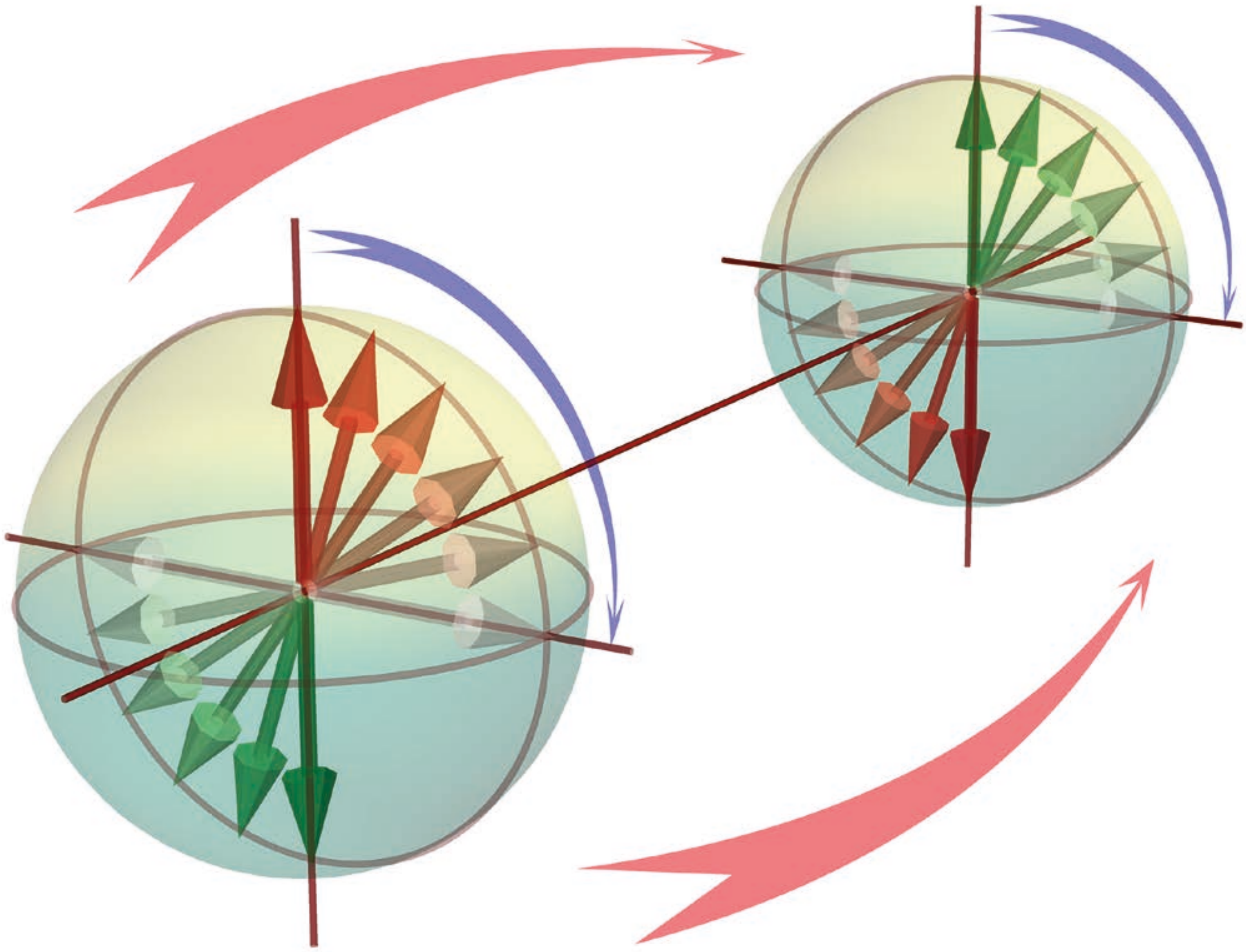

QUANTENPHYSIK

Ferngesteuerte Quantensysteme

In der Quantenmechanik können Messungen an einem System ein anderes steuern.

Tristan Kraft, H. Chau Nguyen und Otfried Gühne

In der Quantenmechanik lassen sich Teilchen an verschiedenen Orten durch eine gemeinsame Wellenfunktion beschreiben. In den 1930er-Jahren bemerkte Erwin Schrödinger, dass dies die Möglichkeit bietet, ein Quantensystem durch Messungen an einem weit entfernten weiteren System zu steuern. Seine Ideen waren jedoch lange vergessen und wurden erst in den letzten 15 Jahren wieder aufgegriffen. Mittlerweile ist es aber gelungen, die theoretisch vorhergesagten Effekte in Experimenten zu beobachten. Das Phänomen dieser Quantenkorrelation hängt eng mit anderen Konzepten wie der gemeinsamen Durchführbarkeit von Messungen zusammen und ist wichtig für Anwendungen wie die Quantenkryptographie.

Wenn zwei Tatverdächtige, Alice und Bob, bei einem Polizeiverhör dieselbe Geschichte erzählen, kann es dafür verschiedene Gründe geben. Alice kann von der Version Bobs erfahren haben und ihre Darstellung des Tatgeschehens danach ausgerichtet haben. Es kann aber auch eine gemeinsame Ursache für die Übereinstimmung geben. Im besten Fall erzählen Alice und Bob nichts als die Wahrheit. Die gemeinsame Ursache kann aber auch darin bestehen, dass sie sich im Vorhinein über eine Darstellung abgesprochen haben. Wenn die Verhöre gleichzeitig an verschiedenen Orten stattfinden, liegt eine gemeinsame Ursache nahe.

Was folgt, wenn die Antworten in dem Verhör auf eine gemeinsame Ursache zurückgehen? Dazu betrachten wir

Figuren: Adobe Stock / sapannpix

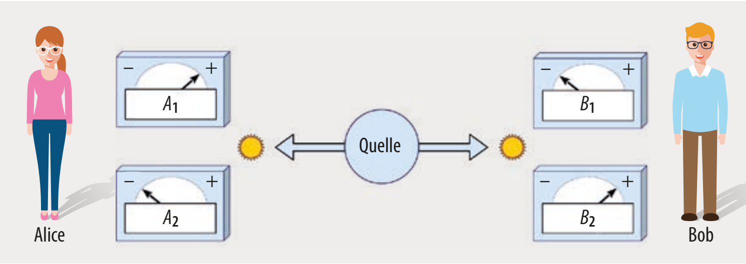

Abb. 1 Um in einem Experiment Korrelationen zu erzeugen, sendet eine Quelle jeweils ein Teilchen an Alice und Bob. Die beiden können jeweils verschiedene Messungen A_i oder B_i durchführen und erhalten unterschiedliche Messergebnisse. Im dargestellten einfachsten Fall sind es zwei mögliche Messungen mit je zwei möglichen Resultaten.

ein einfaches Modell: Alice und Bob bekommen Fragen gestellt (Waren Sie zur Tatzeit zuhause?) und geben eine von mehreren Antworten (ja oder nein). Etwas abstrakter lassen sich die Fragen an Alice durch einen Index x und die Antworten durch einen Index a beschreiben – bei Bob entsprechend durch y und b. Dann kann man sich die Wahrscheinlichkeiten anschauen, dass Alice a antwortet und Bob b, wenn Alice die Frage x und Bob die Frage y gestellt bekommt; diese Größen werden als $p(a,b|x,y)$ bezeichnet.

Ist die gemeinsame Ursache (z. B. die vereinbarte Tatversion) bekannt, sollte Alices Antwort nur von der Frage und dieser Ursache abhängen. Daher bezeichnet die Antwortfunktion $p(a|x,\lambda)$ die Wahrscheinlichkeit für eine Antwort, wobei λ die gemeinsame Ursache ist. Analog ist Bobs Antwort nur eine Funktion seiner Frage und der Ursache, $p(b|y,\lambda)$. Im Allgemeinen ist die gemeinsame Ursache jedoch nicht bekannt. Dann muss

$$p(a,b|x,y) = \sum_\lambda p(\lambda)\, p(a|x,\lambda)\, p(b|y,\lambda) \tag{1}$$

gelten. Hierbei ist $p(\lambda)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über alle möglichen gemeinsamen Ursachen, insbesondere aller möglichen Absprachen, und die Summe entspricht der Mittelung über alle Ursachen.

Was hat das nun mit Physik zu tun? In der Physik lassen sich Messungen als Fragen an ein System auffassen (**Abb. 1**). Erfolgen Messungen an zwei verschiedenen voneinander entfernten Teilchen, sind ebenfalls Korrelationen zu beobachten, und es liegt nahe, diese durch eine gemeinsame Ursache zu erklären. In der Physik ist die Rede von einem verborgenen Parameter λ.

In der Quantenmechanik ist es jedoch nicht immer möglich, die beobachteten Korrelationen durch eine gemeinsame Ursache zu erklären. Nehmen wir an, dass Alice und Bob jeweils ein Spin-1/2-Teilchen besitzen, die gemeinsam im Singulett-Zustand sind:

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z^+z^-\rangle - |z^-z^+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x^+x^-\rangle - |x^-x^+\rangle). \tag{2}$$

Hierbei ist $|z^+\rangle = |\uparrow\rangle$ bzw. $|z^-\rangle = |\downarrow\rangle$ der Eigenzustand einer Spinmessung in z-Richtung zum Eigenwert +1 bzw. −1 und $|x^\pm\rangle = (|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ sind die entsprechenden Eigenzustände in x-Richtung. Ferner ist $|z^+z^-\rangle = |z^+\rangle_A \otimes |z^-\rangle_B$ eine Kurznotation für einen Zwei-Teilchen-Zustand. Eine wichtige Eigenschaft dieses Zustands ist seine perfekte Antikorrelation für alle beliebigen Messrichtungen, nicht nur für Messungen in x- und z-Richtung.

Schon 1964 zeigte John Bell, dass bestimmte Messungen an diesem Zustand Korrelationen ergeben, die *nicht* der Form in Gleichung (1) entsprechen. Wären diese Korrelationen in der Verhörsituation zu beobachten, ließe sich ein vorher verabredeter Tathergang (oder andere gemeinsame Ursachen) ausschließen; vielmehr müssten die Antworten von Alice und Bob durch Messungen an einem Quantensystem entstanden sein. Bell leitete Ungleichungen her, die alle Korrelationen vom Typ (1) erfüllen, und zeigte, dass sie in der Quantenmechanik verletzt sind. Er folgerte, dass Gleichung (1) eine Art von *Lokalität* beschreibt, die nicht mit der Quantenmechanik vereinbar ist. Dieser Effekt ist heutzutage als *Bell-Nichtlokalität* bekannt.

Um diese Nichtlokalität in der Quantenmechanik zu untersuchen, gilt es zunächst zu fragen, welche Korrelationen sich in der Quantenmechanik durch lokale Aktionen und Kommunikation erzeugen lassen. Dazu können Alice und Bob folgende Schritte unternehmen: Zum einen können beide für sich Zustände ρ^A bzw. ρ^B präparieren; $\rho^{A/B}$ bezeichnet eine allgemeine Dichtematrix. Weiterhin können sie sich mittels klassischer Kommunikation darauf verständigen, bestimmte Zustände mit gewissen Wahrscheinlichkeiten herzustellen. Dies kann durch einen Index λ geschehen, der mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(\lambda)$ einhergeht. Schließlich können Alice und Bob verschiedene Messungen an ihren Zuständen vornehmen. Die Messwahrscheinlichkeiten $p(a,b|x,y)$ von beliebigen Messungen sind in diesem Fall

$$p(a,b|x,y) = \sum_\lambda p(\lambda)\, \mathrm{Tr}\,(\rho_\lambda^A M_a^x)\, \mathrm{Tr}\,(\rho_\lambda^B M_b^y). \tag{3}$$

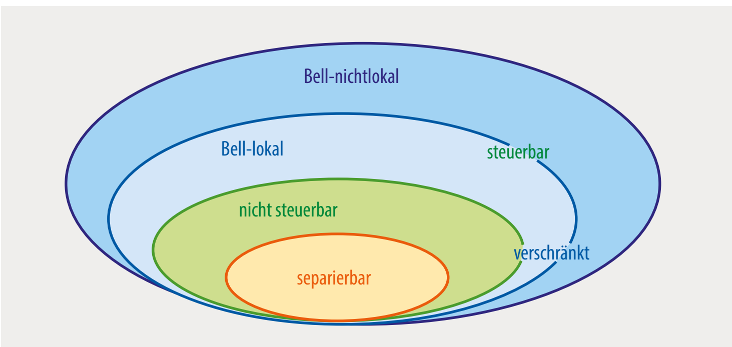

Abb. 2 Es existieren verschiedene Formen von Quantenkorrelationen: Korrelationen, die nicht von der Form von Gleichung (1) sind, zeigen Bell-Nichtlokalität. Quantenzustände, die Gleichung (3) erfüllen, sind separierbar, andernfalls sind sie verschränkt. Die Bedingung in Gleichung (4) liegt dazwischen, und die Zustände, die sie nicht erfüllen, sind steuerbar.

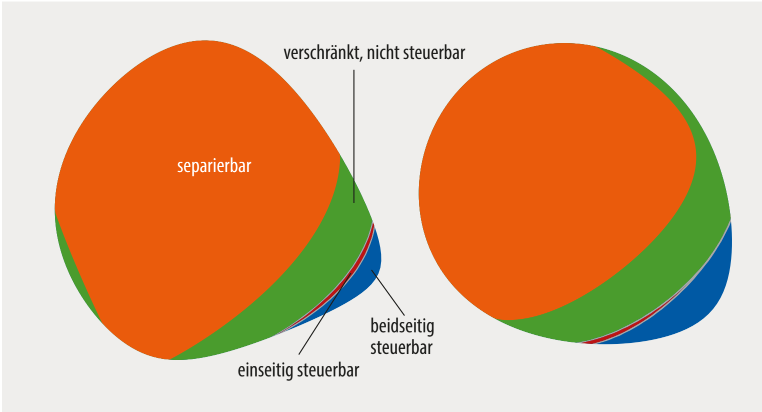

Abb. 3 Zu sehen sind zwei zufällige Querschnitte der 15-dimensionalen Menge aller gemischten Zustände (bzw. Dichtematrizen) von zwei Spin-1/2-Teilchen. Da die Steuerung nicht symmetrisch ist, sind verschiedene Klassen von Zuständen zu unterscheiden: zwischen der Menge der separierbaren, nicht verschränkten Zustände (orange), der verschränkten, aber nicht steuerbaren Zustände (grün), der Zustände, bei denen nur in eine Richtung gesteuert werden kann (rot), und in beide Richtungen steuerbare Zustände (blau). Die Methoden zur Unterscheidung dieser Klassen wurden in [2] entwickelt.

Der quantenmechanische Operator M_a^x beschreibt Alices Resultat a bei der Messung x, M_b^y ist der analoge Operator für Bob. Zustände, deren Korrelationen durch Gleichung (3) beschrieben sind, heißen *separierbar*. Andernfalls ist der Zustand *verschränkt*, da seine Korrelationen nur durch eine verschränkte Wellenfunktion wie in Gleichung (2) zu beschreiben sind.

Gleichung (3) ist ein Spezialfall von Gleichung (1), wenn $p(a|x,\lambda) = \mathrm{Tr}\,(\rho_\lambda^A M_a^x)$ gilt. Deshalb kann ein separierbarer Quantenzustand nicht zur Bell-Nichtlokalität führen. Ein Quantenzustand, der zur Bell-Nichtlokalität führt, ist notwendigerweise verschränkt. Es existieren jedoch auch verschränkte Zustände, deren Korrelationen mit Gleichung (1) zu beschreiben sind (**Abb. 2**).

Um von Gleichung (1) zu Gleichung (3) zu kommen, waren zwei Annahmen nötig, nämlich dass die Antwortfunktionen bei Alice *und* Bob durch quantenmechanische Messungen gegeben sind. In dem Fall gilt auch die Annahme, dass *nur* Bobs Antworten Ergebnisse von Messungen an Quantensystemen sind, wenn z. B. über Alices System wenig bekannt ist. In diesem Fall folgt

$$p(a,b|x,y) = \sum_\lambda p(\lambda)\, p(a|x,\lambda)\, \mathrm{Tr}\,(\rho_\lambda^B M_b^y). \qquad (4)$$

Die quantenmechanischen Zustände, deren Messwahrscheinlichkeiten nicht mit Gleichung (4) zu erklären sind, heißen *steuerbar*. Dieser Begriff entstammt einer alten Überlegung von Erwin Schrödinger. Er meinte damit, dass bei solch einem Zustand Alice durch ihre Messungen den lokalen Zustand bei Bob beeinflussen kann.

Vom Nachweis der Quantensteuerung ...

Offenbar ist die Quantensteuerung ein Zwischenphänomen zwischen der Verschränkung und der Bell-Nichtlokalität (**Abb. 2**). Um diesen Effekt nachzuweisen, gilt es zu zeigen, dass die beobachteten Messdaten nicht mit Gleichung (4) übereinstimmen. Dazu kann man Ungleichungen für Erwartungswerte von Messungen konstruieren, deren Verletzung die Steuerbarkeit anzeigt [1]. Beispielsweise kann Alice Messungen mit drei unterschiedlichen Messrichtungen A_1, A_2, A_3 durchführen, jede mit Ergebnissen ± 1, und Bob die drei Pauli-Messungen σ_x, σ_y und σ_z. Aus Gleichung (4) folgt in dem Fall

$$\langle A_1 \otimes \sigma_x \rangle + \langle A_2 \otimes \sigma_y \rangle + \langle A_3 \otimes \sigma_z \rangle \leq \sqrt{3}. \qquad (5)$$

Unabhängig davon, wie genau Alice ihre Messrichtungen gewählt und durchgeführt hat, folgt aus einer Verletzung dieser Bedingung, dass der Quantenzustand steuerbar ist.

Um die linke Seite von Ungleichung (5) zu bestimmen, müssen Alice und Bob je drei Messrichtungen wählen und durch wiederholtes Messen die Erwartungswerte bestimmen. Allgemeiner lässt sich fragen, ob ein Zwei-Teilchen-Zustand ρ_{AB} für *irgendwelche* Messrichtungen eine solche Steuerung zeigt. Für den einfachsten Fall von zwei Spin-1/2-Teilchen ist diese Frage gelöst (**Abb. 3**) [2]. Hierbei ist zu beachten, dass die Definition der Steuerbarkeit in Gleichung (4) asymmetrisch ist. Somit gibt es Zustände, in denen Alice durch ihre Messungen Bobs System steuern kann, während eine Steuerung in die andere Richtung nicht möglich ist.

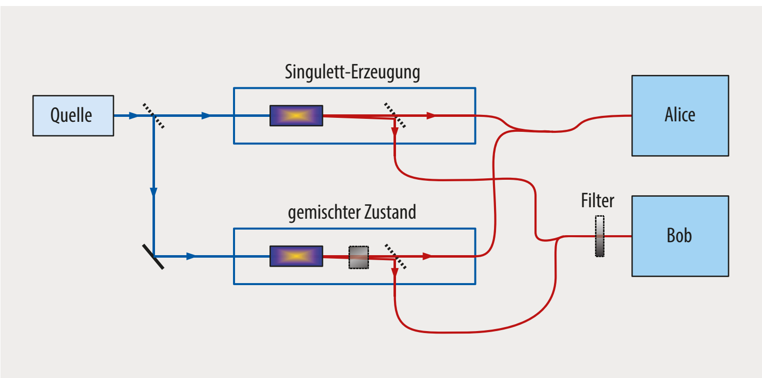

Abb. 4 Der Laserpuls aus der Quelle wird variabel aufgeteilt: In einem Arm entsteht ein verschränkter Singulett-Zustand zweier Photonen. Dazu wird das Laserlicht der Wellenlänge λ auf einen nichtlinearen Kristall gerichtet. Durch parametrische Niederkonversion entsteht ein Paar verschränkter Photonen mit Wellenlänge $\lambda/2$. Im anderen Arm wird durch Niederkonversion ein Zwei-Photonen-Zustand erzeugt, dann aber depolarisiert, sodass ein maximal gemischter Zustand resultiert. Die Zustände werden rekombiniert und zu Alice und Bob gesandt. Ein Filter schwächt Bobs Zustand so ab, dass sein Photon manchmal geblockt wird und er einen Vakuumzustand $|\mathrm{vac}\rangle$ erhält.

… zum Experiment

Die Frage nach einer experimentellen Beobachtung der Quantensteuerung liegt nahe, und es gab seit 2010 schon mehrere entsprechende Versuche. Wenn es nur darum gehen soll, Quantenzustände zu beobachten, die nicht durch ein Modell mit verborgenen Zuständen erklärbar sind, reicht im Prinzip jedes Experiment aus, in dem eine Bell-Ungleichung verletzt wird. Denn, wie oben erklärt, schließt eine Bell-Ungleichung allgemeinere Modelle mit verborgenen Parametern aus. Die der Steuerung zugrundeliegenden Quantenkorrelationen sind jedoch reichhaltiger, sodass neue Aspekte auftreten. Zum Beispiel stellt sich die Frage, ob die Asymmetrie des Phänomens experimentell nachweisbar ist.

Ein solches Experiment führten kürzlich Nora Tischler und Kollegen in der Gruppe von Geoff Pryde in Brisbane (Australien) durch [3]. Ziel dabei war es, einen Quantenzustand zu erzeugen, bei dem Alice durch ihre Messungen Bobs Zustand steuern kann. Gleichzeitig wollten die Forschenden zeigen, dass Bob – egal, welche Messungen er durchführt – Alices Zustand nicht steuern kann. Somit muss der gewünschte Zustand asymmetrisch sein. Außerdem muss er sich in einem engen Bereich im Zustandsraum befinden (**Abb. 3**).

In dem Experiment diente die Polarisation einzelner Photonen dazu, Quantenzustände darzustellen. Ein horizontal oder vertikal polarisiertes Photon entspricht den Zuständen $|H\rangle = |z^+\rangle$ und $|V\rangle = |z^-\rangle$, die Zustände $|x^\pm\rangle$ werden durch eine um ± 45° gedrehte Polarisation dargestellt. Den gewünschten Zwei-Photonen-Zustand herzustellen, erforderte verschiedene Bausteine (**Abb. 4**). Zum einen gilt es, einen reinen verschränkten Singulett-Zustand wie in Gleichung (2) herzustellen. Zum anderen war ein maximal gemischter Zustand von zwei Photonen nötig. Ein gemeinsamer Laserpuls löste diese beiden Prozesse aus. Die variable Aufteilung des Laserpulses erlaubte es, die relative Wahrscheinlichkeit für die Einzelprozesse frei einzustellen. Daraus resultierte eine Mischung vom Singulett-Zustand mit dem Rauschen.

Ein drittes wesentliches Element in der Zustandspräparation ist ein Filter, der Bobs Lichtstrahl abschwächt und manchmal das Photon abblockt. Dann erhält Bob einen Vakuumzustand $|\mathrm{vac}\rangle$. Effektiv ist damit sein System ein Drei-Niveau-System mit der Basis $|\mathrm{vac}\rangle, |H\rangle, |V\rangle$. Anschaulich ist klar, dass diese Asymmetrie die Steuerung von Bob durch Alice nicht stark beeinflusst. Denn wenn Alice die Polarisation ihres Photons misst, erhält sie mit Sicherheit ein Ergebnis. Andererseits erschwert dies die Steuerung in die umgekehrte Richtung: Bei Bobs Messungen kann durch die Blockade des Photons ein Nullresultat auftreten. In diesem Fall ist Alices System nicht durch Bobs Messung bestimmt.

Die Tatsache, dass Alice in dem Experiment Bobs System steuern kann, ließ sich durch die Verletzung einer Ungleichung ähnlich Gleichung (5) nachweisen. Dies zeigte, dass eine Beschreibung durch Gleichung (4) nicht möglich ist. Zudem wurde die Dichtematrix des Gesamtzustands ausgemessen, und es gelang zu zeigen, dass Bob Alices System nicht steuern kann – egal, welche Messungen er ausführt.

Schrödinger an Einstein am 13. Juli 1935

Dein Brief zeigt mir, daß ich vollkommen mit Dir übereinstimme in der Einstellung gegenüber der vorliegenden Theorie. Wir haben ja die Dinge, nachdem Du schon vor Jahren in Berlin darauf hingewiesen hattest, in den Seminaren viel und mit heißen Köpfen diskutiert. Immer wieder wiesen mir die anderen nach, daß keine Magie im krassen Sinne vorliegt, etwa so, daß das „amerikanische“ System q = 6 gibt, wenn ich mit dem „europäischen“ (Du siehst, wir legten Nachdruck auf die [räumliche] *Trennung!) nichts oder das eine mache, hingegen q = 5, wenn ich das andere mache; immer wieder sagte ich: so arg braucht es nicht zu sein, um blöd zu sein. Ich kann eben doch durch Maltrātieren des europäischen Systems das amerikanische willkürlich in einen „q-scharfen“ Zustand oder in irgendeinen, der bestimmt nicht zu dieser Klasse gehört, hineinsteuern, z. B. in einen „p-scharfen“. Das ist auch Magie!“* ([4], S. 551)

Schrödingers Diskussion mit Einstein

Die ursprüngliche Idee der Quantensteuerung formulierte Erwin Schrödinger 1935 als Antwort auf das Argument von Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen (EPR). Schrödinger korrespondierte rege mit Einstein darüber [4]. Einstein war mit der veröffentlichten Formulierung des EPR-Arguments nicht zufrieden und bevorzugte eine andere Formulierung, die er in den Briefen an Schrödinger darlegte, aber erst wesentlich später publizierte [5].

Ausgangspunkt ist die Wellenfunktion $|\psi\rangle$ eines einzelnen Teilchens. Diese liefert gemäß der Quantenmechanik die Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Resultate einer Orts- oder Impulsmessung zu berechnen. Gemäß Einstein gibt es zwei Möglichkeiten, die statistische Beschreibung durch $|\psi\rangle$ zu erklären:

- Das einzelne System hat vor der Messung einen bestimmten Wert des Ortes und Impulses, den eine Messung feststellen kann. In diesem Bild ist die Wellenfunktion $|\psi\rangle$ keine vollständige Darstellung des physikalischen Zustands des Systems. Die Wellenfunktion drückt nur aus, was aufgrund früherer Messungen oder der Zustandspräparation über das System bekannt ist.
- Das einzelne System hat vor der Messung keinen bestimmten Wert der Ortes oder Impulses. Der Messwert kommt erst durch die Messung zustande, und die Wellenfunktion bestimmt dabei die Wahrscheinlichkeiten. Dieser Standpunkt erlaubt es, die Wellenfunktion als vollständige Beschreibung aufzufassen. Insbesondere beschreiben zwei verschiedene Wellenfunktionen zwei verschiedene reale Situationen.

Zusätzlich nimmt Einstein ein Lokalitätsprinzip für die physikalische Realität an. Wenn zwei räumlich getrennte Systeme betrachtet werden, sind die Dinge in ihnen unabhängig voneinander physikalisch existent. Demnach hängt der reale Sachverhalt eines Systems nicht davon ab, was an einem von ihm räumlich getrennten System vorgenommen wird. Gemäß Einstein würde eine Aufhebung dieses Prinzips die Formulierung und Überprüfung von physikalischen Gesetzen im herkömmlichen Sinne verhindern.

Nun werden zwei Teilchen untersucht, die an verschiedenen Orten sind und durch eine verschränkte Wellenfunktion beschrieben werden. Ein Beispiel dafür ist der Singulett-Zustand aus Gleichung (2), der in verschiedenen Basen eine ähnliche Struktur hat.

Wenn Alice eine Messung von σ_z oder σ_x durchführt, ergeben sich bei Bob verschiedene Wellenfunktionen $|\varphi_1\rangle = |z^{+}\rangle$ oder $|\varphi_2\rangle = |x^{+}\rangle$ – je nach Wahl der Messung und ihres Resultats. Gilt jedoch das Lokalitätsprinzip, wird dieselbe physikalische Situation durch zwei verschiedene Wellenfunktionen beschrieben. Entsprechend kann die Wellenfunktion keine vollständige Beschreibung sein. Damit ist laut Einstein der zweite Standpunkt unhaltbar und der erste zu favorisieren.

In seiner Antwort bemerkt Schrödinger, dass es verschiedene Arten der Fernwirkung geben kann (**Infokasten** auf der linken Seite). Die erste ist die Signalübertragung: Wenn das Resultat einer Messung auf der einen Seite davon abhängt, welche Aktion an der anderen Seite stattfindet, kann man sicherlich Information übertragen. Dies steht im Widerspruch zur Speziellen Relativitätstheorie. Schrödinger ist sich klar darüber, dass dies in der Quantenmechanik nicht möglich ist, sieht in dem EPR-Beispiel jedoch eine andere Art der Fernwirkung. Im EPR-Szenario *steuert* Alice durch die Wahl der Messung, ob Bob einen Eigenzustand von σ_x oder σ_z hat. Das sieht für Schrödinger ebenfalls nach einer magischen Fernwirkung aus.

In zwei Artikeln hat Schrödinger diese Idee weiter ausgearbeitet [6]. Er fand diese Steuerung in der Quantenmechanik „abstoßend“ und schlug daher vor, die Quantenmechanik für zusammengesetzte Systeme zu modifizieren und gewisse Superpositionen von Zuständen nicht zu erlauben. Schrödingers Formulierung der Steuerbarkeit wurde lange nicht beachtet und erst 2007 durch die oben gegebene moderne Formulierung von Wiseman, Jones und Doherty wieder aktuell [7].

Die Rolle der Messungen bei der Quantensteuerung

Welche Eigenschaften müssen Alices Messungen haben, um Quantensteuerung zu ermöglichen? Bekanntlich ist eine zentrale Eigenschaft der Quantenmechanik die Existenz nicht kommutierender Observablen, die sich gegenseitig stören, wenn man versucht, sie gemeinsam an einem

Gemeinsame Messbarkeit verallgemeinerter Messungen

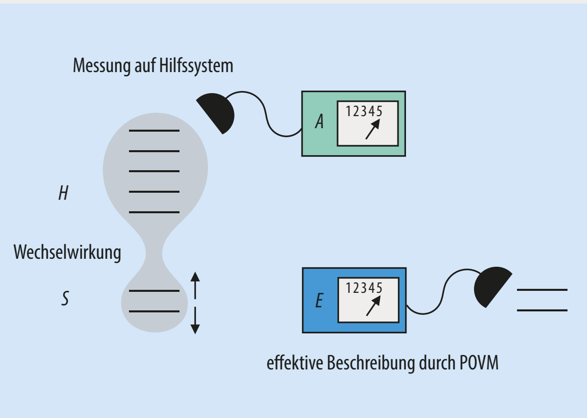

Abb. i Eine allgemeinere Messung an einem System S besteht darin, dass das System mit einem Hilfssystem H wechselwirkt und dann auf H eine Observable gemessen wird. In der Tat lässt sich jedes POVM so auffassen.

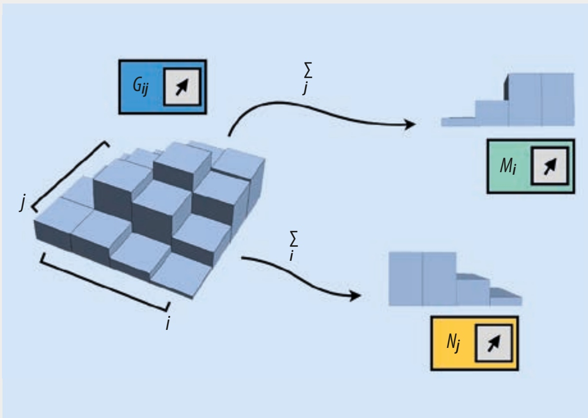

Abb. ii Beide Messungen $\{M_i\}$ und $\{N_j\}$ haben vier mögliche Ergebnisse und lassen sich gemeinsam messen. Das bedeutet, dass es eine dritte Messung $\{G_{ij}\}$ mit 16 Ergebnissen gibt, mit der sich $\{M_i\}$ und $\{N_j\}$ simulieren lassen, indem man einfach die Marginalien der Statistik von G berechnet.

In vielen Situationen reicht die Beschreibung von Messprozessen durch hermitesche Observablen nicht aus. Hier sind **verallgemeinerte Messungen** nötig oder **Positive Operator Valued Measures (POVMs)**. Ein System S wechselwirkt hierbei mit einem Hilfssystem H. Anschließend wird am Hilfssystem H eine Observable gemessen (**Abb. i**). Abhängig von der Stärke der Wechselwirkung liefert diese Messung mehr oder weniger Information über den Zustand des Systems S. Zudem kann eine Messung an H mehr Resultate haben als eine direkte Messung an S, da die Anzahl der Freiheitsgrade von H viel größer sein kann als die von S.

Die daraus resultierende Messung auf dem System S lässt sich daher nicht durch eine normale Observable beschreiben, was POVMs erforderlich macht. Dabei handelt es sich um einen Satz $\{E_i\}$ positiver semidefiniter Operatoren $E_i \geq 0$, für die $\sum_i E_i = \mathbb{1}$ gilt. Ein Operator heißt positiv semidefinit, wenn alle seine Eigenwerte nicht-negativ sind und die E_i heißen auch Effekte. Bei dieser Beschreibung einer Messung entspricht jeder Effekt einem möglichen Ergebnis der Messung, das mit der Wahrscheinlichkeit $p_i = \mathrm{Tr}\,(\rho\, E_i)$ auftritt. Jedes POVM besitzt eine Realisierung durch Wechselwirkung mit dem Messen auf einem zweiten System.

Bei verallgemeinerten Messungen kann es vorkommen, dass deren Effekte nicht kommutieren, aber sie dennoch gemeinsam messbar sind. Allgemein nennt man zwei POVMs $\{M_i\}$ und $\{N_j\}$ gemeinsam messbar, wenn es ein drittes POVM $\{G_{ij}\}$ gibt, das die ersten beiden Messungen simuliert. Dies ist der Fall, wenn $M_i = \sum_j G_{ij}$ und $N_j = \sum_i G_{ij}$ gilt (**Abb. ii**). Um die Messwahrscheinlichkeiten für $\{M_i\}$ und $\{N_j\}$ zu bestimmen, kann man die Messwahrscheinlichkeiten bestimmter Resultate von $\{G_{ij}\}$ addieren.

Beispielsweise sind die beiden Pauli-Observablen $\sigma_x = |x^{+}\rangle\langle x^{+}| - |x^{-}\rangle\langle x^{-}|$ und $\sigma_z = |z^{+}\rangle\langle z^{+}| - |z^{-}\rangle\langle z^{-}|$ inkompatibel, da ihre Effekte $|x^{\pm}\rangle\langle x^{\pm}|$ und $|z^{\pm}\rangle\langle z^{\pm}|$ nicht kommutieren. Existiert ein Messgerät, das einer gewissen Fehleranfälligkeit unterliegt und manchmal ein zufälliges und vom Zustand unabhängiges Ergebnis anzeigt, misst man effektiv verrauschte Versionen von σ_x und σ_z. Obwohl die Effekte dieser Messung ebenfalls nicht kommutieren, sind die hinreichend verrauschten Versionen dennoch gemeinsam messbar.

Zustand zu messen. Hängt diese Eigenschaft mit der Quantensteuerung zusammen?

In der typischen Lehrbuchformulierung der Quantenmechanik beschreiben Observablen, also hermitesche Operatoren, Messungen. Ein Operator A heißt hermitesch, wenn $A=A^\dagger$ gilt. Dann existiert eine Zerlegung in Eigenwerte und Eigenvektoren von der Form $A=\sum \alpha_i |a_i\rangle\langle a_i|$. Dabei sind α_i die möglichen Ergebnisse der Messung. $|a_i\rangle$ ist der Zustand des Systems, nachdem A gemessen und das Ergebnis α_i beobachtet wurde. Zwei Observablen sind gemeinsam messbar, wenn sie die gleichen Eigenvektoren $|a_i\rangle$ besitzen. Der Kommutator verschwindet in diesem Fall. Andernfalls nennt man sie *inkompatibel*.

In der Quantenmechanik existieren jedoch noch allgemeinere Messungen. Zum einen können Messungen verrauscht sein. Wenn es keinen Zustand $|\psi\rangle$ gibt, bei dem sich das Messergebnis mit Sicherheit vorhersagen lässt, ist die Messung nicht mehr durch eine Observable zu beschreiben. Zum anderen können Messungen mehr Resultate haben. Bei einem Spin-1/2-Teilchen liefert eine Observable immer nur zwei mögliche Messresultate, denn der Hilbert-Raum ist zweidimensional. Wenn jedoch das Teilchen zuerst mit mehreren anderen Teilchen wechselwirkt und dann die anderen Teilchen gemessen werden, liefert das effektiv eine andere Messung mit mehr als zwei Resultaten an dem Spin-1/2-Teilchen.

Beim Betrachten solch verallgemeinerter Messungen entsteht folgendes Bild: Zwei verallgemeinerte Messungen sind gemeinsam messbar, wenn sich durch eine dritte Messung beide gleichzeitig simulieren lassen (**Infokasten**). Weiterhin kann man zeigen, dass Gleichung (4) genau dann für jeden beliebigen Quantenzustand gilt, wenn die Messungen auf Alices Seite gemeinsam messbar sind [8]. Dieser überraschende Zusammenhang zwischen Messungen und Quantenkorrelationen ist nicht nur aus grundlegender Sicht interessant. Es ist auch möglich, Resultate und Methoden von einem Gebiet auf das jeweils andere anzuwenden.

Ressource statt Einschränkung

Die Korrelationen zwischen Teilchen in der Quantenmechanik sind sonderbar, und die mögliche Steuerung eines Quantensystems durch Messungen an einem anderen System sind nur *ein* interessanter Aspekt. Dieses Phänomen war über siebzig Jahre lang fast vergessen, doch das starke Interesse an der Quanteninformation hat neue Untersuchungen motiviert, die zu Anwendungen und Verbindungen mit der Theorie der inkompatiblen Messungen geführt haben.

Derzeit entwickelt sich die Forschung in verschiedene Richtungen: In der Quantenkommunikation können asymmetrische Szenarien entstehen, wenn eine Seite, etwa ein Unternehmen, hochwertige Geräte und gute Sicherheitsinfrastruktur besitzt, während die andere Seite, etwa ein Kunde, nicht über dieselben Mittel und Geräte verfügt. Hier kann die Quantensteuerung Methoden bereitstellen, um die Sicherheit solcher asymmetrischer Szenarien zu analysieren. Zudem gilt die Inkompatibilität von Messungen in der Quantenmechanik mittlerweile nicht mehr als Einschränkung, sondern als Ressource, die überraschende Effekte ermöglichen kann. Eine allgemeine Theorie dieser Ressource steht jedoch noch aus.

Literatur

[1] *R. Uola* et al., Rev. Mod. Phys. **92**, 15001 (2020)
[2] *H. C. Nguyen, H.-V. Nguyen* und *O. Gühne*, Phys. Rev. Lett. **122**, 240401 (2019)
[3] *N. Tischler* et al., Phys. Rev. Lett. **121**, 100401 (2018)
[4] *K. von Meyenn*, Eine Entdeckung von ganz außerordentlicher Tragweite. Schrödingers Briefwechsel zur Wellenmechanik und zum Katzenparadoxon, Springer (2011)
[5] *A. Einstein*, Dialectica **2**, 320 (1948)
[6] *E. Schrödinger*, Proc. Camb. Phil. Soc. **31**, 555 (1935); *E. Schrödinger*, Proc. Camb. Phil. Soc. **32**, 446 (1936)
[7] *H. M. Wiseman, S. J. Jones* und *A. C. Doherty*, Phys. Rev. Lett. **98**, 140402 (2007)
[8] *M. T. Quintino, T. Vértesi* und *N. Brunner*, Phys. Rev. Lett. **113**, 160402 (2014); *R. Uola, T. Moroder* und *O. Gühne*, Phys. Rev. Lett. **113**, 160403 (2014)

Die Autoren

Tristan Kraft hat in Siegen und Glasgow Physik studiert und hat 2020 an der Univ. Siegen promoviert. Er arbeitet zurzeit als Postdoc in der Gruppe von Barbara Kraus an der Univ. Innsbruck. Zu seinen Forschungsinteressen gehören inkompatible Messungen und Quantensteuerung sowie Quantenkorrelationen in Netzwerken.

H. Chau Nguyen (FV Quanteninformation und FV Theoretische und Mathematische Grundlagen der Physik) promovierte 2015 an der Universität zu Köln. Anschließend forschte er am Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme in Dresden und wechselte 2018 an die Univ. Siegen. Seine Forschungsschwerpunkte sind Quanteninformation und die Grundlagen der Quantenmechanik.

Otfried Gühne (FV Quanteninformation und FV Quantenoptik und Photonik) hat in Münster Mathematik und Physik studiert und 2004 bei Maciej Lewenstein in Hannover promoviert. Danach ging er als Postdoc zu Hans Briegel nach Innsbruck. Ab 2008 leitete er dort eine durch den österreichischen START-Preis finanzierte Nachwuchsgruppe. Seit 2010 ist der Professor an der Universität Siegen.

Tristan Kraft, Department Physik, Universität Siegen, Walter-Flex-Str. 3, 57068 Siegen und Institut für Theoretische Physik, Universität Innsbruck, Technikerstraße 21A, 6020 Innsbruck, **H. Chau Nguyen** und **Otfried Gühne**, Department Physik, Universität Siegen, Walter-Flex-Str. 3, 57068 Siegen

