

Science Photo Library / Anthony Howarth

Die Realität Schwarzer Löcher

Eine Hälfte des Physik-Nobelpreises 2020 geht an Roger Penrose für seine Entdeckung, dass Schwarze Löcher eine robuste Vorhersage der Allgemeinen Relativitätstheorie sind.

Domenico Giulini

„It will be shown that, after a certain critical condition has been fulfilled, deviations from spherical symmetry cannot prevent space-time singularities from forming.“ So fasste der 33-jährige Roger Penrose die wesentliche Erkenntnis einer nur zweieinhalb Seiten umfassenden Arbeit zusammen, die Anfang 1965 erschien [1]. Für die theoretischen Konsequenzen dieser Erkenntnis erhält er nun 55 Jahre später den Nobelpreis für Physik.

In einer Arbeit von 1969 schrieb Roger Penrose fast schon prophetisch [2, S. 1162]: „I only wish to make a plea for ‚black holes‘ to be taken seriously and their consequences to be explored in full detail. For who is to say, without careful study, that they cannot play some important part in the shaping of observed phenomena?“ Damals gab es noch keine Beobachtungsindizien auf die Existenz Schwarzer Löcher, wie sie nun in überzeugender Weise von den Gruppen Reinhard Genzels und Andrea Ghez' gelie-

fert wurden. Dass Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie zu Instabilitäten kompakter Sterne führt, die in einer Newtonschen Beschreibung keine Entsprechung haben, war dagegen bekannt [3 – 5] und ist qualitativ leicht einzusehen. Denn die Schwere nimmt relativistisch mit dem Druck zu. Unter Umständen ist dies durch keinen weiteren Druckaufbau kompensierbar, eben aufgrund der erneut zunehmenden Schwere. In diesem Fall kommt es zum Gravitationskollaps des Sterns.

Was aber kann ein möglicher Endzustand dieser Kontraktion sein? Darauf sollte die Allgemeine Relativitätstheorie eine Antwort wissen. In der Tat! Stellt man sich der Einfachheit halber vor, der Stern sei sphärisch symmetrisch und kollabiere streng radial, dann muss auch das Endprodukt sphärisch symmetrisch und eine Lösung der quellenfreien Einsteinschen Feldgleichungen sein – die Quelle ist ja kollabiert. In diesem Fall gibt es eine eindeutige Antwort, die ebenfalls lange bekannt war. Es ist nämlich ein mathematischer Satz der Allgemeinen Relativitätstheorie,

dass es genau eine einparametrische Schar solcher Lösungen gibt, die Karl Schwarzschild bereits 1916 gefunden hatte [6]. Diese beschreibt das Gravitationsfeld eines sphärisch-symmetrischen Sterns außerhalb der Quelle und wird normalerweise unterhalb der Sternoberfläche durch eine weitere Lösung (Innenraumlösung) fortgesetzt. Diese kann nicht mehr eindeutig sein, sondern hängt sensibel vom jeweiligen Materiemodell ab. Ist der Stern jedoch komplett kollabiert, gilt gemäß Allgemeiner Relativitätstheorie die Außenraumlösung überall. In diesem Rahmen beschreibt eine Metrik das Gravitationsfeld, die im Fall der äußeren Schwarzschild-Lösung gegeben ist durch

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (1)$$

Hier ist m ein Parameter von der physikalischen Dimension Länge, der direkt proportional der Masse M des Objekts ist: $m = GM/c^2$. Dabei sind G ist die Newtonsche Gravitationskonstante und c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit. Für die Masse der Erde (6×10^{24} kg) ist $2m = 8,9$ mm, also etwa der Radius einer Haselnuss.¹⁾ Für die etwa 333-tausendmal massereichere Sonne beträgt $2m$ rund drei Kilometer. Objekte unterhalb dieser Radien sind keinesfalls mehr stabilisierbar.

Ohne hier auf Details eingehen zu können, ist aus (1) sofort ersichtlich, dass beim Übergang von $r > 2m$ nach $r < 2m$ die Koeffizientenfunktionen vor dt^2 und dr^2 jeweils ihre Vorzeichen ändern. Somit ist t im inneren Bereich $r < 2m$ eine Raum- und r eine Zeitkoordinate. Bei $r = 0$, was einen Zeit- und keinen Raumpunkt markiert, werden die Koeffizienten singulär. Man kann zeigen, dass die Gezeitenkräfte (Gravitationsgradienten) für $r \rightarrow 0$ divergieren, sodass jedes materielle Objekt endlicher Ausdehnung, und sei es noch so klein und fest, vor Eintreffen bei $r = 0$ zerrissen wird. Auch bei $r = 2m$ werden die Koeffizientenfunktionen in (1) singulär, was aber keiner echten geometrischen Singularität entspricht, sondern der Verwendung singulärer Koordinatensysteme geschuldet ist. Die durch $r = 2m$ markierte Fläche ist regulär und definiert einen Ereignishorizont. Dieser trennt das Gebiet $r < 2m$, von dem kein Licht und kein kausales Signal nach außen entweichen kann, vom Rest der Raumzeit.

Anfang der 1960er-Jahre wurde intensiv diskutiert, ob das Auftreten solcher Singularitäten wie hier bei $r = 0$ ein Artefakt hochgradig symmetrischer Lösungen ist oder ob es sich um eine generische Eigenschaft strenger Lösungen handelt – vorausgesetzt, sie beschreiben Objekte, die hinreichend kompakt sind. Eine analoge Frage gab es im Zusammenhang mit der kosmologischen Urknall-Singularität der FLRW-Modelle (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker).

Jewgeni Lifschitz und Isaak Chalatschnikow hatten versucht, diese Frage analytisch zu klären, indem sie das Verhalten

vermeintlich allgemeiner Lösungen in der Nachbarschaft der symmetrisch singulären Lösung hinsichtlich divergierender Ausdrücke für Krümmung und Energiedichte untersuchten. Ein solches generisch divergierendes Verhalten konnten sie weder zeigen noch widerlegen, woraus sie in einer damals vielbeachteten Darstellung schlossen [8], dass Singularitäten auch nicht generisch existieren.

Penroses Eingreifen

Dieser vorschnellen Schlussfolgerung widersprach Penrose für den astrophysikalisch relevanten Fall isolierter kompakter Objekte auf Basis völlig anderer Überlegungen, die neben den lokalen analytischen auch die globalen differentialtopologischen Eigenschaften der Raumzeit berücksichtigen (**Abb. 1**) [1]. Kurze Zeit später behandelten seine Kollegen Stephen Hawking und Robert Geroch mit gleichen Methoden die kosmologischen Fälle für offene bzw. geschlossene Modelle [9 – 11]. 1970 fassten Hawking und Penrose alle bis dahin bekannten Singularitätentheoreme zusammen [8]. Kernaussage dieser Penrose-Hawking-Theoreme ist die Existenz raumzeitlicher Singularitäten für sehr allgemeine Klassen von Lösungen der Einstein-Gleichungen. Insbesondere gehen keinerlei Symmetrieanahmen ein.

Die wesentlichen Annahmen sind zweierlei: Erstens muss die Materie einer Energiebedingung genügen, etwa dass ihre Energiedichte für keinen Beobachter negativ ist. Zweitens muss sich das System in einem Zustand hinreichend fortgeschrittener Kontraktion befinden (mehr Details dazu weiter unten). Unter diesen Voraussetzungen ist die Raumzeit lichtartig geodätisch unvollständig. Vereinfachend gesagt gibt es demnach Lichtstrahlen, die an Grenzen kommen, über die hinweg sie sich nicht fortset-

GRAVITATIONAL COLLAPSE AND SPACE-TIME SINGULARITIES

Roger Penrose

Department of Mathematics, Birkbeck College, London, England
(Received 18 December 1964)

The discovery of the quasistellar radio sources has stimulated renewed interest in the question of gravitational collapse. It has been suggested by some authors¹ that the enormous amounts of energy that these objects apparently emit may result from the collapse of a mass of the order of $(10^6-10^8)M_{\odot}$ to the neighborhood of its Schwarzschild radius, accompanied by a violent release of energy, possibly in the form of gravitational radiation. The detailed mathematical discussion of such situations is difficult since the full complexity of general relativity is required. Consequently, most exact calculations concerned with the implications of gravitational collapse have employed the simplifying assumption of spherical symmetry. Unfortunately, this precludes any detailed discussion of gravitational radiation which requires at least a quadrupole structure.

The general situation with regard to a spherically symmetrical body is well known.² For a sufficiently great mass, there is no final equilibrium state. When sufficient thermal energy has been radiated away, the body contracts and continues to contract until a physical singularity is encountered at $r = 0$. As

measured by local comoving observers, the body passes within its Schwarzschild radius $r = 2m$. (The densities at which this happens need not be enormously high if the total mass is large enough.) To an outside observer the contraction to $r = 2m$ appears to take an infinite time. Nevertheless, the existence of a singularity presents a serious problem for any complete discussion of the physics of the interior region.

The question has been raised as to whether this singularity is, in fact, simply a property of the high symmetry assumed. The matter collapses radially inwards to the single point at the center, so that a resulting space-time catastrophe there is perhaps not surprising. Could not the presence of perturbations which destroy the spherical symmetry alter the situation drastically? The recent rotating solution of Kerr³ also possesses a physical singularity, but since a high degree of symmetry is still present (and the solution is algebraically special), it might again be argued that this is not representative of the general situation.⁴ Collapse without assumptions of symmetry⁵ will be discussed here.

1) Bereits 1884 hatte Heinrich Hertz in seiner Vorlesung „Die Constitution der Materie“ in einer Randnotiz die Frage aufgeworfen: „Kann man auf beliebig kleines Volum comprimieren, die Erdkugel auf die Größe einer Haselnuss?“ [7, S. 123]

Abb. 1 Diese kurze Veröffentlichung in den Physical Review Letters von 1965 brachte Roger Penrose nun den Nobelpreis ein.

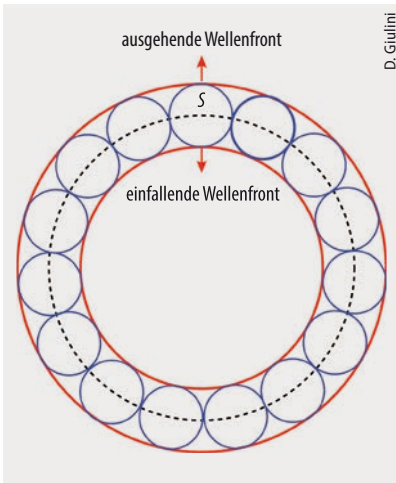


Abb. 2 Zur Erklärung des Begriffs „gefangene Fläche“ siehe Haupttext

sene Fläche S im dreidimensionalen Raum vor, etwa eine 2-Sphäre (angedeutet durch den Kreis S). Auf dieser Fläche werden gleichzeitig Lichtblitze gezündet. Nach kurzer Zeit betrachtet man die Einhüllenden der sphärischen Wellenfronten um jeden Punkt. In der Zeichnung sind die Wellenfronten durch die blauen Kreise repräsentiert und deren Einhüllende durch die beiden zu S konzentrischen roten Kreise. Unter normalen geometrischen Umständen hat die Einhüllende der nach außen propagierenden Wellenfront eine größere Fläche als S und die nach innen propagierende eine kleinere als S . Eine gefangene Fläche ist nun dadurch definiert, dass die Einhüllenden in *beiden* Richtungen für kleine Zeiten kleinere Flächen besitzen.

Physikalisch gesprochen heißt das, dass die Lichtstrahlen, die zu beiden Seiten der Fläche senkrecht zu dieser ausgesandt werden, auf beiden Seiten konvergieren, also fokussiert werden. Den Rand eines Raumgebiets, in dem gefangene Flächen existieren, nennt Penrose einen scheinbaren Horizont. Dieses Gebiet kann Licht zumindest lokal (in erster Annäherung) nicht verlassen. Ob es dann auch einen Ereignishorizont gibt, über den hinaus Licht niemals nach Unendlich entweichen kann, bleibt dahingestellt.

Wenn es ihn gibt, wird die durch den Kollaps gebildete Singularität auf der anderen Seite des Ereignishorizonts nicht sichtbar sein. 1969 stellte Penrose erstmals die Hypothese der kosmischen Zensur auf [2]. Diese besagt, dass Singularitäten, die durch einen realistischen Gravitationskollaps eines Sterns entstehen, immer von einem solchen Ereignishorizont umgeben und deshalb nach außen kausal abgeschirmt sind. Dreißig Jahre später bezeichnete Penrose die Frage nach dem Zutreffen dieser Hypothese noch als „possibly the most important unsolved problem in classical general relativity“

zen lassen.²⁾ Penrose nannte dies „null incompleteness“. Einer derart unspezifischen „Singularität“ mag man zunächst mit Achselzucken begegnen; doch nicht Penrose! Er plädierte in einer Fußnote [1] dafür, diese nicht einfach zu ignorieren, etwa im Sinne einer zurückgelehnten „I am all right, Jack“-Philosophie.³⁾

Wann befindet sich das System nun in einem Zustand „hinreichend fortgeschrittener Kontraktion“? Dazu ersann Penrose den Begriff der gefangenen Fläche (Abb. 2). Man stelle sich eine

[14, S. 234]. Seither wurden in der mathematischen Relativitätstheorie wesentliche Fortschritte erzielt und hinreichend vorsichtige Präzisierungen dieser Vermutungen bewiesen.

Penrose erläuterte seine Erkenntnisse anhand des selbst gezeichneten Raum-Zeit-Diagramms eines kollabierenden Sterns (Abb. 3) [1]. Sobald der Kollaps hinreichend fortgeschritten ist, bildet sich eine gefangene Fläche T^2 , die topologisch eine 2-Sphäre S^2 ist. Gemäß dem Penrose-Theorem muss es in dem Fall auch Singularitäten geben, die sich durch nichtfortsetzbare Lichtstrahlen manifestieren. Die eingezeichneten Lichtkegel verdeutlichen die lokale kausale Struktur der Raumzeit: Alle Materie bewegt sich nur innerhalb der Kegel beziehungsweise Licht auf dem Rand, insbesondere kann die durch den vertikalen Zylinder in der oberen Hälfte des Bildes begrenzte Region nicht verlassen werden. Signale, die sich mit maximal Lichtgeschwindigkeit bewegen, können den Zylindermantel zwar von außen nach innen durchdringen, aber nicht von innen nach außen. Er bildet einen Ereignishorizont, der auch einen außen befindlichen Beobachter daran hindert, die Singularität direkt wahrzunehmen.

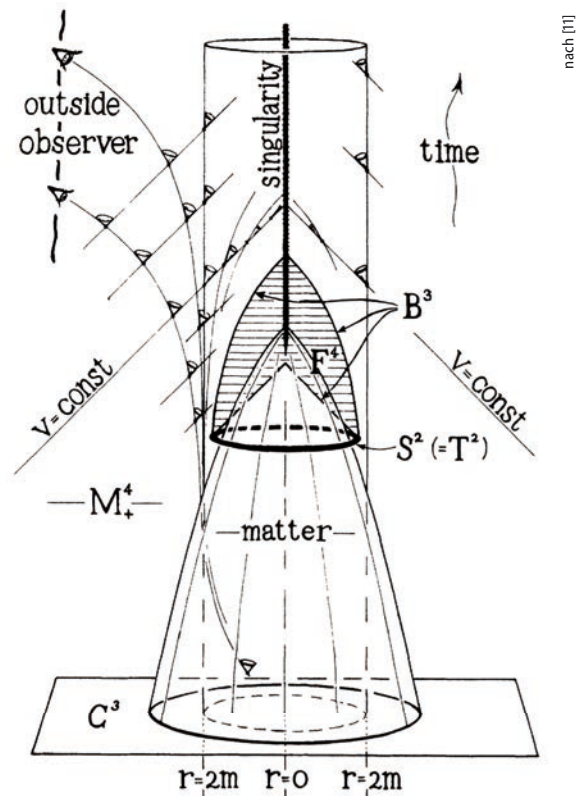


Abb. 3 Mit dieser eigenhändigen Zeichnung erläuterte Penrose den Gravitationskollaps und die Bildung eines Horizonts. C^3 bezeichnet eine dreidimensionale Fläche konstanter Zeit, auf der die regulären Anfangsdaten des kollabierenden Sterns vorgegeben sind (Cauchy-Fläche). M^4_+ steht für den Teil der Raumzeit, der sich für positive Zeiten aus den Anfangsdaten auf C^3 entwickelt. T^2 ist die gefangene Fläche und B^3 vereinigt die beiden lichtartigen-Hyperflächen der nach innen bzw. außen laufenden Wellenfronten von T^2 . Beide fokussieren, und die Lichtstrahlen auf ihnen enden an der Singularität. B^3 ist auch der Rand der kausalen Zukunft F^4 von T^2 , also aller von T^2 durch zukunftsgerichtete zeitartige oder lichtartige Kurven erreichbaren Punkte in M^4_+ .

2) Das Kriterium der geodätischen Unvollständigkeit zur Erfassung von Singularitäten findet sich schon in [13]. Als singular gilt dabei sowohl die lichtartige als auch zeitartige geodätische Unvollständigkeit, letztere passend auf die Bahnen frei fallender massiver Teilchen. Penrose bediente sich in [1] nur der ersten.
 3) „I'm all right, Jack“ ist der Titel einer bekannten britische Filmkomödie des Jahres 1959, die eine selbstgefällige, aber zugleich inkompetente und korrupte Industriegesellschaft parodiert.

Bemerkenswerterweise beruht dieser Beweis auf bis dato in der Physik wenig bekannten Begriffen und Methoden, die aus der mengentheoretischen und Differentialtopologie stammen (Zusammenstellung in [15]). Auch der analytische Teil basiert zum Großteil auf neuen Begriffen und Techniken, die Penrose maßgeblich zuvor mit entwickelt hatte [16 – 19]. Im Beweis selbst wird eine Reihe von Annahmen zum Widerspruch geführt, sodass sich auf das Nicht-Zutreffen mindestens einer der Annahmen schließen lässt. Diese sind die bereits genannte Energiebedingung, die Existenz einer gefangenen Fläche und die geodätische Vollständigkeit. Hält man somit an den ersten beiden Annahmen fest, kann die dritte nicht zutreffen.

Die Stärke dieser Argumentation liegt in ihrer Allgemeinheit: Singularitäten existieren unter sehr schwachen Voraussetzungen. Allerdings folgt lediglich die abstrakte geodätische Unvollständigkeit, sodass zumindest ein Lichtstrahl existiert, der nach einer endlichen affinen Parameterzeit nicht fortsetzbar ist. Welcher das ist und ob es mögliche lokale Gründe gibt, die seine Fortsetzbarkeit verhindern – etwa lokal divergierende Krümmung bzw. Energiedichte – bleibt zunächst offen. Dieser Mangel an einer physikalisch greifbaren Charakterisierung der Singularität hat oft Anlass zu Kritik gegeben, nachzulesen etwa in [20, § 119]. Diese nicht unberechtigte Bewertung hat aber zugleich fruchtbare Weiterentwicklungen angestoßen, maßgeblich angeregt durch die russische Schule um Jewgeni Lifschitz ([21, 22] und [20, § 119]), die zu einer interessanten Hypothese über die generische analytische Struktur kosmologischer Singularitäten geführt hat („BKL-Singularität“).

Epilog

Herausragende Eigenschaften Roger Penroses sind sein anhaltender Ideenreichtum und seine Kreativität, gepaart mit größtem mathematischen Können. Die hier vorgestellten Arbeiten zum Gravitationskollaps, welche die Existenz von Singularitäten und Schwarzen Löchern als generische Voraussage der Allgemeinen Relativitätstheorie etablieren, bilden nur einen Ausschnitt aus dem gesamten Spektrum an neuen Ideen und Techniken, mit denen er die Forschung der Gravitationsphysik in den letzten 60 Jahren bereichert hat. Am bekanntesten dürften die Penrose-Diagramme sein, mit deren Hilfe sich die globale kausale Struktur einer Raumzeit relativ einfach grafisch verständlich machen lässt. Die von ihm dazu verwendete Methode der konformen Reskalierung liegt auch einer auf ihn zurückgehenden Umformulierung der Einsteinschen Feldgleichungen zugrunde. Diese trägt wesentlich zum Verständnis dieses komplizierten Systems von Differentialgleichungen mit sowohl Rand- als auch Anfangswertproblematik bei (Übersicht in [23]). Erst diese Techniken ermöglichten es, Abstrahlungsprobleme in der nichtlinearen Einstein-Theorie analytisch streng zu fassen und Begriffen wie „isoliertes System“ und „Energieverlust durch Abstrahlung (von Gravitationswellen) ins Unendliche“ einen kontrollierten mathematischen Sinn zu verleihen.

In diesem Zusammenhang sei auch Penroses Twistor-Theorie erwähnt, die sich mit den Gleichungen masseloser

Felder mit Spin in allgemein gekrümmten Raumzeiten beschäftigt. Von dieser Fülle an mathematischen Entwicklungen, die Penrose entweder direkt selbst durchgeführt oder doch wesentlich angeregt hat, legt das zweibändige Werk „Spinors and Space Time“ [24], das er nach langjähriger Arbeit 1984 zusammen mit Wolfgang Rindler publizierte, ein beeindruckendes Zeugnis ab. Für eine weit weniger umfangreiche und allgemeiner verständliche Lektüre sei auf [25] verwiesen.

Literatur

- [1] R. Penrose, Phys. Rev. Lett. **14**, 57 (1965)
- [2] R. Penrose, Gen. Relativ. Gravit. **34**, 1141 (2002), ursprünglich in: Rivista del Nuovo Cimento, Numero Speciale I, 257 (1969)
- [3] R. C. Tolman, Relativity, Thermodynamics, and Cosmology, Oxford University Press, Oxford (1934)
- [4] J. R. Oppenheimer und G. M. Volkoff, Phys. Rev. **55**, 374 (1939)
- [5] J. R. Oppenheimer und H. Snyder, Phys. Rev. **56**, 455 (1939)
- [6] K. Schwarzschild, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, S. 189–196, 1916 [in FN1]
- [7] H. Hertz, Die Constitution der Materie, hrsg. v. A. Fölsing, Springer, Berlin 1999
- [8] E. M. Lifshitz und I. M. Khalatnikov, Adv. Phys. **12**, 185 (1963)
- [9] S. W. Hawking, Phys. Rev. Lett. **15**, 689 (1965)
- [10] S. W. Hawking, Phys. Rev. Lett. **17**, 444 (1966)
- [11] R. Geroch, Phys. Rev. Lett. **17**, 445 (1966)
- [12] S. W. Hawking und R. Penrose, Proc. R. Soc. A **314**, 529 (1970)
- [13] C. Misner, J. Math. Phys. **4**, 924 (1963)
- [14] R. Penrose, J. Astrophys. Astron. **20**, 233 (1999)
- [15] R. Penrose, Techniques of Differential Topology in Relativity, SIAM, Philadelphia (Pennsylvania) 1972
- [16] R. Penrose, Annals of Physics, **10**, 171 (1960)
- [17] E. Newman und R. Penrose, J. Math. Phys. **3**, 566 (1962)
- [18] R. Penrose, Phys. Rev. Lett. **10**, 66 (1963)
- [19] R. Penrose, Conformal Treatment of Infinity, in: C. Dewitt und B. Dewitt (Hrsg.), Relativity, Groups, and Topology, Les Houches Lectures (1963), Gordon and Breach Science Publishers, New York, S. 563
- [20] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band II, 12. Aufl., Harri Deutsch, Frankfurt (2009)
- [21] V. A. Belinskii, I. M. Khalatnikov und E. M. Lifshitz, Adv. Phys. **19**, 525 (1970)
- [22] V. A. Belinskii, I. M. Khalatnikov und E. M. Lifshitz, Adv. Phys. **31**, 639 (1982)
- [23] J. Frauendiener, Living Reviews in Relativity **7**(1) (2004)
- [24] R. Penrose und W. Rindler, Spinors and Space-Time, Vol. 1 & 2, Cambridge University Press, Cambridge (1984)
- [25] S. W. Hawking und R. Penrose, The Nature of Space and Time, Princeton University Press, Princeton (1995)

Der Autor



Domenico Giulini (FV Gravitation und Relativitätstheorie, seit 2014 Leiter des Fachverbands) studierte Mathematik und Physik in Heidelberg und Cambridge, wo er auch promovierte. 1996 habilitierte er sich in Freiburg. Anschließend war er als Research Fellow am Albert-Einstein-Institut in

Potsdam tätig. Seit 2009 ist er Professor für theoretische Physik an der Universität Hannover sowie am ZARM in Bremen.

Prof. Dr. Domenico Giulini, ZARM Bremen, Am Fallturm 2, 28359 Bremen und Institut für Theoretische Physik, Leibniz Universität Hannover, Appelstr. 2, 30167 Hannover