

QUANTENMECHANIK

Chaos und Quantendynamik

Die Ausbreitung von Quanteninformation in komplexen Vielteilchensystemen hängt eng mit klassischem Chaos zusammen.

Klaus Richter

Chaotisches Verhalten ist dadurch charakterisiert, dass sich kleinste Änderungen der Anfangsbedingungen eines nichtlinearen Systems exponentiell auf dessen Entwicklung auswirken – ein Phänomen, das auch als Schmetterlingseffekt bekannt ist. Ein Analogon dazu tritt auch in Quanten-Vielteilchensystemen auf und lässt sich mit besonderen Kommutatoren beschreiben, die aus der Festkörpertheorie bekannt sind.

In einer wenig beachteten, aber weit vorausschauenden Arbeit wies Albert Einstein 1917 darauf hin, dass die dem Bohrschen Atommodell zugrunde liegende Bohr-Sommerfeldsche Quantisierung der elliptischen Elektronenbahnen für nicht-integrable Systeme auf gravierende konzeptionelle Schwierigkeiten stößt [1]. In der Tat scheiterte

diese „alte Atomtheorie“, die sich beim Wasserstoffatom als so erfolgreich erwiesen hatte, vor einem Jahrhundert beim Versuch, sie auf kompliziertere atomare und molekulare Systeme zu verallgemeinern.

Es dauerte weitere fünfzig Jahre, bis Martin Gutzwiller in einer Serie bahnbrechender Arbeiten eine methodische Brücke zwischen der klassischen und der Quantenmechanik nicht-integrabler Systeme schlug [2].¹⁾ Genauer gesagt verknüpfte er die chaotische Dynamik eines Teilchens in einem klassischen System mit dem Energieniveau-Spektrum des dazu korrespondierenden Quantensystems. Während Bohrs Zugang auf adhoc-Annahmen beruhte, entwi-

1) Dafür erhielt Martin Gutzwiller 2003 die Max-Planck-Medaille der DPG.

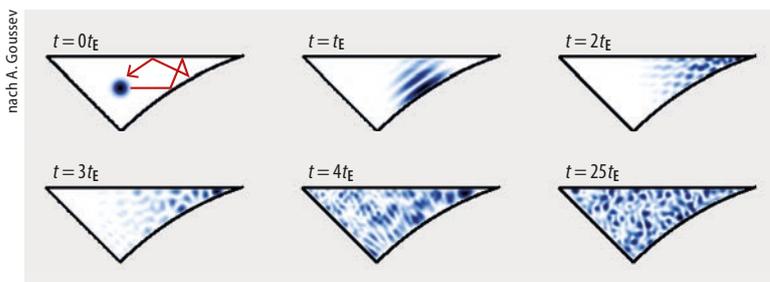


Abb. 1 Ein Wellenpaket, verdeutlicht durch die Wahrscheinlichkeitsdichte (blau), bewegt sich im chaotischen Quantenbillard gemäß der Ehrenfest-Gleichungen nur kurz entlang der instabilen klassischen Bahn (rot). Nach der Ehrenfest-Zeit t_E kennzeichnet vom Wellenchaos dominierte Interferenz den Zustand.

ckelte Gutzwiller eine konsistente semiklassische Theorie. In deren Rahmen ließ sich zum einen der Erfolg der alten Atomtheorie für integrable Systeme mit stabilen klassischen Bahnen einordnen; zum anderen aber trug sie dem allgemeineren nicht-integrablen Fall adäquat Rechnung, dass sich die klassische Bewegung häufig nichtlinear chaotisch vollzieht.

Diese Arbeiten initiierten und beflügelten das Gebiet des „Quantenchaos“, das unter anderem ergründet, welche Signaturen die klassische chaotische Dynamik in der Quantenmechanik, also beim Übergang von der Makro- zur Mikrowelt, hinterlässt [3, 4]. Früher kamen dafür konzeptionell einfache, aber in ihrer Ausprägung komplexe Einteilchenmodelle wie Quantenbillards (**Abb. 1**) zum Einsatz. Doch seit einigen Jahren rücken Vielteilchensysteme in den Fokus: In verschiedensten Forschungsfeldern von der Kondensierten Materie bis zur Quantengravitation spielt „Vielteilchen-Quantenchaos“ eine Rolle. So hängen zum Beispiel die Thermalisierung, die Leitfähigkeit korrelierter Festkörper oder der scheinbare Informationsverlust in Schwarzen Löchern mit der zeitlichen Propagation von Quanteninformation in Vielteilchensystemen zusammen und ihrer Ausbreitung in die Weiten der riesigen Vielteilchen-Hilbert-Räume (**Abb. 2**). Eine entscheidende Rolle spielt dabei der Übergang zwischen klassischem Chaos und komplexer Quantendynamik.

Schmetterlingseffekt im Quantenregime

Der Schlüsselbegriff Vielteilchen-Quantenchaos beinhaltet mehr als die Aussage, dass sich ein wechselwirkendes System „irgendwie chaotisch“ verhält. In der klassischen Physik wird Chaos häufig mit dem „Schmetterlingseffekt“ assoziiert: Kleinste Änderungen der Anfangsbedingungen eines nichtlinearen Systems wirken sich exponentiell auf dessen Entwicklung aus – zugespitzt formuliert: Der Flügelschlag eines Schmetterlings in Brasilien mag einen Tornado in Texas auslösen. Entsprechend sucht Quantenchaos in Vielteilchensystemen unter anderem nach einem korrespondierenden „Quanten-Schmetterlingseffekt“ und fragt beispielsweise, wie schnell sich eine mit einer Messung inhärent verbundene Störung in einem komplexen Quantensystem ausbreitet. Für zukünftige Quantentechnologien ist es essenziell zu verstehen, wie robust oder fragil ein Gas ultrakalter Atome auf unabdingbare äußere Einflüsse rea-

giert oder ein Netzwerk gekoppelter Qubits auf elementare Qubit-Operationen [5].

Diese Reaktion gilt es zu messen beziehungsweise zu quantifizieren. Angenommen, nach einer anfänglichen Zeitentwicklung bis zum Zeitpunkt t ließe sich die Zeit zurückdrehen, dann würde das System in einer Art Quantenzeitmaschine [6] um die Zeit $-t$ propagiert. Der resultierende Zustand ließe sich mit dem Anfangszustand vergleichen. Der Überlapp zwischen Anfangs- und Endzustand – die Größe des Echos – erlaubt es dann, den Einfluss externer Störungen auf die Vielteilchen-Quantendynamik während der Vor- und Rückpropagation zu bestimmen.

Derartige Überlegungen berühren Kernaspekte der Reversibilität in der Statistischen Physik und lagen schon der berühmten Loschmidt-Boltzmann-Kontroverse hinsichtlich der Ausbildung eines Zeitpfeils zugrunde. Gegen die Boltzmannsche Annahme des Entropiewachstums führte Loschmidt 1876 als Paradoxon ins Feld, dass sich aufgrund der Umkehrbarkeit mikroskopischer physikalischer Gesetze und Prozesse ein Vielteilchensystem durch instantanes Umdrehen der Richtungen aller Teilchengeschwindigkeiten bei weiter fortschreitender Zeit wieder exakt in den Ausgangszustand bewegen sollte, was einem Zurückdrehen der Zeit gleichkäme. Die Auflösung des Paradoxons führt direkt zur Rolle von Vielteilchenchaos: Während Loschmidts Gedankenexperiment jedwede Störung ausschließt, macht in klassischen Vielteilchensystemen selbst die kleinste, unvermeidbare externe Störung die postulierte Reversibilität zunichte.

Um in der Praxis die Zeit zurückzudrehen, dient das Spin-Echo-Protokoll als Paradebeispiel. Wenn ein sogenannter π -Puls die Spin-Orientierung bezüglich des Magnetfelds invertiert, dreht sich die Dynamik eines Elektronenspins im Magnetfeld um, was de facto eine Rückpropagation trotz weiter fortschreitender Zeit bewirkt. Solche Spin-Echo-Experimente untersuchen Reversibilität und Störungen der Quantendynamik einzelner Teilchen – wenn auch gemittelt über ein Ensemble unabhängiger Spins.

Dabei gilt es, die fragile Stabilität eines korrelierten Vielteilchen-Quantensystems zu ermitteln, beispielsweise vieler gekoppelter und verschränkter Spins oder Qubits. Dem Flügelschlag des Quanten-Schmetterlings, der das Gesamtsystem stört, entspricht das Flippen eines einzelnen Spins – bedingt durch eine Messung und beschrieben durch einen Operator A (**Abb. 2**). Die Ausbreitung dieser lokalen Störung lässt sich durch eine zweite Spin-Messung mithilfe eines Operators B in gewissem Abstand von A detektieren. Quantenmechanisch quantifiziert das ein Out-of-Time-Order-Commutator (OTOC): $C(t) = \langle [A(t), B]^2 \rangle$ (**Infokasten**). Die Festkörpertheorie kennt OTOCs bereits seit über 50 Jahren [7]. Sie tragen mit der Entropie verwandte Züge und messen das „scrambling“ in Vielteilchensystemen [6, 8], also wie umfassend sich die mit der Operation A einhergehende, lokal generierte Quanteninformation als Störung in die exponentiell vielen Freiheitsgrade des Hilbert-Raums des wechselwirkenden Vielteilchensystems ausbreitet und wie schnell dies quantenmechanische Verschränkung erzeugt. Google nutzt OTOCs, um die Effizienz von Netzwerken aus Quantenprozessoren zu erproben [5].

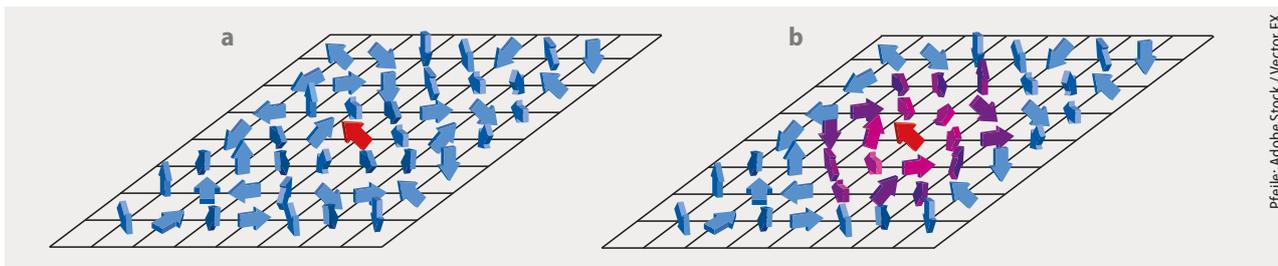


Abb. 2 In einem Gitter gekoppelter Spins führt das „Flippen“ eines verschränkten Spins (a, rot) dazu, dass sich die lokal generierte Information dynamisch über die unermesslich vielen Freiheitsgrade eines Spin-Gitters ausbreitet (b, lila) und massive Verschränkung erzeugt.

Die Forschung zum Quantenchaos verknüpft OTOCs als rein quantenmechanische Konstrukte direkt mit dem klassischen Lyapunov-Exponenten λ , der das exponentielle Wachstum $\Delta \exp(\lambda t)$ einer anfänglichen Störung Δ in einem chaotischen klassischen System beschreibt: den Schmetterlingseffekt. Für ein quantenmechanisches Einteilchensystem, beispielsweise ein Teilchen in einem Quantenbillard (**Abb. 1**), lässt sich argumentieren, dass im semiklassischen Limes kleiner Wellenlänge der quantenmechanische OTOC wie $\exp(2\lambda t)$ anwächst (**Infokasten**). Diese Beziehung stellt den vielleicht unmittelbarsten Zusammenhang zwischen klassischem Chaos und Quantenphysik dar, in diesem Fall zwischen klassischem und Quanten-Schmetterlingseffekt eines einzelnen Teilchens.

Schnittstelle zwischen den Welten

Versucht man dieses Einteilchenszenario auf Vielteilchen-Quantensysteme zu verallgemeinern, ist nicht klar, was dann der Lyapunov-Exponent bedeutet und was ein semiklassischer Limes für viele Teilchen besagt.

In Einteilchensystemen, wie dem Bohrschen Atom oder einem Quantenteilchen im Billard, zeichnet sich das semiklassische Übergangsregime von der Wellenmechanik zur Teilchendynamik durch hohe Anregungsenergien aus. Die entsprechend großen Teilchenimpulse mv gehören nach Louis de Broglie zu kleinen Wellenlängen $\lambda_{\text{dB}} = h/mv$ mit dem Planckschen Wirkungsquantum h . In diesem Energiebereich lässt sich der quantenmechanische Propagator U als Summe über Beiträge aller klassischen Pfade p vom Anfangspunkt x zum Endpunkt x' im Ortsraum approximieren [2, 4]:

$$U(x, 0; x', t) = \langle x' | \exp(-iHt) | x \rangle = \sum_p A_p \exp(iS_p / \hbar). \quad (1)$$

Hier sind S_p die Wirkung und A_p eine die Instabilität der jeweiligen Teilchenbahn widerspiegelnde Amplitude. Dieser Propagator heißt semiklassisch, weil die Trajektorien p und die Einträge S_p und A_p rein klassisch sind, aber die kohärente Summation der Phasen S_p / \hbar quantenmechanische Interferenz implementiert. Aus dem zentralen Objekt U in Gl. (1) leiten sich quantenmechanische Größen wie Spektren [3, 4] und Leitfähigkeiten ab, insbesondere aber auch Echos und OTOCs. So gelingt es, diese direkt in Beziehung zu den chaotischen Eigenschaften des klassischen Pendants zu setzen.

Für sehr kurze Zeiten lässt sich die quantenmechanische Zeitentwicklung durch U mittels einer einzigen Trajektorie approximieren. Das schließt Interferenz aus und entspricht der klassischen Näherung einer wohldefinierten Teilchenbahn. Auf der Zeitskala der sogenannten Ehrenfest-Zeit t_E bricht diese Näherung jedoch zusammen. Das zerfließende Wellenpaket im Quantenbillard macht deutlich, dass Interferenz die Quantendynamik für Zeiten $t > t_E$ prägt (**Abb. 1**). Semiklassisch erfordert das, eine zunehmende Zahl von Pfaden in Gl. (1) zu berücksichtigen. Die Ehrenfest-Zeit als fundamentale Zeitskala an der Schwelle zwischen klassischer Bewegung und Interferenz-dominierter Quantendynamik skaliert mit $t_E = \lambda^{-1} \ln(S_p / \hbar)$, wobei λ dem klassischen Lyapunov-Exponent entspricht. Im semiklassischen Limes gilt $\hbar / S_p \ll 1$: Da die klassische Wirkung S_p viel größer als das Wirkungsquantum \hbar ist, wird dieser Grenzfall auch mit $\hbar \rightarrow 0$ charakterisiert. Für diesen Grenz-

Out-of-Time-Order-Commutators

Quantenmechanisch geht mit der lokalen Messung einer Observablen A eine lokale Störung des Systems einher. Deren Größe lässt sich durch das Anwachsen des zeitabhängigen Heisenberg-Operators berechnen: $A(t) = \exp(iHt) A \exp(-iHt)$. Seine Struktur weist eine enge Analogie zum Schmetterlingseffekt auf: Die Operation $A(t)$ lässt sich interpretieren als die Vorwärtspropagation $\exp(-iHt)$ eines Vielteilchenzustands des Hamilton-Operators H ; zum Zeitpunkt t erfolgt eine Störung A , anschließend die Rückpropaga-

tion $\exp(iHt)$, also das Zurückdrehen der Zeit. Ein zweiter Operator B an einem anderen Ort hilft, das Anwachsen des Operators $A(t)$ zu messen. Ein Out-of-Time-Order-Correlator quantifiziert diesen Vorgang mit zwei Vor- und Rückpropagationen: $\exp(iHt) A \exp(-iHt) B \exp(iHt) A \exp(-iHt) B$. Weniger kompliziert erscheint der Erwartungswert eines damit eng verwandten quadrierten Kommutators, des Out-of-Time-Order-Commutators (OTOC): $C(t) = \langle [A(t), B]^2 \rangle$ [6 – 8]. Er beträgt anfangs Null und wächst schnell, wenn die durch

A verursachte Störung – in **Abb. 2a** das Messen des roten Spins – den Ort des Operators B erreicht (violette Spins). Der Spezialfall der Orts- und Impulsoperatoren X und P liefert eine heuristische Erklärung: Den quantenmechanischen Kommutator $[X(t), P]$ ersetzt die klassische Poisson-Klammer mit dem klassischen Lyapunov-Exponenten λ : $i\hbar \{x(t), p\} = i\hbar dx(t)/dx(0) \sim i\hbar \exp(\lambda t)$. Das Quadrat des Kommutators, also der OTOC, skaliert dann wie $C(t) \sim \exp(2\lambda t)$.

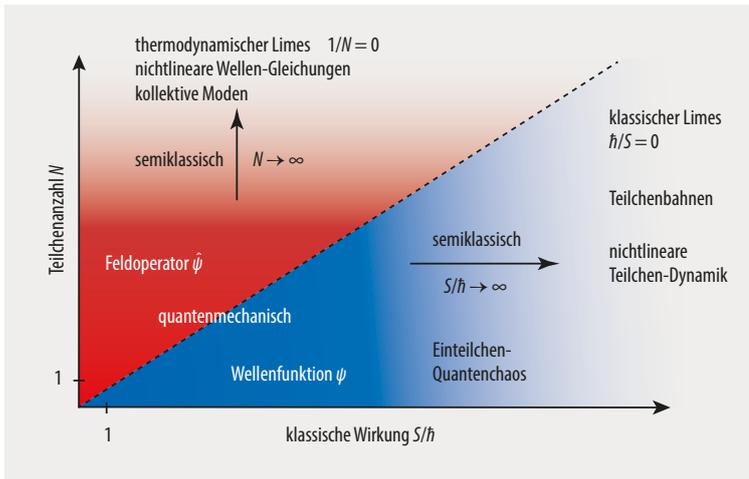


Abb. 3 Das gewöhnliche semiklassische Regime $\hbar \rightarrow 0$ (blau) beschreibt bei fester Teilchenzahl N den Übergang von Wellenfunktionen zu klassischen Teilchen. Der thermodynamische Limes wachsender Teilchenzahl entspricht formal einem weiteren, dazu „orthogonalen“ semiklassischen Limes mit $\hbar_{\text{eff}} = 1/N \rightarrow 0$, bei dem Quantenfelder in Wellenfunktionen übergehen (rot).

wert divergiert die Ehrenfest-Zeit: Die Zeitskala, bei der Wellenphänomene einsetzen, verschiebt sich immer mehr zugunsten von klassischer Teilchenbewegung mit zumeist nichtlinearer Dynamik (**Abb. 3**, blau).

Neben diesem üblichen semiklassischen Einteilchen-Limes existiert in Vielteilchen-Quantensystemen der dazu komplementäre thermodynamische Grenzwert bei großer Teilchenzahl N . Auch dieser lässt sich formal als semiklassisch auffassen mit einer effektiven Planck-Konstanten $\hbar_{\text{eff}} = 1/N \rightarrow 0$: In der Quantenfeldtheorie ersetzen Feldoperatoren die ursprünglichen Wellenfunktionen in einer „2. Quantisierung“. Im makroskopischen Grenzfall von $N = \infty$ gehen die Gleichungen dieser Quantenfelder in vielen Fällen in nichtlineare Wellengleichungen über (**Abb. 3**, rot). Beispielsweise beschreibt die sogenannte Gross-Pitaevskii-Gleichung, eine nichtlineare Schrödinger-Gleichung, Systeme aus unendlich vielen wechselwirkenden bosonischen kalten Atomen. Aus der Perspektive der Quantenfeldtheorie handelt es sich bei dieser „1. Quantisierung“ ebenfalls um einen „klassischen“ Grenzwert, wenn auch eine Ebene höher angesiedelt als der übliche semiklassische Limes.

Die Forschung der letzten Jahre hat gezeigt, dass sich auch der Vielteilchen-Propagator $U = \exp(-iHt)$ durch eine semiklassische Summe wie in Gl. (1) beschreiben lässt. Al-

lerdings erfolgt die Summation über abstrakte kollektive Pfade vieler Teilchen anstelle der interferierenden Amplituden verschiedener Trajektorien eines Teilchens im Ortsraum.

Das Interferenzbild eines Teilchens am Dreifachspalt (**Abb. 4a**) veranschaulicht diesen Unterschied zwischen Ein- und Vielteilchen-Interferenz. Das Bild auf dem Schirm am Punkt x' entsteht, weil sich die Amplituden von drei Pfaden von x nach x' im Ortsraum überlagern, die zu U in Gl. (1) beitragen. Statt durch den Zustand $\psi(x')$ lässt sich der gemeinsame Zustand von vier identischen Teilchen in einem periodischen Potential (z. B. vier Atome im Laserfeld, **Abb. 4b**) quantenmechanisch durch die Zahl der Teilchen an jedem Gitterplatz beschreiben. Im gegebenen Beispiel stehen die Besetzungszahlen $|130\rangle$ für den Ausgangszustand. Der exemplarische Vierteilchen-Endzustand $|211\rangle$ in diesem Raum der Besetzungszahlen, auch Fock-Raum genannt, entspricht $\psi(x')$ im Ortsraum auf dem Schirm links unten. Im Fock-Raum gibt es zahlreiche kollektive interferierende Vierteilchen-Pfade, die von $|130\rangle$ nach $|211\rangle$ führen: Für sehr viele Teilchen ergibt sich eine Interferenz zwischen nahezu unendlich vielen Pfaden im hochdimensionalen Vielteilchenraum.

Im Einteilchenfall stellen die Pfade in der semiklassischen Summe aus Gl. (1) Bahnen klassischer Teilchen dar. Entsprechend sind im Fock-Raum die abstrakten „klassischen“ Pfade nicht an ganzzahlige oder quantisierte Besetzungszahlen gebunden. Diese Pfade sind nun – formal gesehen – verschiedene zeitabhängige Lösungen der nichtlinearen Wellengleichungen für $N = \infty$ (**Abb. 3**, kollektive Moden). Nichtlinearitäten bedingt durch Wechselwirkungseffekte können diese Moden instabil oder sogar chaotisch machen. Diese „klassischen“ Moden bestimmen das Vielteilchen-Quantenchaos auf der Ebene der Quantenfelder, analog zu chaotischen klassischen Einteilchenbahnen, die Fingerabdrücke in Wellenfunktionen auf der Ebene der Schrödinger-Gleichung hinterlassen (Einteilchen-Quantenchaos). Dieser Zusammenhang hebt die Gutzwillersche semiklassische Theorie [2] des Zeitentwicklungsoperators U in Gl. (1) vom Niveau der 1. Quantisierung auf das der zweiten. Das gleiche gilt für die Zustandsdichte, die sich im Limes $\hbar \rightarrow 0$ als Summe über die Beiträge klassischer periodischer Bahnen [2 – 4] darstellen lässt und im Limes $\hbar_{\text{eff}} = 1/N \rightarrow 0$ als Summe über zeitperiodische kollektive Moden [10].

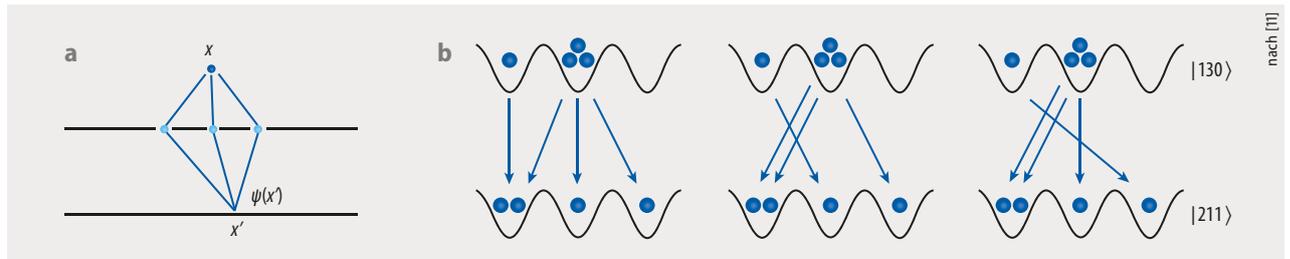


Abb. 4 Das Interferenzbild auf dem Schirm hinter einem Dreifachspalt (a) entsteht durch Überlagerung der Amplituden von drei Pfaden im Ortsraum von x nach x' . Im Vierteilchensystem (b) entwickelt sich aus dem Ausgangszustand $|130\rangle$ der Endzustand $|211\rangle$ durch Überlagerung der Amplituden verschiedener kollektiver Pfade im Raum der Besetzungszahlen, von denen drei exemplarische Pfade gezeigt sind, die jeweils aus vier einzelnen Pfeilen bestehen.

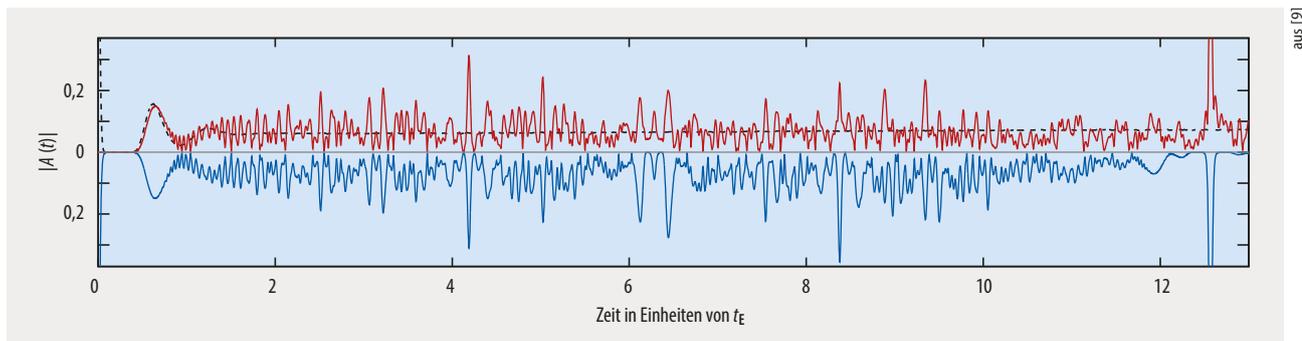


Abb. 5 In einem Bose-Hubbard-System mit $N = 40$ Atomen auf vier Plätzen lässt sich die Zeitentwicklung der Quanten-Rückkehrwahrscheinlichkeit eines anfänglich extremen Nichtgleichgewichtszustands $|0\ 20\ 0\ 20\rangle$ semiklassisch (rot) bestimmen. Das Resultat spiegelt das quantenmechanische Ergebnis (blau) wider; die klassische Näherung (schwarz) berücksichtigt nur einen Pfad und passt nach t_E nicht dazu.

Fallstudie mit Quantenecho

Die semiklassische Vielteilchentheorie lässt sich mithilfe einer Fallstudie überprüfen [9]. Dazu befindet sich ein Gas wechselwirkender bosonischer Atome in einem periodischen Potential (ähnlich zu **Abb. 4b**), das experimentell kontrollierbar [12] und adäquat durch ein Bose-Hubbard-Modell zu beschreiben ist. Ein dem Spin-Echo verwandtes Quantenecho berechnet sich aus der Rückkehrwahrscheinlichkeit eines zeitlich propagierten N -Teilchenzustands $\exp(-iHt)|\psi\rangle$ in den Ausgangszustand $|\psi\rangle$, gegeben durch den Auto-Korrelator $|A(t)| = |\langle\psi|\exp(-iHt)|\psi\rangle|$ (**Abb. 5**). Das semiklassische Resultat passt sehr gut zum numerischen quantenmechanischen Ergebnis: Die quasierratischen Quantenoszillationen im Rückkehrsignal $|A(t)|$ stimmen fast quantitativ überein. Der Vergleich mit der Propagation eines einzigen Pfades, also einer Mode im Vielteilchenraum, beschreibt die Dynamik nur für kurze Zeiten adäquat: Später dominiert die Interferenz mit anderen Pfaden das Geschehen, so wie von der semiklassischen Vielteilchentheorie vorhergesagt.

Dieser Zusammenbruch der klassischen Näherung eines Pfades und der Übergang in ein Zeitregime, das durch eine N -Teilchen-Interferenz geprägt wird, vollziehen sich erneut auf der Zeitskala der Ehrenfest-Zeit t_E oder „scrambling time“ [8], die nun von der Teilchenzahl abhängt: $t_E = \lambda^{-1} \ln(1/\hbar_{\text{eff}}) = \lambda^{-1} \ln N$. Sie stellt die Grenze dar zwischen Zeiten quasiklassischer Bewegung, während der eine einzige dominante Mode das System beschreibt, und sich daran anschließender Vielteilchen-Interferenz und „scrambling“ der Quanteninformation. Analog zu dem eingangs erwähnten klassischen Lyapunov-Exponenten beschreibt λ die Instabilität von kollektiven Moden im Vielteilchenraum. Die Lyapunov-Zeit λ^{-1} , die sich in einem Teilchengas oder für Ladungsträger im Festkörper grob mit der typischen Streuzeit zwischen Teilchenstößen assoziieren lässt, stellt die kürzeste relevante Zeitskala dar. Die Ehrenfest-Zeit ist wegen der logarithmischen Abhängigkeit von N im thermodynamischen Limes zwar signifikant größer, aber dennoch äußerst kurz im Vergleich zu weiteren charakteristischen Skalen. Mit anderen Worten erfolgt das „scrambling“ der Quanteninformation auf enorm kurzen

FIBER PORT CLUSTERS 2→6

Used in quantum optics, e.g. for cooling and trapping experiments (MOT)



Schäfter+Kirchhoff develop and manufacture laser sources, line scan camera systems and fiber optic products for worldwide distribution and use.

FIBER OPTIC COMPONENTS



POLARIZATION ANALYZER



Visit us: 26 - 29 April 2022, Hall B5, Booth B5.320 | Messe München



For current information please see www.sukhamburg.com



info@sukhamburg.de

www.sukhamburg.com

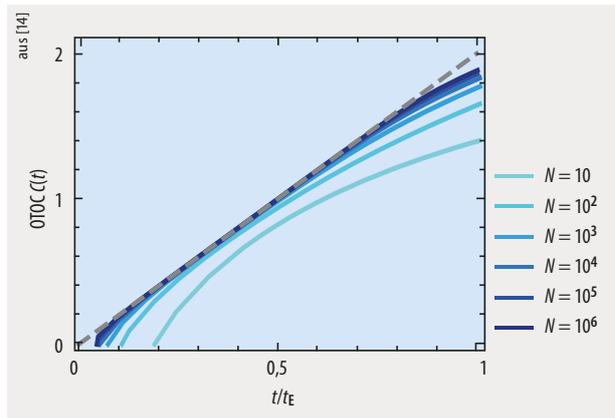


Abb. 6 Mit wachsender Teilchenzahl N nähern sich die numerisch berechneten OTOCs $C(t) \sim \langle \psi | [n(t), n(0)]^2 | \psi \rangle$ (blau, logarithmische Darstellung) mit den Besetzungszahloperatoren $n(t)$ der Exponentialfunktion $C(t) \sim \exp(2\lambda t)$ (grau) an. Der Exponent λ ergibt sich aus der korrespondierenden klassischen Dynamik.

Zeitskalen dadurch, dass der anfängliche Zustand relaxiert bzw. thermalisiert und an exponentiell viele quantenmechanische Freiheitsgrade koppelt.

Die zeitabhängigen Lösungen der nichtlinearen Wellengleichungen, also die klassischen Pfade bzw. Moden im Vielteilchenraum, stellen die Mean-field-Lösungen des vollen Vielteilchenproblems dar. Das eröffnet eine interessante Sicht auf den Zusammenhang von Verschränkung, scrambling und quantenchaotischen Vielteilchenphänomenen: Ein einzelner Mean-field-Zustand, also eine einzelne Mode, ist anfangs nicht verschränkt. Jenseits von t_E implizieren die Kopplung und kohärente Überlagerung vieler Mean-field-Moden Interferenz und generieren hohe Verschränkung im Vielteilchen-Propagator: Quantenchaos und hohe Verschränkung sind aufs Engste miteinander verwoben.

Diese Überlegungen erlauben es, das Verhalten der Out-of-Time-Order-Commutators $C(t)$ im Fall von N Teilchen

zu analysieren und zu deuten. In einer entsprechenden semiklassischen Vielteilchentheorie tritt für Zeiten $t < t_E$ exponentielles Wachstum auf mit dem Lyapunov-Exponenten λ der N -Teilchen-Dynamik [13]: $C(t) \sim \exp(2\lambda t)$. Für ein Modellsystem eines Gases aus N wechselwirkenden Atomen an einem quantenkritischen Punkt, den eine N -Teilchen-Dynamik mit Instabilität λ kennzeichnet [14],²⁾ lassen sich OTOCs für sehr große Teilchenzahlen numerisch bestimmen. Mit wachsendem N nähern sich diese im Limes $\hbar_{\text{eff}} = 1/N \rightarrow 0$ der asymptotischen Vorhersage $C(t) \sim \exp(2\lambda t)$ an (**Abb. 6**), was einem Quantenschmetterlingseffekt entspricht. Für Zeiten $t > t_E$ geht das exponentielle Wachstum in ein Plateau über, was durch Vielteilchen-Quanteninterferenz generiert und gekennzeichnet ist [13]. Inzwischen ist es experimentell gelungen, OTOCs mit kalten Atomen zu vermessen [16, 17], obwohl die zugrundeliegende Vorwärts- und Rückwärtspropagation nur kompliziert zu realisieren ist, da in OTOCs gerade die Zeitentwicklung gezielt durcheinander gerät.

Die Quantenphysik von klassischem Chaos

Unterschiedliche Facetten der Mechanismen, die Vielteilchen-Chaos, scrambling und Verschränkung verknüpfen, und mit ihnen verwandte Phänomene entpuppen sich als relevant in vielen aktuellen Forschungsfeldern. Dadurch hat sich das Vielteilchen-Quantenchaos zum zentralen Bindeglied bisher disjunkt erscheinender Fachgebiete der Physik entwickelt (**Abb. 7**).

Das betrifft beispielsweise Festkörpertheorie und Quantengravitation: Auch in letzterer gibt es Prognosen für Quanten-Schmetterlingseffekte. In diesem Kontext gibt es eine Vorhersage, dass für komplexe Systeme im thermischen Gleichgewicht eine OTOC-Variante exponentiell mit der Zeit wächst. Der Exponent, ein Quantenanalogue des klassischen Lyapunov-Exponenten λ , unterliegt einer universellen temperaturabhängigen oberen Schranke: $\lambda_Q < 2\pi k_B T / \hbar$. Wenn man das exponentielle Wachstum von OTOCs mit Quantenchaos assoziiert, so impliziert diese Ungleichung, dass die Ausprägung von Chaos rein quantenmechanisch beschränkt wäre („a bound to chaos“ [8]) und bei niedrigen Temperaturen sogar unterdrückt würde. Quantensysteme, die diese obere Schranke erreichen, sind die absolut schnellsten „scrambler“. Zu ihnen gehört ein stark wechselwirkendes Modellsystem in der Festkörpertheorie – das Sachdev-Ye-Kitaev-Modell [18] – ebenso wie holographische Modelle Schwarzer Löcher: Eine Dualität zwischen einem gravitativen System und einer konformen Quantenfeldtheorie charakterisiert diese Modelle. Leonard Susskind, einer der Mitbegründer der Stringtheorie, postuliert mithilfe dieser AdS-CFT-Dualität sogar einen direkten Zusammenhang zwischen der obigen Chaos-Schranke und Einsteins Beschränkung von Geschwindigkeiten durch die Lichtgeschwindigkeit c [19]. Da diese Modelle auch bei der Suche nach einer Theorie der Quantengravitation eine Rolle



Abb. 7 Die Methoden aus der Theorie zum Vielteilchen-Quantenchaos lassen sich auf verschiedene aktuelle Forschungsfelder anwenden.

²⁾ Die zeitliche Dynamik verwandter quasi-eindimensionaler Gase kalter Atome, welche z. B. die Gruppe von Markus Oberthaler in Heidelberg experimentell untersucht, trägt universelle und selbstähnliche Züge [15].

spielen, werden semiklassische Konzepte des Quantenchaos relevant [2 – 4, 20]. Während vieles dafür spricht, dass die Chaos-Schranke zumindest für gewisse quantenkritische Systeme gilt, ist der Grad ihrer Allgemeinheit noch völlig unklar und Gegenstand aktueller Forschung.

Zusammenfassung

Chaos bedingt massive quantenmechanische Verschränkung in Vielteilchensystemen. Während der numerische Aufwand üblicher quantenmechanischer Methoden mit wachsender Teilchenzahl enorm wächst, bildet umgekehrt der Limes großer Teilchenzahl gerade die Basis und definiert Anwendungsfelder moderner semiklassischer Pfadintegral-Methoden. Diese liefern Einblick in die zugrunde liegenden komplexen Vielteilchenmechanismen – der Quantenmechanik von klassischem Chaos – im Korrespondenzregime zwischen klassischer und Quantenwelt.

Der ultimative Übergang von der Vielteilchen-Quantenphysik mit $N \gg 1$ mit massiver Interferenz zur klassischen makroskopischen Physik mit $N = \infty$ erfolgt jedoch abrupt; ihm unterliegt mathematisch eine singuläre semiklassische Asymptotik. Derartige Brüche zwischen Theoriegebäuden deuten darauf hin, dass sich hier noch weitere interessante physikalische Phänomene verbergen.

Literatur

[1] A. Einstein, Verh. Deutsch. Phys. Ges. Berlin, **19**, 82 (1917)
 [2] M. C. Gutzwiller, J. Math. Phys. **12**, 343 (1971) und Ref. darin
 [3] F. Haake und K. Richter, Physik Journal, April 2011, S. 35
 [4] F. Haake et al., Quantum Signatures of Chaos, Springer (2019)
 [5] X. Mi et al., Science **374**, 1479 (2021)
 [6] B. Swingle, Nat. Phys. **14**, 988 (2018)
 [7] A. I. Larkin und Yu. N. Ovchinnikov, Sov. Phys. JETP **28**, 1200 (1969)
 [8] J. Maldacena et al., J. High Energ. Phys. **2016**, 106 (2016)
 [9] S. Tomsovic et al., Phys. Rev. A **97**, 061606 (2018)

[10] Für einen verwandten semiklassischen Zugang siehe M. Akila et al., Phys. Rev. Lett. **118**, 164101 (2017)
 [11] M. C. Tichy, New J. Phys. **14**, 093015 (2012)
 [12] M. Greiner und I. Bloch, Physik Journal, Oktober 2015, S. 33
 [13] J. Rammensee, J. D. Urbina und K. Richter, Phys. Rev. Lett. **121**, 124101 (2018)
 [14] Q. Hummel et al., Phys. Rev. Lett. **123**, 160401 (2019)
 [15] M. Prüfer, H. Strobel und M. Oberthaler, Physik Journal, Februar 2021, S. 36
 [16] M. Gärttner et al., Nat. Phys. **13**, 781 (2017)
 [17] M. K. Joshi et al., Phys. Rev. Lett. **124**, 240505 (2020)
 [18] B. Kobrin et al., Phys. Rev. Lett. **126**, 030602 (2021)
 [19] L. Susskind, arXiv:1802.01198 (2018)
 [20] A. Altland und J. Sonner, SciPost Phys. **11**, 034 (2021)

Der Autor



Klaus Richter (FV Dynamik und Statistische Physik und FV Tiefe Temperaturen) studierte in Kiel und Freiburg Physik und promovierte in Theoretischer Atomphysik. Anschließend befasste er sich mit Mesoskopischer Physik und Quantenchaos in Orsay, in Augsburg, wo er sich habilitierte, und in Dresden als Leiter einer Nachwuchsgruppe am MPI für Physik komplexer Systeme. Seit 2001 hat er an der U Regensburg einen Lehrstuhl im Bereich der Theorie der Kondensierten Materie inne. Für seine Arbeiten wurde er 2019 mit dem Physikpreis Dresden ausgezeichnet. Er war Sprecher der Sektion Kondensierte Materie (2012 bis 2015) und im DPG-Vorstand zuständig für Wissenschaftliche Programme und Preise (2017 bis 2021). Derzeit ist er Sprecher des SFBs Emergent Relativistic Effects in Condensed Matter.

Prof. Dr. Klaus Richter, Institut für Theoretische Physik, Universität Regensburg, Universitätsstraße 31, 93053 Regensburg

Vakuumentchnik



Vakuunkammer-Familie zum Einsatz in einem Hochenergie-Speicherring eines Teilchenbeschleunigers.



**Innovativ und intelligent.
 Präzise und produktiv.
 Zuverlässig und zukunftsweisend.**

PINK, der Weltmarktführer für vakuumentchnische Sonderanlagen, produziert seit rund 30 Jahren Anlagen und Systeme nach Kundenanforderung. Zum umfassenden Produktspektrum zählen u.a. UHV-Systeme für Linearbeschleuniger, Ionenstrahl-Therapieanlagen, Dichtheitsprüfanlagen sowie Hochvakuum-Lötöfen.

Führende internationale Technologieunternehmen, u.a. aus der Halbleiter- und Elektronikindustrie, der Medizintechnik, der Luft- und Raumfahrt sowie der Wissenschaft und Forschung vertrauen auf die innovativen Produkte des Familienunternehmens aus Wertheim.