Instantonen beschreiben lassen.

Norbert Hoffmann

**M**onsterwellen – im internationalen Sprachgebrauch Rogue Waves genannt – scheinen aus einem umgebenden Wellenfeld mit vergleichsweise kleiner Amplitude quasi aus dem Nichts zu entstehen und nach einer gewissen Lebensdauer ebenso spurlos zu verschwinden [1]. Diese Wellen mit besonders hoher Amplitude treten in nichtlinearen dispersiven Systemen auf wie Oberflächen-Schwerewellen, nichtlinearer Optik, Plasmen oder auch Bose-Einstein-Kondensaten. Um ihr Auftreten zu erklären, existieren verschiedene Mechanismen – lineare sowie nichtlineare. Zu den linearen Vorgängen zählen primär Interferenzeffekte, zu den nichtlinearen Selbstfokussierung und Modulationsinstabilitäten homogener Wellenzustände [2, 3]. Nach wie vor wird intensiv untersucht und aufgrund der spärlichen Datenlage teilweise emotional debattiert, welche Mechanismen unter welchen Umständen dominieren und ob letztlich ein Verständnis auf Basis linearer oder aber nichtlinearer Modellgleichungen zentral ist.

In einer aktuellen Arbeit versucht ein internationales Wissenschaftlerteam, diese Dichotomie von linearer

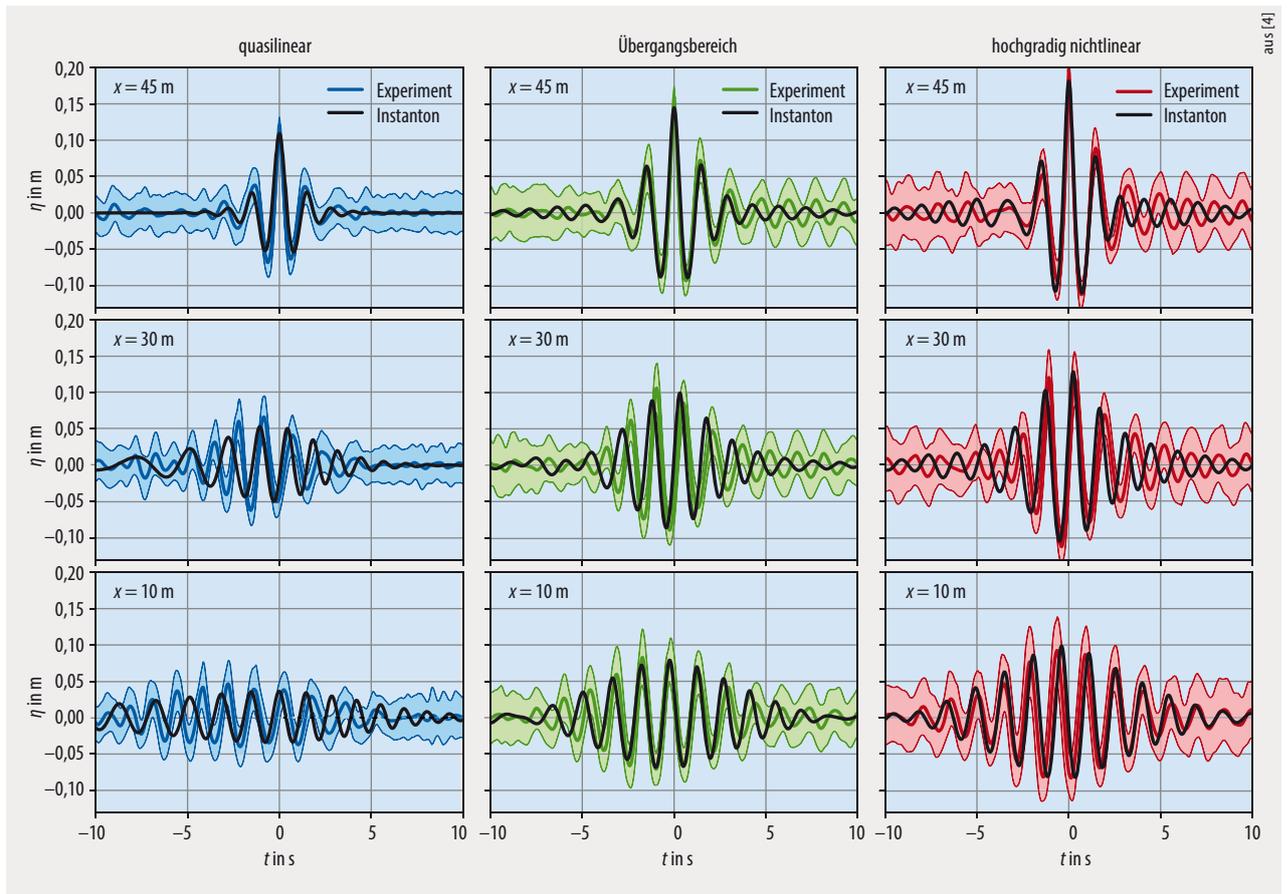
und nichtlinearer Physik aufzulösen [4]. Untersuchungsgegenstand sind dabei Oberflächen-Schwerewellen auf tiefem Wasser. In einem 270 Meter langen, zehn Meter breiten und fünf Meter tiefen Wellenkanal erzeugt ein Wellengenerator ein breitbandiges Feld ebener Wellen, das in kleinskalierter Form einem typischen Seegang der Nordsee entspricht. Im Versuch haben die Wellen eine mittlere Wellenlänge von drei bis vier Meter und sind im Mittel etwas mehr als 10 Zentimeter hoch. Als Modell dient die nichtlineare Schrödinger-Gleichung, die als elementare Modellgleichung dispersiver Medien die Ausbreitung von Wellenpaketen und -modulationen beschreibt. Sie schließt in ihrer linearisierten Form die relevanten linearen Interferenzeffekte ein, in ihrer nichtlinearen Form Selbstfokussierung und Modulationsinstabilitäten.

In vergleichbaren Wellenkanalversuchen und numerischen Untersuchungen der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung ließen sich Rogue Waves als seltene Einzelwellen, die mehr als doppelt so hoch sind wie das umgebende Wellenfeld, bereits beobachten. Oft gelten sie als besondere

Lösungen der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung. In der Theorie dynamischer Systeme stellen Rogue Waves „homokline“ Lösungen dar, bei denen sich aus dem Hintergrundzustand mit durchschnittlich großen Wellen eine Dynamik entwickelt, die zur transienten, also sehr schnellen Ausbildung einer besonders großen Welle führt, der Rogue Wave.

Die Betrachtung von Rogue Waves als deterministische Lösungen der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung stößt aber an Grenzen, wenn der Ausgangszustand der See breitbandiger wird, der zugrundeliegende Wellengang also eher chaotisch oder sogar turbulent ist. Das Konzept einer deterministischen, homoklinen Lösung gilt es dann, in die komplexen chaotisch-turbulenten Prozesse einzubetten. Das kann zwar durch numerische Simulationen und statistische Auswertung geschehen, da Rogue-Ereignisse aber sehr selten auftreten, hat dieses Vorgehen praktische Grenzen.

Die Autoren der neuen Arbeit wählen daher einen alternativen Weg. Statt die nichtlineare Schrödinger-Gleichung als partielle Differential-, oder Evolutionsgleichung zu un-



aus [4]

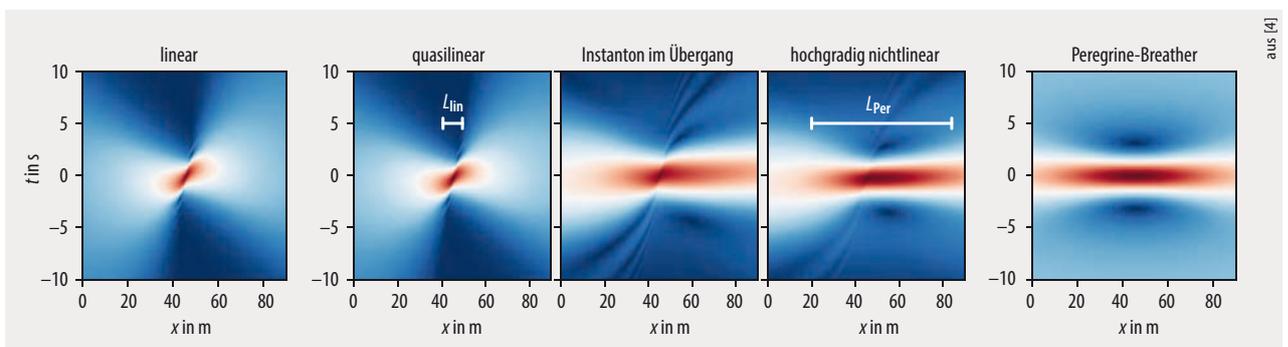
**Abb. 1** Die Momentaufnahmen des Instantons während seiner Entwicklung entlang des Kanals (schwarze Linien) stimmen gut mit dem Mittelwert und der Standardabweichung der experimentellen Rogue Wave (farbige Linien) für verschiedene Nichtlinearitätsregimes überein, auch für die gesamte Entwicklung entlang des Wellenkanals.

tersuchen und aus ihrer Lösung die Eigenschaften von Rogue Waves zu bestimmen, wenden sie sich dem Hamilton-Funktional der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung zu. Unter den beiden Nebenbedingungen, dass die Wellenerregung am Wellengenerator die gewünschte, am natürlichen Seegang angelehnte Statistik aufweist und dass an einem Referenzort besonders große Wellenamplituden oberhalb eines Schwellenwertes auftreten, for-

mulieren sie ein Wirkungsfunktional. So wie sich aus der Stationarität der Wirkung auf Ebene der Bewegungsgleichungen die nichtlineare Schrödinger-Gleichung ergibt, lassen sich nun für das explizit durch die Nebenbedingungen spezifizierte Wirkungsfunktional raumzeitliche Feldlösungen numerisch bestimmen, die das Funktional extremal machen. Diese „Instantonen“ sind in Raum und Zeit lokalisiert [5]. Tritt in chao-

tisch/turbulenter Dynamik eine besonders große Welle auf, ähnelt diese Rogue Wave im statistischen Sinn dem Instanton.

Im Wellenkanal fanden Versuche mit verschieden starker Ausprägung der nichtlinearen Effekte statt. Bei Wasser-Schwerewellen ist dies vergleichsweise leicht durch Variation der Bandbreite der Erregung und der im Wellenfeld enthaltenen Energie möglich: Schmalbandigere Wellen-



aus [4]

**Abb. 2** Im linearen Regime (links) entstehen und zerfallen die Rogue Waves sehr schnell. Wenn aber nichtlineare Effekte vorherrschen (rechts), geschieht der Zerfall gemäß des Peregrine-Breathers sehr langsam. Die Rogue Waves in den mittleren Regimen weisen sowohl lineare als auch nichtlineare Merkmale auf. Ihre Eigenschaften ähneln denen der Instantonen (mittlere drei Bilder).

# OPTIK IST UNSERE ZUKUNFT™

erregung führt zu stärker regulär periodischen Wellenzügen mit großer Amplitude, breitbandigere Erregung zu schwächer ausgeprägten nichtlinearen Effekten mit im Grenzfall vollständig linearen Wellen.

Zahlreiche Wellenvorgänge wurden experimentell realisiert und für Referenzmesspunkte im Wellenfeld die Wellen großer Amplitude oberhalb eines Schwellenwerts selektiert. Ein Vergleich des Ensembles dieser Wellen mit dem jeweiligen Instanton zeigt sehr gute Übereinstimmung (**Abb. 1**) – bei eher linearen sowie bei stärker nichtlinearen Wellenzuständen.

Bei eher linearen Wellenzuständen lässt sich das Auftreten großer Wellenamplituden gut durch Interferenz oder Überlagerung verstehen, während die Instantonen bei stark nichtlinearer Situation nahezu vollständig das Verhalten des Peregrine-Breathers [6] replizieren (**Abb. 2**). Die Peregrine-Breather-Dynamik repräsentiert in der nichtlinearen Theorie die raumzeitliche Entwicklung nichtlinearer Modulationen und der Selbstverstärkung: Bei periodischen, nichtlinearen Hintergrundwellen im fokussierenden Regime sind langwellige Modulationen linear instabil. Dann ist der Peregrine-Breather die zugehörige nichtlineare Evolution, die zum einmaligen raumzeitlich lokalisierten Fokussieren führt, also dem spontanen Auftreten einer Rogue Wave.

Die Ergebnisse zeigen auch, dass der Übergang zwischen beiden Grenzfällen kontinuierlich erfolgt, der allgemeine Fall also zwischen der linearen Näherung und dem Grenzfall der starken Nichtlinearität liegt. Zudem erlaubt es die Instantonen-Analyse, die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für das Auftreten von Rogue Waves direkt zu bestimmen. Auch diese Ergebnisse stimmen gut mit dem Versuch überein und bestätigen, dass die Auftretenswahrscheinlichkeiten von Rogue Waves nichttrivial von Parametern abhängen wie der mittleren Wellenhöhe, die primär die Stärke der nichtlinearen Effekte steuert, oder der Bandbreite und weiteren Statistik des Hintergrundwellenfelds.

Insgesamt belegt die Arbeit, dass die oft beschworene Dichotomie von linearem und nichtlinearem Regime,

also die strikte Zweiteilung in unzusammenhängende Phänomene, sich nicht eignet, um Rogue Waves zu erklären. Zwischen linearer und nichtlinearer Wellenphysik erstreckt sich vielmehr ein Kontinuum von Wellenzuständen. Somit ist die Debatte über die Frage nach Dominanz linearer oder nichtlinearer Mechanismen wohl eher eine Scheindebatte.

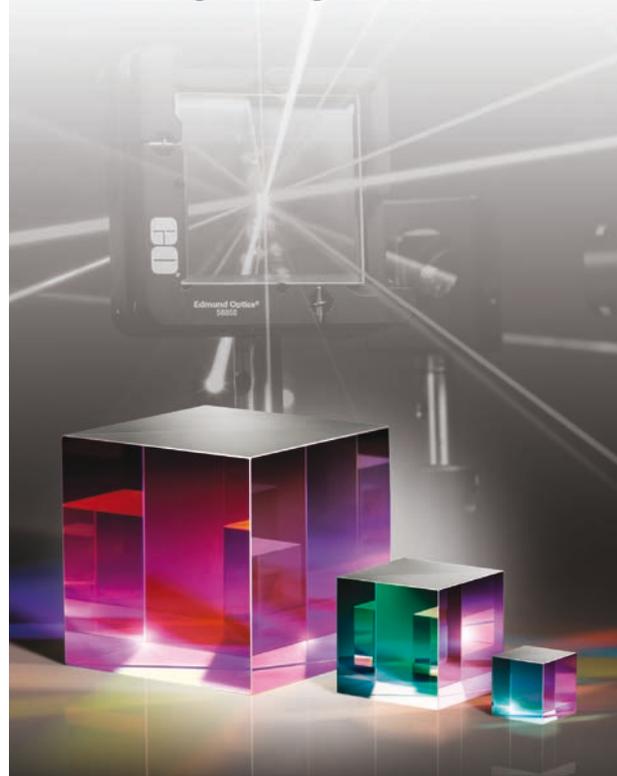
Möglicherweise hätten sich die hier im Kontext der Statistischen Physik gewonnenen Einsichten auch direkt durch Untersuchungen der partiellen Differentialgleichungen gewinnen lassen. Unbestreitbar ist aber, dass das Instantonen-Konzept wirksame formale Werkzeuge bereitstellt, um bei gegebenen Wellenzuständen die typischen Wellenformen von Rogue Waves und die Wahrscheinlichkeiten ihres Auftretens abzuleiten.

Noch ist offen, inwiefern sich das Instantonen-Konzept auf Systeme übertragen lässt, für die kein Hamilton-Funktional existiert oder bekannt ist. So sind beispielsweise Meereswellen starken und andauernden Verstärkungs- und Dissipationsvorgängen unterworfen, etwa durch Wind oder Wellenbrechen. Auch bei dissipativen hochdimensionalen dynamischen Systemen sind Fragen nach Strukturen und Systemeigenschaften im Raum offen, welche die komplexe Dynamik strukturieren [7]. Daher gilt es, das vorliegende Konzept der Instantonen mit der Welt der dissipativen Systeme zu verknüpfen.

- [1] J. M. Dudley et al., Nat. Rev. Phys. **1**, 675 (2019)
- [2] M. Onorato et al., Phys. Rep. **528**, 47 (2013)
- [3] N. Hoffmann und A. Chabchoub, Physik Journal, Oktober 2012, S. 25
- [4] G. Dematteis et al, Phys. Rev. X **9**, 041057 (2019)
- [5] G. Dematteis, T. Grafke und E. Vanden-Eijnden, PNAS **115**, 855 (2018)
- [6] A. Chabchoub, N. P. Hoffmann und N. Akhmediev, Phys. Rev. Lett. **106**, 204502 (2011)
- [7] G. Haller, Ann. Rev. Fluid Mech. **47**, 137 (2015)

## Autor

**Prof. Dr. Norbert Hoffmann**, Technische Universität Hamburg, Institut für Strukturdynamik, Am Schwarzenberg-Campus 1, 21073 Hamburg



## Strahlteiler von Edmund Optics®

- Großer Wellenlängenbereich abgedeckt von 250 nm bis 8  $\mu\text{m}$
- Verschiedene Formen, Größen und Teilungsverhältnisse erhältlich
  - Polarisierende Versionen mit Auslöschungsverhältnissen bis zu 10.000:1
- Großer Bestand an Standardkomponenten verfügbar für eine schnelle Lieferung

Edmund Optics® ist Hersteller und Lieferant von Standardstrahlteilern und kundenspezifischen Strahlteilern für eine Vielzahl von Anwendungen.

Mehr Informationen über unsere Strahlteiler finden Sie auf:

[www.edmundoptics.de/  
beamsplitters](http://www.edmundoptics.de/beamsplitters)

+49 (0) 6131 5700-0  
sales@edmundoptics.de

**EO** Edmund  
optics | worldwide